12.1　行列の三角化

行列の三角化

正方行列 A に対して, 適当な正則行列 P を選んで $P^{-1}AP$ が上三角行列となるとき, A は P によって**三角化 (triangular)** されるという.

エルミート行列, ユニタリ行列

n 次の正方行列 $A=(a_{ij})$ について, $A^*=(\bar{a_{ij}})^t=(\bar{a_{ji}})$ を A の **共役転置** という. $A=A^*$ である行列を **エルミート行列** という. $U^*U=UU^*=I$ となる n 次の複素正方行列 U を **ユニタリ行列** という.

三角化

定理 12.1 n 次の正方行列 A の固有値を $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ とすると, A は適当なユニタリ行列 U により上三角行列

$$U^{-1}AU=U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

に変換される.

証明 行列 A の次数 n について帰納法を用いる. $n=1$ のときは $A=(a_{11})$ 自身上三角行列である. $n-1$ 次の正方行列について定理が成り立つと仮定し, n 次の正方行列 A に対しても定理が成り立つことを示す.

A のひとつの固有値を λ_1, それに対する固有単位ベクトルを $\mathbf{u}_1$ とし, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$ を C^n の正規直交基底になるように選ぶ. すると

$$U_1=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n)$$

はユニタリ行列であり,

$$U_1^{-1}AU_1=U_1^{-1}(\lambda_1\mathbf{u}_1,A\mathbf{u}_2,\ldots,A\mathbf{u}_n)=(\lambda_1\mathbf{e}_1,U^{-1}A\mathbf{u}_2,\ldots,U^{-1}A\mathbf{u}_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \vdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & B\end{pmatrix}$$

となる. ここで B は $n-1$ 次の正方行列である. A と $U^{-1}AU$ は同じ固有値をもつから, B の固有値は A の λ_1 以外の $n-1$ 個の固有値 $\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n$ である. 仮定より $n-1$ 次の正方行列 B に対して $n-1$ 次のユニタリ行列 U_2 が存在し, $U_2^{-1}BU_2$ が上三角行列

$$U_2^{-1}BU_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

になる．このとき $U = U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$ とおくと, U はユニタリ行列であり,

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}^{-1} U_1^{-1}AU_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & U_2^{-1}BU_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

よって $U^{-1}AU$ は定理に述べた形の上三角行列である．■

例題 12.1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の対角化は可能か．もし不可能なら三角化せよ．

解 $\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2$ より, 固有値は 2 である．また

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 固有ベクトルは

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

よって, 固有空間は $V(2) = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ となり, $\dim V(2) = 1 < 2$. したがって, 対角化は不可能である．そこで三角化するために固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より固有単位ベクトル $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を得, これより Gram-Schmidt の直交化を用いて正規直交基底を作ると $\{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ となる．そこで $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, U は直交行列となり

$$U^{-1}AU = U^tAU = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．■

n 次の実正方行列 A が重複度をこめて n 個の実数の固有値をもつならば, いま行なった証明はそのまま実数の範囲で繰り返すことができる．この場合, U として直交行列を用いることができ次の定理を得る．

定理 12.2 n 次の正方行列 A が n 個の実数の固有値をもつならば, A は適当な直交行列 P により上三角行列に変換される．

問 12.1 次の行列は三角化可能か．もし不可能なら三角化せよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$