ベクトル解析入門

横田 壽

目次

第 1 章

ベクトル

1.1 空間のベクトル I

平面や空間での有向線分によって表されるベクトルにはすでに出会ったことがあるでしょう．ここでは, 3 次元空間において有向線分で表されるベクトルを **空間のベクトル** とよびます．空間のベクトルは, 方向と大きさをもつ線分を表します.

これから先, 空間のベクトルはいつも有向線分で表されます．空間のベクトルは, 皆さんが今まで扱ってきた数と違い, 同じ方向と大きさをもちさえすれば等しいということができます．つまり, どの空間のベクトルもそれに平行で大きさが同じ空間のベクトルで置き換えても等しく, このことから, 空間のベクトルは方向と大きさを変えないで自由に動かすことができます.

初めに, ふたつの初等的な演算, **加法 (vector addition)** および**スカラー乗法 (scalar multiplication)** を空間のベクトルに対して定義します．ベクトルの和を作る操作を加法といい, ベクトルを定数倍することをスカラー乗法といいます.

空間のベクトル $\mathbf{x}$ に対して、直交座標を用意し、始点が原点になるように平行移動したとき、原点と終点の座標 (x_1, x_2, x_3) を結ぶベクトルを $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ または, ${}^t[x_1\ x_2\ x_3]$ と表します．特に xyz-空間を扱う場合には, 原点を始点とし点 $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ を結んでできるベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を用いて, $\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{i} + x_2\,\mathbf{j} + x_3\,\mathbf{k}$ と表します．すると、2 つのベクトル $\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{i} + x_2\,\mathbf{j} + x_3\,\mathbf{k}$, $\mathbf{y} = y_1\,\mathbf{i} + y_2\,\mathbf{j} + y_3\,\mathbf{k}$ の和は、

$$x_1\,\mathbf{i} + x_2\,\mathbf{j} + x_3\,\mathbf{k} + y_1\,\mathbf{i} + y_2\,\mathbf{j} + y_3\,\mathbf{k} = (x_1 + y_1)\,\mathbf{i} + (x_2 + y_2)\,\mathbf{j} + (x_3 + y_3)\mathbf{k}$$

と定義することができます.

また, ベクトルの大きさ $|x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}|$ は, 原点と点 (x_1, x_2, x_3) を結ぶ線分の距離となり, $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ で表せます.

例題 1.1 $\boldsymbol{A} = -\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}, \boldsymbol{B} = -3\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ について, 次の値を求めよ.

$$(a)\ 2\boldsymbol{A} \qquad (b)\ 3\boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{A} \qquad (c)\ |\boldsymbol{A}|$$

解 (a) $2\boldsymbol{A} = 2(-\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}) = -2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}$.
(b) $3\boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{A} = 3(-3\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}) - 2(-\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k} = 2\,\mathbf{i} - 13\,\mathbf{j}$.
(c) $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

問 1.1　上の例題において $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ を求めよ.

基本ベクトル

原点と点 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ を結んでできるベクトル $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ を直交座標系 $(O-xyz)$ における基本ベクトルといいます．また，$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ のように大きさが 1 のベクトルを **単位ベクトル (unit vector)** といいます.

1.2 内積

空間のベクトルにおいて次の 3 つのことは基本です．(1) 和, (2) スカラー倍, (3) 内積 (スカラー積).

和とスカラー倍については、すでに学んだので、ここでは空間のベクトルの内積について紹介します。

$\mathbf{0}$ でないベクトル$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$とそれらのなす角を $\theta(0 \leq \theta \leq \pi)$ とします．このとき, 実数 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$ を$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$の**内積 (dot product)** または**スカラー積**といい $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ と表します．つまり

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$$

$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$のうち少なくとも一方が $\mathbf{0}$ のときは, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$ と定めます.

定理 1.1　2 つのベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ に対して，$\boldsymbol{A}=A_1\,\mathbf{i}+A_2\,\mathbf{j}+A_3\,\mathbf{k}, \boldsymbol{B}=B_1\,\mathbf{i}+B_2\,\mathbf{j}+B_3\,\mathbf{k}$ ならば,

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$$

である.

問 1.2　内積の定義と余弦定理を用いて，上記の定理を証明せよ.

例題 1.2 $\boldsymbol{A}=\ \mathbf{i}+\ \mathbf{j}+2\,\mathbf{k}$ と $\boldsymbol{B}=-\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+\ \mathbf{k}$ のなす角を求めよ.

解

$$\cos\theta = \frac{A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3}{|A_1\,\mathbf{i}+A_2\,\mathbf{j}+A_3\,\mathbf{k}||B_1\,\mathbf{i}+B_2\,\mathbf{j}+B_3\,\mathbf{k}|} = \frac{-1+2+2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2},\ \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

問 1.3　$\boldsymbol{A}=-\,\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}+\ \mathbf{k}, \boldsymbol{B}=2\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j}-2\,\mathbf{k}$ について, 次の値を求めよ.

(1) $\boldsymbol{A}$ と$\boldsymbol{B}$ のなす角

(2) $\boldsymbol{A}$方向の単位ベクトル (単位ベクトルは大きさが 1 のベクトル)

1.3　外積

定義 1.1 ふたつの空間のベクトル $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ において, 大きさは $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ によって作られる平行四辺形の面積 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$ と等しく, 方向は, $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ の両方に垂直で, $\boldsymbol{A}$を 180° 以内回転して$\boldsymbol{B}$ の方向に重ねるとき右ねじの進む方向として定まるベクトルを, $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ の **外積 (cross product)** といい $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ で表す. $\boldsymbol{A}=\mathbf{0},\boldsymbol{B}=\mathbf{0},\theta=0$ のとき, $\boldsymbol{A}$ と$\boldsymbol{B}$ に垂直な方向が定まらないが, $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$ と定義する.

$$(A_1\,\mathbf{i}+A_2\,\mathbf{j}+A_3\,\mathbf{k})\times(B_1\,\mathbf{i}+B_2\,\mathbf{j}+B_3\,\mathbf{k})=(A_2B_3-A_3B_2)\,\mathbf{i}+(A_3B_1-A_1B_3)\,\mathbf{j}+(A_1B_2-A_2B_1)\,\mathbf{k}.$$

と計算できる. 右辺は後で学ぶ行列式を用いると次のように表せます.

$$(A_1\,\mathbf{i}+A_2\,\mathbf{j}+A_3\,\mathbf{k})\times(B_1\,\mathbf{i}+B_2\,\mathbf{j}+B_3\,\mathbf{k})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\A_1&A_2&A_3\\B_1&B_2&B_3\end{vmatrix}.$$

例題 1.3　$\boldsymbol{A}={}^t[1\ 2\ 1],\boldsymbol{B}={}^t[2\ \ -1\ \ -2]$ のとき, $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ を求めよ.

解 $$\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&2&1\\2&-1&-2\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}2&1\\-1&-2\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}1&1\\2&-2\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-3\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j}+-5\,\mathbf{k}={}^t[-3\ 4\ \ -5]$$

問 1.4　$\boldsymbol{A}=2\,\mathbf{i}-3\,\mathbf{j}-\ \mathbf{k}$, $\boldsymbol{B}=\ \mathbf{i}+4\,\mathbf{j}-2\,\mathbf{k}$ とするとき, 次のベクトルを求めよ.

(1) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$

(2) $(2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B})$

問 1.5　$\boldsymbol{A}=\ \mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+\ \mathbf{k},\boldsymbol{B}=2\,\mathbf{i}-\ \mathbf{j}-2\,\mathbf{k}$ とする.

(1) これらを隣接する 2 辺とみなしたときの平行四辺形の面積を求めよ.

(2) これらに直交する零ベクトル以外のベクトルを求めよ．

問 1.6　次の式を証明せよ．

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|^2 = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^2$$

1.4　方向余弦

$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ とする．$\boldsymbol{A}$ の方向と x 軸，y 軸，z 軸の正の方向となす角をそれぞれ α, β, γ とする．このとき，

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$$

を $\boldsymbol{A}$ の**方向余弦**という．

$\boldsymbol{A} = A_1\,\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j} + A_3\,\mathbf{k}$ のとき，

$$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|(\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k})$$

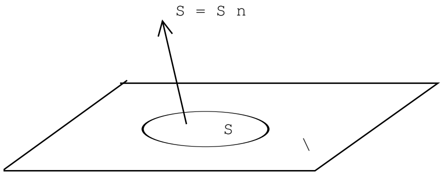
と表せる．

問 1.7　点 A の位置ベクトルは，x 軸と $\pi/4$，y 軸と $\pi/3$, z 軸と $\pi/6$ の角をなし，その大きさは 6 である．A の座標を求めよ．

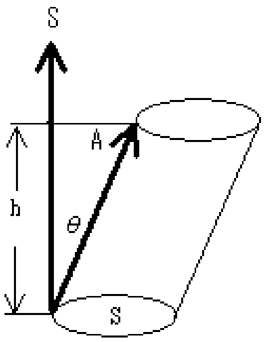
1.5　内積・外積の応用

1.5.1　面積ベクトル

平面 π の片側をその**表**と指定し，表の反対側を**裏**とすれば，この平面 π に表と裏を指定することができる．このように，表裏が指定された平面を**有向平面**といいます．有向平面の向きを表示するのに，有向平面 π 上に図形を考え，この図形を左肩に見るように図形のふちを回るとき，この平面に垂直であって，右ねじの進む方向が有向平面の裏から表を表します．また，この平面に垂直かつ右ねじの進む方向で大きさ 1 のベクトルを**単位法線ベクトル (normalized normal vector)** または，**単位法ベクトル**といい，$\mathbf{n}$ で表します．



この有向平面 π 上の図形の面積を S とするとき，ベクトル $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$ をこの図形の**面積ベクトル**といいます．$|\mathbf{S}| = |S\mathbf{n}| = S|\mathbf{n}| = S$ より，面積ベクトルの大きさはこの図形の面積を表し，$\mathbf{S}$ の向きはこの図形の空間における傾きを表します．



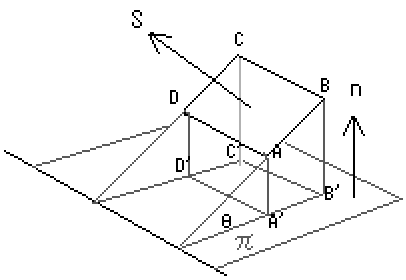
上の図のように，面積ベクトル $\mathbf{S}$ をもつ平面図形を底面とし，ベクトル $\boldsymbol{A}$ に平行な母線をもつ柱体の体積を V とします．このとき，$\boldsymbol{A}$ と $\mathbf{S}$ のなす角は鋭角であるとします．すると，この柱体の高さ h は

$$h = |\boldsymbol{A}|\cos\theta$$

で表されるので，

$$V = h|\mathbf{S}| = |bfA||\mathbf{S}|\cos\theta = \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{S}$$

となります．このとき，$\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{S}$ をこの柱体の**有向体積**といいます．



上の図のように，面積ベクトル $\mathbf{S}$ をもつ長方形 ABCD と有向平面 π を考えます．このとき，長方形 ABCD を有向平面 π 上に正射影した像を A'B'C'D' とします．長方形 ABCD と有向平面 π のなす角が θ のとき，長方形 A'B'C'D' の面積を求めてみましょう．まず，面積ベクトル $\mathbf{S}$ と有向平面 π の法線ベクトル $\mathbf{n}$ のなす角は θ であることに気づいて下さい．すると，長方形 A'B'C'D' の面積 S' は $\overline{\mathrm{A'B'}}\ \overline{\mathrm{B'C'}}$．また，$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$，$\overline{\mathrm{B'C'}} = \overline{\mathrm{BC}}$．したがって，

$$S' = \overline{\mathrm{AB}}\ \overline{\mathrm{BC}}\cos\theta = |\mathbf{S}|\cos\theta = |\mathbf{S}||\mathbf{n}|\cos\theta = \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$$

この議論を一般化して，面積ベクトルが $\mathbf{S}$ である平面図形と有向平面 π があるとき，この平面図形を平面 π 上に正射影して得られる図形の面積 S' は

$$S' = \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$$

で与えられる．このとき，$\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$ をこの平面の有向平面 π 上への正射影の**有向面積**という．

1.5.2　スカラー3重積

$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ を**スカラー3重積**といい，

$$(A_1\,\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j} + A_3\,\mathbf{k})\cdot(B_1\,\mathbf{i} + B_2\,\mathbf{j} + B_3\,\mathbf{k}\times C_1\,\mathbf{i} + C_2\,\mathbf{j} + C_3\,\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

で求めることができます．

ベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ が同一平面上に乗るとき $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ は**共面である**または**1次従属**であるといいます．また，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ が同一平面上にならないならば，**共面でない**または**1次独立**であるといいます．

スカラー3重積の絶対値は，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ で作る平行六面体の体積と考えることができます．そこで，ベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ が共面か共面でないかを調べるとき, スカラー三重積を使うと簡単に調べられます．つまり

定理 1.2 ベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ が共面になるための必要十分条件は, スカラー三重積 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = 0$ である．

例題 1.4 $\boldsymbol{A} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}, \boldsymbol{B} = 2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \boldsymbol{C} = -\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$ は共面でないことを示せ．

解 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$．よって共面でない．

問 1.8　$\mathbf{i} + \mathbf{j},\ -\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k},\ 2\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{k}$ は共面か共面でないか調べよ．

1.5.3　ベクトル 3 重積

3 つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ の積 $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ を**ベクトル 3 重積**といい，次の公式が成り立ちます．

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

例題 1.5　上の公式を証明しよう．

解 $\boldsymbol{A} = A_1\,\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j} + A_3\,\mathbf{k},\ \boldsymbol{B} = B_1\,\mathbf{i} + B_2\,\mathbf{j} + B_3\,\mathbf{k},\ \boldsymbol{C} = C_1\,\mathbf{i} + C_2\,\mathbf{j} + C_3\,\mathbf{k}$ とすると，

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = (B_2C_3 - B_3C_2)\,\mathbf{i} - (B_1C_3 - B_3C_1)\,\mathbf{j} + (B_1C_2 - B_2C_1)\,\mathbf{k}$$

より，$\mathbf{V} = \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ の第 1 成分 V_1 は

$$\begin{aligned} V_1 &= A_2(B_1C_2 - B_2C_1) + A_3(B_1C_3 - B_3C_1) \\ &= B_1(A_2C_2 + A_3C_3) - C_1(A_2B_2 + A_3B_3) \\ &= B_1(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - C_1(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) \\ &= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})B_1 - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})C_1 \end{aligned}$$

同様に，V_2, V_3 を求めると，

$$V_2 = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})B_2 - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})C_2,\ V_3 = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})B_3 - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})C_3$$

したがって，

$$\mathbf{V} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{C}$$

問 1.9　$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \cdot \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{d} \\ \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$ を証明せよ．

問 1.10　$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|^2 = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^2$ を証明せよ．

第 2 章

ベクトルの微分・積分

実数 R の部分集合 D に属する各点 t に対して，実関数 $x(t), y(t), z(t)$ が与えられるとき，1 つのベクトル $(x(t), y(t), z(t))$ を考えることができます．このベクトル $\boldsymbol{F}(t)$ を D から R^3 への 1 変数**ベクトル値関数** **(vector-valued function)** または **ベクトル関数 (vector function)** といい，

$$\boldsymbol{F}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

または

$$\boldsymbol{F}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

で表わします.

しばしば $\boldsymbol{F}(t)$ は幾何学的に実軸 t から原点と点 $(x(t), y(t), z(t))$ を結ぶベクトルへの写像として扱われます.

例題 2.1 $\boldsymbol{F}(t) = t\cos t\,\mathbf{i} + t\sin t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$ のとき， $\boldsymbol{F}(t)$ の軌跡を求めてみましょう.

解 $\boldsymbol{F}(t)$ の成分は $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t^2$ であるから， $z = x^2 + y^2$ となり，$\boldsymbol{F}(t)$ の軌跡 $(x(t), y(t), z(t))$ は放物面 $z = x^2 + y^2$ 上にあることが分かります.

定義 2.1 ベクトル関数 $\boldsymbol{F}(t)$ において， $t \to t_0$ のとき， $\boldsymbol{F}(t) \to \mathbf{L}$ ならば， $\boldsymbol{F}(t)$ の極限値は $\mathbf{L}$ であるといい，次のように表わす.

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{F}(t) = \mathbf{L}$$

極限値の定義は 1 変数関数のときと同じなので，たぶん連続性の定義も 1 変数関数のときと同じになると期待するでしょう．実際そのとうりです.

定義 2.2 $\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{F}(t_0)$ が成り立つとき，ベクトル関数 $\boldsymbol{F}(t)$ は $t = t_0$ で連続であるという．また，区間 $[a, b]$ のすべての t で連続なとき， $\boldsymbol{F}(t)$ は区間 $[a, b]$ で連続であるといい， $\boldsymbol{F}(t) \in C[a, b]$ と表わす.

このように 1 変数関数における様々な定義はベクトル関数へと継承されます.

定義 2.3 ベクトル関数 $\boldsymbol{F}(t)$ は $t = t_0$ において,

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{F}(t) - \boldsymbol{F}(t_0)}{t - t_0} = \boldsymbol{A}$$

が存在するとき $t = t_0$ で**微分可能 (differentiable)** であるという．また，この極限値 $\boldsymbol{A}$ を点 t_0 における微分係数といい， $\boldsymbol{F}'(t_0)$ で表わす.

次の節で学びますがベクトル $\boldsymbol{F}'(t_0)$ の方向は， $\boldsymbol{F}(t)$ によって描かれる曲線の $t = t_0$ での接線方向になります.

ベクトルの和やスカラー倍がそれぞれの対応する成分の和やスカラー倍で定義されたように，ベクトル関数の極限値，微分係数，不定積分の計算は，ベクトル関数の成分の極限値，微分係数，不定積分より求めることができます.

定理 2.1 $\boldsymbol{F}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ とすると，次のことが成り立つ.

(a) $\displaystyle\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{F}(t) = \lim_{t \to t_0} x(t)\,\mathbf{i} + \lim_{t \to t_0} y(t)\,\mathbf{j} + \lim_{t \to t_0} z(t)\,\mathbf{k}$

(b) $\boldsymbol{F}(t)$ は連続 $\Leftrightarrow x(t), y(t), z(t)$ が共に連続

(c) $\boldsymbol{F} \in C'[a,b] \Rightarrow \boldsymbol{F}'(t_0) = x'(t_0)\,\mathbf{i} + y'(t_0)\,\mathbf{j} + z'(t_0)\,\mathbf{k}$

(d) $\displaystyle\boldsymbol{F} \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b \boldsymbol{F}(t)dt = \int_a^b x(t)dt\,\mathbf{i} + \int_a^b y(t)dt\,\mathbf{j} + \int_a^b z(t)dt\,\mathbf{k}$

証明 (a)

$$|\boldsymbol{F}(t) - \mathbf{L}| = \sqrt{(x(t) - l_1)^2 + (y(t) - l_2)^2 + (z(t) - l_3)^2}$$

より， $x(t) \to l_1, y(t) \to l_2, z(t) \to l_3$ ならば， $\boldsymbol{F}(t) \to \mathbf{L}$．また， $\boldsymbol{F}(t) \to \mathbf{L}$ ならば,

$$\sqrt{(x(t) - l_1)^2 + (y(t) - l_2)^2 + (z(t) - l_3)^2} \to 0$$

ここで，平方根の中はすべて 2 乗の和であることに注意すると

$$(x(t) - l_1)^2 \to 0, (y(t) - l_2)^2 \to 0, (z(t) - l_3)^2 \to 0$$

となる．よって $x(t) \to l_1, y(t) \to l_2, z(t) \to l_3$ より,

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{F}(t) = \lim_{t \to t_0} x(t)\,\mathbf{i} + \lim_{t \to t_0} y(t)\,\mathbf{j} + \lim_{t \to t_0} z(t)\,\mathbf{k}$$

(b)，(c)，(d) の証明は演習問題にまわします.

例題 2.2 $\boldsymbol{F}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$ のとき， $\boldsymbol{F}'(t)$ を求めてみましょう.

解 それぞれの成分を微分することにより

$$\boldsymbol{F}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}$$

$\boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{G}(t)$ が t について微分可能なベクトル関数ならば，次のことが成り立ちます.

(1)　$(\boldsymbol{F}(t) \pm \boldsymbol{G}(t))' = \boldsymbol{F}'(t) \pm \boldsymbol{G}'(t)$

(2)　$(c\boldsymbol{F}(t))' = c\boldsymbol{F}'(t)$

(3)　$(\boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{G}(t))' = \boldsymbol{F}'(t) \cdot \boldsymbol{G}(t) + \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{G}'(t)$

(4)　$(\boldsymbol{F}(t) \times \boldsymbol{G}(t))' = \boldsymbol{F}'(t) \times \boldsymbol{G}(t) + \boldsymbol{F}(t) \times \boldsymbol{G}'(t)$

例題 2.3 $\boldsymbol{F} = 5t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} - t^2\,\mathbf{k},\ \boldsymbol{G} = \sin t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}$ のとき，次のものを求めよ．(1) $(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})'$ (2) $(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})'$

解 $F' = (5t^2)'\,\mathbf{i} + (t)'\,\mathbf{j} + -(t^2)'\,\mathbf{k} = 10t\,\mathbf{i} +\ \mathbf{j} - 2t\,\mathbf{k},\ G' = (\sin t)'\,\mathbf{i} - (\cos t)'\,\mathbf{j} = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}.$

(1)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})' &= \boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}' \\ &= (10t\,\mathbf{i} +\ \mathbf{j} - 2t\,\mathbf{k})\cdot(\sin t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}) + (5t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} - t^2\,\mathbf{k})\cdot(\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}) \\ &= (5t^2 - 1)\cos t + 11\sin t\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})' &= \boldsymbol{F}'\times\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}' \\ &= (10t\,\mathbf{i} +\ \mathbf{j} - 2t\,\mathbf{k})\times(\sin t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}) + (5t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} - t^2\,\mathbf{k})\times(\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}) \\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 10t & 1 & -2t\\ \sin t & \cos t & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 5t^2 & t & -t^2\\ \cos t & \sin t & 0\end{vmatrix} \\ &= (t^2\sin t - 2t\cos t)\,\mathbf{i} - (t^2\cos t + 2t\sin t)\,\mathbf{j} + (5t^2\sin t - \sin t - 11t\cos t)\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

例題 2.4 ベクトル関数 $\boldsymbol{F}(t)$ の大きさ $|\boldsymbol{F}(t)|$ が定数のとき， $\boldsymbol{F}(t)$ と $\boldsymbol{F}'(t)$ は全ての t において直交することを示してみましょう．

解 $|\boldsymbol{F}(t)| = c$ より， $|\boldsymbol{F}(t)|^2 = \boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{F}(t) = c^2$. よってベクトル関数の微分法より

$$(\boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{F}(t))' = 2\boldsymbol{F}'(t)\cdot\boldsymbol{F}(t) = 0$$

したがって，内積が 0 より $\boldsymbol{F}(t)$ と $\boldsymbol{F}'(t)$ は直交します．

任意のベクトル関数 $F(t), G(T)$ と α 定数，$\boldsymbol{C}$ 定ベクトルについて次のことが成り立ちます．

(1) $\int(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})\,dt = \int\boldsymbol{F}\,dt + \int\boldsymbol{G}\,dt$
(2) $\int\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}\,dt = \boldsymbol{C}\int\boldsymbol{F}\,dt$
(3) $\int\alpha\frac{d\boldsymbol{F}}{dt}\,dt = \alpha\boldsymbol{F} - \int\frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{F}\,dt$
(4) $\int\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}\,dt = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G} - \int\frac{d\boldsymbol{F}}{dt}\cdot\boldsymbol{G}\,dt$
(5) $\int\boldsymbol{F}\times\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}\,dt = \boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G} - \int\frac{d\boldsymbol{F}}{dt}\times\boldsymbol{G}\,dt$

例題 2.5 任意のベクトル関数 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t)$ に関して，$\int\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}'\,dt = \frac{1}{2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}$ を証明せよ．

解 $\int\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}'\,dt = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F} - \int\boldsymbol{F}'\cdot\boldsymbol{F}\,dt$. したがって，$\int\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}'\,dt = \frac{1}{2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}$.

問 2.1 $\int_2^3\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{F}}{dt}\,dt$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{F}(2) = 2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k},\ \boldsymbol{F}(3) = 4\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$

2.1 曲線 (space curves)

空間の点 P (x, y, z) の描く空間曲線 (**ホドグラフ**) は

$$C = \{(x, y, z) : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [a, b]\}$$

で与えられますが，これは原点を O とする点 P の位置ベクトル $\mathbf{r} = \vec{\mathrm{OP}} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ が t のベクトル関数として

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

のように与えられるのと同じことです．

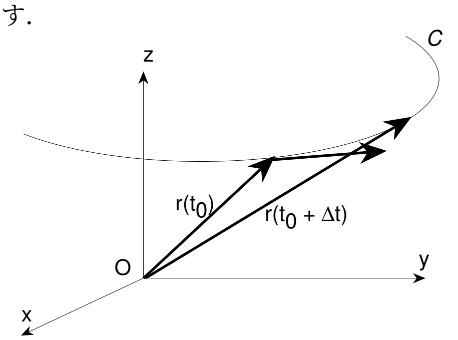


図 2.1　接線ベクトル

次に，ベクトル関数 $\mathbf{r}(t)$ の導関数 $\mathbf{r}'(t)$ は幾何学的に何を表しているのか考えてみましょう．

ベクトル関数 $\mathbf{r}(t)$ の導関数 $\mathbf{r}'(t)$ は $\mathbf{r}'(t)$ の定義より

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

ここで， $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ は $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ ならば，たとえ Δt が 0 に近づいても $\mathbf{0}$ にならず，接線の方向ベクトルに近づいていくことが分かります．よってこの極限値

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

を接線の方向ベクトルとして用いることができないでしょうか．残念ながら，この極限値を接線の方向ベクトルとして使うことはできません．なぜなら，この極限値は $\mathbf{0}$ となり， $\mathbf{0}$ には方向がありません．

そこで，これを回避するために Δt が小さいときに，大きな長さを得られるような次のベクトルを考えます．

$$\frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

このベクトルは Δt が 0 でないとき $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ と平行です．つまり，このベクトルは接線の方向ベクトルと平行です．よってこの極限値 $\mathbf{r}'(t)$ が存在するとき，この極限値を接線の方向ベクトルと考えることができるので， $\mathbf{r}'(t)$ を曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ の **接線ベクトル (tangent vector)** といいます．また

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

を **接線単位ベクトル (unit tangent vector)** といいます．単位接ベクトルともいいます．

ここで $|\mathbf{t}(t)| = 1$ に注意すると，例題 2.4 より $\mathbf{t}'(t)$ と $\mathbf{t}(t)$ は直交します．そこで $\mathbf{t}'(t)$ を曲線 $\mathbf{r}(t)$ の **法線ベクトル (normal vector)** といいます．また， $\mathbf{t}'(t) \neq 0$ のとき，

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{t}'(t)}{|\mathbf{t}'(t)|}$$

を **主法線単位ベクトル (principal unit normal vector)** といいます．単位法ベクトルともいいます．

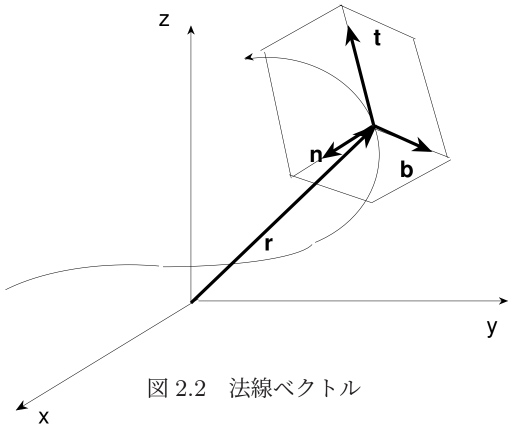


図 2.2　法線ベクトル

例題 2.6 2 点 $(-1,0,2),(1,4,3)$ を通る直線の方程式を求めてみましょう．

解 求める直線は始点を $(-1,0,2)$ にもち，方向が ${}^t[1,4,3] - {}^t[-1,0,2] = {}^t[2,4,1]$ と考えられるので，直線上の任意の点を (x,y,z) とすると，

$$(x,y,z) = (-1,0,2) + (2,4,1)t, \quad t \in R$$

またはこの式を t について解くと

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{1}$$

が得られます．

例題 2.7 平面曲線 $\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ を描いてみましょう．

解 $x(t) = \sin t, y(t) = \sin(t)$ より $x = y$．ここで注意しなければならないのは， $\sin t$ のとる値は -1 から 1 なので，求める曲線は $y = x,\ -1 \leq x \leq 1$ となります．

例題 2.8 曲線 $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ の $t = \dfrac{\pi}{4}$ における接線の方程式を求めてみましょう．

解 接線ベクトルは

$$\mathbf{r}'(\frac{\pi}{4}) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}\,|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}$$

で与えられます．よって接線の方程式は

$$(x,y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)t + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

または

$$t = \frac{x - \sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = \frac{y - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}$$

となります.

曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ が $\mathbf{r}'(t) \neq 0, \mathbf{r}'(t) \in C[a,b]$ のとき，曲線 $\mathbf{r}$ を **滑らかな曲線 (smooth curve)** といいます．滑らかな曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ の $a \leq t \leq b$ の部分の長さを **弧長 (arc length)** といい， s で表わします．では，弧長 s はどうやったら求まるか考えてみましょう．

区間 $[a,b]$ 内の微小区間 $[t, t+\Delta t]$ に対応する曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ の弧 PQ の長さは線分 PQ で近似されると考えられます．このとき，

$$\mathrm{PQ} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta z}{\Delta t})^2}\ \Delta t$$

したがって曲線の長さ s は定積分

$$\begin{aligned} s &= \lim \sum \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta z}{\Delta t})^2}\ \Delta t \\ &= \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2} dt \\ &= \int_a^b |\frac{d\mathbf{r}}{dt}| dt \end{aligned}$$

で表されます．なお $\mathbf{r}(a)$ から $\mathbf{r}(t)$ までの弧長 $s(t)$ は

$$s(t) = \int_a^t |\frac{d\mathbf{r}}{dt}| dt$$

で与えられます．よって

$$\frac{ds}{dt} = |\frac{d\mathbf{r}}{dt}|$$

となります.

定理 2.2 曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ が滑らかな曲線のとき， $\mathbf{r}(a)$ から $\mathbf{r}(t)$ までの弧長 $s(t)$ は

$$s(t) = \int_a^t |\frac{d\mathbf{r}}{dt}| dt$$

となる.

ここで気づいたと思いますが， t を時間と考えると， $|\frac{d\mathbf{r}}{dt}|$ は微小時間内での位置の変化と考えられるので，点 P の動く速さを表わします．よって，曲線の長さ $s(t)$ は点 P が時間 t 内に動いた距離と考えることができます.

例題 2.9 $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ の $0 \leq t \leq 2\pi$ の部分の長さを求めてみましょう.

解 $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ より， $x^2 + y^2 = 1$ となり， $\mathbf{r}(t)$ は半径 1 の円柱の回りをらせん状に回転する滑らかな曲線だということが分かります．そこで

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

より

$$|\frac{d\mathbf{r}}{dt}| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

よって

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi$$

となります.

例題 2.10 弧長 s をパラメターとして曲線 $\mathbf{r}(t) = 5\cos t\mathbf{i} + 5\sin t\,\mathbf{j}$ を表わしてみましょう.

解 曲線 $\mathbf{r}(t) = 5\cos t\,\mathbf{i} + 5\sin t\,\mathbf{j}$ より

$$|\frac{d\mathbf{r}}{dt}| = | - 5\sin t\,\mathbf{i} + 5\cos t\,\mathbf{j}| = 5$$

よって

$$s = \int_0^t 5dt = 5t$$

または，$|\mathbf{r}(t)|^2 = x^2 + y^2 = 25$ より曲線 $\mathbf{r}(t)$ は原点を中心とする半径 5 の円です．よって弧長 s は $s = 5t$. これより

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(t(s)) = 5\cos\frac{s}{5}\,\mathbf{i} + 5\sin\frac{s}{5}\,\mathbf{j}$$

となります.

曲線 C が弧長 s をパラメターとして $\mathbf{r}(s)$ で表されているとき，接線ベクトルを求めると

$$\frac{\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s} = \frac{\text{弦の長さ}}{\text{弧の長さ}} \longrightarrow 1$$

よって，接線単位ベクトル $\mathbf{t}$ は

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

でも表わせます.

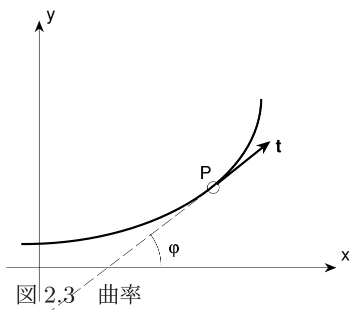


図 2,3　曲率

ここで曲線の曲がり具合について考えてみましょう．まず平面上の曲線について考えてみましょう．曲線上の点 P での接線 l と x 軸とが作る角度を ϕ とします．点 P が動くに従って接線 l と ϕ は変化します．このとき，単位弧長あたりの ϕ の変化率を **曲率 (curvature)** といい

$$\kappa = |\frac{d\phi}{ds}|$$

で表わします.

ここで接線単位ベクトル $\mathbf{t}$ は $\mathbf{t} = (\cos\phi, \sin\phi)$ で表わすことができます．よって単位弧長あたりの接線ベクトルの変化率を調べると

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = (-\sin\phi\frac{d\phi}{ds}, \cos\phi\frac{d\phi}{ds}) = \frac{d\phi}{ds}(-\sin\phi, \cos\phi)$$

これより

$$|\frac{d\mathbf{t}}{ds}| = |\frac{d\phi}{ds}(-\sin\phi, \cos\phi)| = |\frac{d\phi}{ds}| = \kappa$$

よって曲率 κ は，単位弧長あたりの接線ベクトルの変化率でも表わすことができます．

例題 2.11 曲線 $y = f(x)$ の曲率を求めてみましょう．

解 まず，$|\dfrac{d\phi}{ds}|$ を求めてみましょう．$\tan\phi$ は接線の傾きなので，$\tan\phi = y'(x)$ となります．よって

$$\phi = \tan^{-1}(y')$$

これを x について微分すると

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{1+(y')^2} \cdot \frac{d}{dx}(y') = \frac{y''}{1+(y')^2}$$

ここで，

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{d\phi}{ds}\sqrt{1+(y')^2}$$

に注意すると

$$\frac{d\phi}{ds}\sqrt{1+(y')^2} = \frac{y''}{1+(y')^2}$$

よって

$$\kappa = |\frac{d\phi}{ds}| = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}$$

となります．

空間の曲線の曲率は $\kappa = |\frac{d\mathbf{t}}{ds}|$ を定義として使います．すると，

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}/dt}{ds/dt},\ \mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|} = \frac{d\mathbf{t}/dt}{|d\mathbf{t}/dt|}$$

より

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{n}\frac{|d\mathbf{t}/dt|}{ds/dt} = \mathbf{n}|\frac{d\mathbf{t}}{ds}| = \mathbf{n}\kappa \qquad (2.1)$$

2.2 点の運動 (motion of objects)

曲線

$$C : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in [a, b]$$

は空間を運動している点 P が描いた軌跡と考えることができます．ここで区間 $[a, b]$ は時間の区間と考え，$\mathbf{r}(t)$ を時間 t における物体の位置と考えます．すると運動 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ に対して，$\mathbf{r}'(t)$ は運動の **速度ベクトル**

(velocity)．また，$\mathbf{r}''(t)$ は **加速度ベクトル (acceleration)** となり，それぞれ $\mathbf{v}(t), \boldsymbol{A}(t)$ で表わします．つまり，

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t), \boldsymbol{A}(t) = \mathbf{r}''(t)$$

すでに学んだように，接線単位ベクトルは $\mathbf{t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ で表わせるので，速度ベクトルは

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\mathbf{t}$$

となります．よって，速度ベクトルは点の軌跡に対して接線方向のベクトルです．速度ベクトル $\mathbf{v}$ の大きさ，$\dfrac{ds}{dt}$ は弧の長さの変化率または速さで v で表されます．つまり，

$$v = |\mathbf{v}| = |\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt}$$

次に加速度についてもう少しよく理解するために，速度ベクトルを考えてみましょう．

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{t} = v\mathbf{t}$$

の両辺を微分すると

$$\boldsymbol{A} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v|\frac{d\mathbf{t}}{dt}|\mathbf{n}$$

ここで

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

より

$$|\frac{d\mathbf{t}}{dt}| = |v\frac{d\mathbf{t}}{ds}| = v|\frac{d\mathbf{t}}{ds}| = v\kappa$$

これより

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v^2\kappa\mathbf{n}\\ &= a_{\mathbf{t}} + a_{\mathbf{n}}\end{aligned}$$

これが加速度の接線方向と法線方向への分解です．つまり

$$a_{\mathbf{t}} = (\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{t})\mathbf{t}, a_{\mathbf{n}} = (\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$$

例題 2.12

$$\mathbf{r}(t) = (\cos\pi t, \sin\pi t, t)$$

$t = 1$ のとき $\mathbf{v}(t), \boldsymbol{A}(t), v, \mathbf{t}, \mathbf{n}$ を求めてみましょう．

解

$$\mathbf{r}(t) = (\cos\pi t, \sin\pi t, t)$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (-\pi\sin\pi t, \pi\cos\pi t, 1)$$

$$\boldsymbol{A}(t) = \mathbf{r}''(t) = (-\pi^2\cos\pi t, -\pi^2\sin\pi t, 0)$$

より $t = 1$ のとき

$$\mathbf{v}(1) = (0, \pi, 1)$$
$$\boldsymbol{A}(1) = (\pi^2, 0, 0)$$

となるので

$$v = |\mathbf{v}(1)| = \sqrt{\pi^2 + 1}$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}(1)}{|\mathbf{v}(1)|} = \frac{(0, \pi, 1)}{\sqrt{\pi^2 + 1}}$$

ここで $\mathbf{n}$ を求めるには色々な方法があります．ここでは計算が簡単な方法を考えます．

$$\boldsymbol{A} = a_{\mathbf{t}} + a_{\mathbf{n}}, a_{\mathbf{t}} = (\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} = 0$$

より

$$a_{\mathbf{n}} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_{\mathbf{t}} = (\pi^2, 0, 0)$$

したがって,

$$\mathbf{n} = \frac{a_{\mathbf{n}}}{|a_{\mathbf{n}}|} = (1, 0, 0).$$

　他にも

$$v = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\pi^2 \sin^2 \pi t + \pi^2 \cos^2 \pi t + 1} = \sqrt{\pi^2 + 1}\text{より}$$

$$a_{\mathbf{t}} = \frac{dv}{dt} = 0$$

よって $\mathbf{n} = \dfrac{a_{\mathbf{n}}}{|a_{\mathbf{n}}|} = (1, 0, 0)$ と求めることができます.

　接線単位ベクトル $\mathbf{t}$，主法線ベクトル $\mathbf{n}$ と直交するベクトル

$$\boldsymbol{B} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

を **従法線単位ベクトル (binormal unit vector)** といいます．また,

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = -\tau \mathbf{n}$$

を満たす τ を**ねじれ率 (torsion)** といいます.

　ここで，これまでにでてきた 3 つの単位ベクトル $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \boldsymbol{B}$ について調べてみましょう．図 2.2 参照.

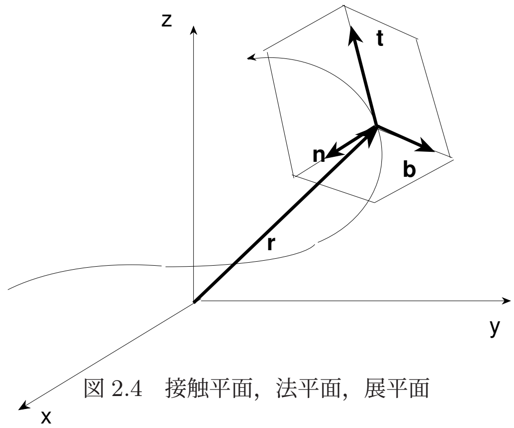


図 2.4　接触平面，法平面，展平面

$\mathbf{t}$ と $\mathbf{n}$ で作る面を接触平面，$\mathbf{n}$ と $\boldsymbol{B}$ で作る面を法平面，$\mathbf{t}$ と $\boldsymbol{B}$ で作る面を展平面といいます．

まず，$\mathbf{t}, \mathbf{n}, \boldsymbol{B}$ は互いに直交するベクトルです．また，これらのベクトルの間には Frenet-Serret (1819-1885) によって示された次の関係が成り立ちます．

定理 2.3 [Frenet-Serret]

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\boldsymbol{B}, \frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = -\tau\mathbf{n}$$

証明 式 2.1 より $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\mathbf{n}$ また，ねじれ率の定義より $\dfrac{d\boldsymbol{B}}{ds} = -\tau\mathbf{n}$．次に．$\mathbf{n} \times \mathbf{t}$ を s で微分すると

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{B}}{ds} \times \mathbf{t} + \boldsymbol{B} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \tau\boldsymbol{B} - \kappa\mathbf{t}$$

例題 2.13 曲線 $\mathbf{r} = 2a(\sin^{-1} t + t\sqrt{1-t^2})\,\mathbf{i} + 2at^2\,\mathbf{j} + 4at\,\mathbf{k}$ について，次のものを求めよう． ただし，a は任意の正の定数とする．

(a) $t_1 \leq t \leq t_2$ に対する弧長

(b) 接線単位ベクトル $\mathbf{t}$

(c) 主法線単位ベクトル $\mathbf{n}$ と 曲率 κ

(d) 従法線単位ベクトル $\boldsymbol{B}$ とねじれ率 τ

解 (a) $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = 4a\sqrt{1-t^2}\,\mathbf{i} + 4at\,\mathbf{j} + 4a\,\mathbf{k}$ より

$$|\frac{d\mathbf{r}}{dt}| = \sqrt{16a^2(1-t^2) + 16a^2t^2 + 16a^2} = \sqrt{32a^2} = 4\sqrt{2}a$$

したがって，

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\frac{d\mathbf{r}}{dt}| dt = 4\sqrt{2}a(t_2 - t_1)$$

(b)

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{4a\sqrt{1-t^2}\,\mathbf{i} + 4at\,\mathbf{j} + 4a\,\mathbf{k}}{4\sqrt{2}a}$$

(c) $\dfrac{d\mathbf{t}}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathbf{i} + \mathbf{j}), \dfrac{ds}{dt} = 4\sqrt{2}a$ より

$$\kappa = |\frac{d\mathbf{t}}{ds}| = |\frac{d\mathbf{t}/dt}{ds/dt}| = \frac{1}{8a}\sqrt{\frac{t^2}{1-t^2} + 1} = \frac{1}{8a\sqrt{1-t^2}}$$

また，$\mathbf{n} = \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ より

$$\mathbf{n} = -t\,\mathbf{i} + \sqrt{1-t^2}\,\mathbf{j}$$

(d)

$$\boldsymbol{B} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sqrt{1-t^2} & t & 1 \\ -t & \sqrt{1-t^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{1-t^2}\,\mathbf{i} - t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

また，

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{B}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{8a}(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathbf{i} - \mathbf{j}) = -\tau\mathbf{n}$$

より $\tau = \dfrac{1}{8a\sqrt{1-t^2}}$

第 3 章

スカラー場・ベクトル場

3.1 勾配と方向微分係数

空間の領域 D の各点 P に対して実数 $\phi(\mathrm{P})$ が対応しているとき，3 変数関数 $\phi(\mathrm{P})$ を D の上での **スカラー場 (scalar field)** といいます．同様に空間の領域 D の各点 P に対してベクトル $\boldsymbol{F}(\mathrm{P})$ が対応しているとき，3 変数ベクトル関数 $\boldsymbol{F}(\mathrm{P})$ を D の上での **ベクトル場 (vector field)** といいます．ベクトル $\boldsymbol{F}$ の成分表示を $\boldsymbol{F} = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$ とすると，

$$\boldsymbol{F}(\mathrm{P}) = F_1(x,y,z)\,\mathbf{i} + F_2(x,y,z)\,\mathbf{j} + F_3(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

となります．また， F_1, F_2, F_3 が連続なとき， $\boldsymbol{F}$ は連続であるといいます．

例題 3.1 ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x,y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ をグラフで表わしてみましょう．

解 xy 平面上の点 (x,y) に対して，ベクトル $(-y,x)$ が対応しているので，グラフを描こうとすると 4 次元の空間が必要になります．残念ながら 4 次元の空間は用意できないので，次のような方法を用いてベクトル場を表現します．まず， xy 平面上の点 (x_0,y_0) を選んだら，その点におけるベクトル $\boldsymbol{F}(x_0,y_0)$ を，点 (x_0,y_0) を始点として描きます．

$$\boldsymbol{F}(1,0) = \mathbf{j},\ \boldsymbol{F}(2,-1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j},\ \boldsymbol{F}(3,2) = -2\,\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

より図 3.1 を得ます．

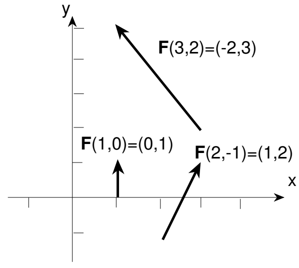


図 3.1　ベクトル場

図 3.1 をみていると，ベクトルがある曲線の接線になっていることに気づきます．この曲線を **流線 (streamlines)** または **力線 (lines of force)** といいます．一般に，$\boldsymbol{F}$が流体の速度を表わすときには，流れに沿って

引いた曲線を流線といい，$\boldsymbol{F}$が磁場を表わすときは，磁場の向きに沿って引いた曲線を磁力線といいます．同様に，$\boldsymbol{F}$が電場を表わすときは，電場の向きに沿って引いた曲線を電力線，$\boldsymbol{F}$が電磁場を表わすときは，電磁場の向きに沿って引いた曲線を電磁力線といいます．

砂場に磁石を持っていって砂鉄を集めてきます．この砂鉄を紙の上に撒き，紙の下に U 磁石を置くと砂鉄は磁力線に沿って並び，磁場が強いところほどたくさんの砂鉄がつくことを観察したことがあるでしょう．ここではこれらの現象を考えてみます．

電場 (electric field)

電荷 q から点 P までの距離を r とし， q から P に向かう単位ベクトルを $\mathbf{r}_0$ とすると，点 P における電場は次式で与えられます．

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{r}_0$$

ただし， $\epsilon_0 = 8.85418782 \times 10^{-12}[\mathrm{s^2C^2/kgm^2}]$ で真空の誘電率といいます．

万有引力場 (universal gravitational field)

原点にある物質量 M の物体が点 P (x, y, z) にある物質量 m の物体にはたらく万有引力場 (一般に万有引力とよばれる) を $\boldsymbol{F}$すると

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\kappa Mm}{r^3}(x, y, z) = -\frac{\kappa Mm}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

で与えられます．

勾配

ここでは空間のある領域で定義されたスカラー場に対し，

$$\nabla f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} + f_z\,\mathbf{k}$$

で定義されるベクトル場 $\mathrm{grad} f$ について考えてみます．ここで ∇f は $f(x, y, z)$ に演算子

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

をほどこしたものとみることができ，これをスカラー場 f の**勾配 (gradient)** といいます．

スカラー場 f に対して， $f(x, y, z) = c$ (c 定数) で定義される曲面を，スカラー場 f の **等位面 (level surface)** といい， c の値を変化させて得られる等位面の群を等位面群といいます．

例題 3.2 点 (x_0, y_0, z_0) を通る勾配は，点 (x_0, y_0, z_0) を通る等位面に直交することを示してみましょう．

解 点 (x_0, y_0, z_0) を通る等位面を

$$f(x, y, z) = c$$

とし，この等位面上で点 (x_0, y_0, z_0) を通る任意の曲線を

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

とすると， $f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t)) = c$ が成り立つので，この両辺を t について微分すると，

$$f_x x_t + f_y y_t + f_z z_t = (f_x, f_y, f_z) \cdot (x_t, y_t, z_t) = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$$

よって，すべての等位面上の曲線の接線に直交するので，勾配は等位面に直交します．

方向微分係数

点 P において 単位ベクトル $\mathbf{u}$ を方向単位ベクトルとします．また，点 P を通り $\mathbf{u}$ を方向ベクトルとする直線を，点 P からの距離 s を用いて， $\mathbf{r}(s)$ で表わします．すると点 P における，スカラー場 f の $\mathbf{u}$ 方向の方向微分係数は

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}(s))}{\partial u} = \lim_{s \to 0} \frac{f(p + s\mathbf{u}) - f(p)}{s}$$

で与えられます．よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\mathbf{r}(s))}{\partial u} &= \lim_{s \to 0} \frac{f(p + s\mathbf{u}) - f(p)}{s} = \frac{d}{ds} f(x(s), y(s), z(s)) \mid_{s=0} \\ &= f_x x_s + f_y y_s + f_z z_s = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla f \cdot \mathbf{u}\end{aligned}$$

例題 3.3 点 $(1, 2, 3)$ で曲面 $z^2 = x^2 + 2y^2$ に直交する単位ベクトル (法線単位ベクトル) と $(1, 3, -1)$ 方向の方向微分係数と棲平面の方程式を求めてみましょう．

解

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 \text{とおくと,}$$

等位面 $f(x, y, z) = 0$ はもとの曲面と同じ．また，法線ベクトルは ∇f で与えられるので，

$$\nabla f = (2x, 4y, -2z), \nabla f \mid_{(1,2,3)} = (2, 8, -6)$$

よって

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{(2, 8, -6)}{\sqrt{4 + 64 + 36}} = \frac{(2, 8, -6)}{\sqrt{104}}$$

次に点 $(1, 2, 3)$ での $(1, 3, -1)$ 方向の方向微分係数を求めるため方向単位ベクトルを求めると $\mathbf{u} = \dfrac{(1, 3, -1)}{\sqrt{11}}$．よって方向微分係数は

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \nabla f \cdot \mathbf{u} = (2, 8, -6) \cdot \frac{(1, 3, -1)}{\sqrt{11}} = \frac{32}{\sqrt{11}}$$

また，棲平面の方程式は

$$2(x - 1) + 8(y - 2) - 6(z - 3) = 0 \text{ すなわち } 2x + 8y - 6z = 0$$

となります．

例題 3.4 ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ の流線を求めてみましょう．

解 $f(x, y) = c$ を流線の方程式とすると $\nabla f(x, y) = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j}$ は $f(x, y) = c$ の法線ベクトルを表わすので，

$$\nabla f(x, y) \cdot \boldsymbol{F}(x, y) = 0 \text{ よって } (f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j}) \cdot (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) = 0$$

これより， $-yf_x + xf_y = 0$．ここで $f(x, y) = c$ の接線の傾きは

$$f_x dx + f_y dy = 0 \text{ より} \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

に注意すると

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{x}{y}$$

より $xdx + ydy = 0$．これより $f_x = x, f_y = y$ となるので，

$$f(x,y) = \int f_x dx = \frac{x^2}{2} + c(y) \tag{3.1}$$

次に式 3.1 を y で偏微分すると

$$f_y = c'(y) = y \text{ より } c(y) = \frac{y^2}{2}$$

よって求める流線は

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

ポテンシャル点 P の位置ベクトルを $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とすると，万有引力の大きさや光の強さなど距離に反比例するものは少なくありません．これらは

$$f(x,y,z) = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

とおけます．ここで $f(x,y,z)$ の勾配を求めてみると，

$$\begin{aligned}
f_x &= c\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} = -c\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(2x) = \frac{-cx}{|\mathbf{r}|^3}\\
f_y &= \frac{-cy}{|\mathbf{r}|^3}\\
f_z &= \frac{-cz}{|\mathbf{r}|^3}
\end{aligned}$$

より

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (\frac{-cx}{r^3}, \frac{-cy}{r^3}, \frac{-cz}{r^3}) = -c\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

したがって，∇f は万有引力場つまりベクトル場と等しくなります．このように

定義 3.1 ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ がスカラー場 f の勾配であるとき，つまり $\boldsymbol{F} = -\nabla f$ のとき ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を **保存場 (conservative field)** という．また，このときスカラー場 f を ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の **スカラーポテンシャル (scalar potential)** といい，$\boldsymbol{F}$はスカラーポテンシャル f をもつという．

例題 3.5 点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ の位置ベクトルを $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$，ベクトル場を $\boldsymbol{F} = -\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ とすると，このベクトル場は原点を除くどの領域でも保存場であり

$$f(x,y,z) = |\mathbf{r}| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

は $\boldsymbol{F}$ のスカラーポテンシャルであることを示してみましょう．

解

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{|\mathbf{r}|}\\
f_y &= \frac{y}{|\mathbf{r}|}\\
f_z &= \frac{z}{|\mathbf{r}|}
\end{aligned}$$

より $-\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = \boldsymbol{F}$．よって，$\boldsymbol{F}$ は保存場であり

$$f(x, y, z) = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

は $\boldsymbol{F}$ のスカラーポテンシャルとなります．

例題 3.6　ベクトル場 $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ とスカラー場 $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ について，次の式を証明せよ．

$$(1)\ \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} \qquad\qquad (2)\ \nabla r^n = n r^{n-2}\mathbf{r}$$

解 (1)

$$\nabla r = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}\right)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\nabla r^n &= \frac{\partial}{\partial x}(r^n)\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(r^n)\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(r^n)\,\mathbf{k} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(r^n)\frac{\partial r}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial r}(r^n)\frac{\partial r}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial r}(r^n)\frac{\partial r}{\partial x}\,\mathbf{k} \\
&= n r^{n-1}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k}\right) = n r^{n-1}\nabla r = n r^{n-1}\frac{\mathbf{r}}{r} = n r^{n-2}\mathbf{r}
\end{aligned}$$

演習問題 3.2

1. スカラー場 $\phi = x^2z + e^{y/x}$, $\psi = 2z^2y - xy^2$ について，次のものを求めよ．

(1) $\nabla\phi$, $\nabla\psi$

(2) $\nabla(\phi\psi)$ の点 $\mathrm{P}(1, 0, -2)$ における値 $\nabla(\phi\psi)_P$

2. スカラー場 $\phi = 4xz^3 - 3x^2yz$ の点 $\mathrm{P}(2, -1, 2)$ における，単位ベクトル $\mathbf{u} = \frac{1}{7}(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ の方向への方向微分係数を求めよ．

3. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$ とする．次の A, B を求めよ．

(1) $\boldsymbol{A} = \nabla\left(2r^2 - 4\sqrt{r} + \frac{6}{3\sqrt{r}}\right)$,　　**(2)** $\boldsymbol{B} = \nabla(r^2e^{-r})$

4. 曲面 $x^2y + 2xz = 4$ 上の点 $\mathrm{P}(2, -2, 3)$ における法線単位ベクトル $x\mathbf{n}$ を求めよ．

5. 任意のスカラー場 ϕ, ψ について次の式を証明せよ．

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi}{\phi^2}$$

6. 2点 $\mathbf{P}(x, y, z)$, $\mathbf{Q}(\xi, \eta, \zeta)$ 間の距離を r とする．微分演算子

$$\nabla_P = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},\ \nabla_Q = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial \eta} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

について次の式を証明せよ．

(1) $\nabla_Q r = -\nabla_P r$　　(2) $\nabla_Q(\frac{1}{r}) = -\nabla_P(\frac{1}{r})$

3.2　線積分

2 点 R，Q を結ぶ曲線 C が与えられているとします． ただし，この曲線は滑らかな曲線とします．C に沿って測った弧長を s とします．すると 2 章で学んだように曲線上の点 (x,y,z) は弧長 s をパラメターとして表わすことができます．よって曲線 C の方程式は

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}$$

で表わせます．ただし $s = a, b$ $(a < b)$ にはそれぞれ点 R，Q が対応しているとします．このとき曲線 $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ 上の任意の点 P (x,y,z) に対して定義されたスカラー場を $f(\mathrm{P}) = f(x,y,z)$ とします．

曲線 C を n 個の弧 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ に分割し，この分割を Δ で表します．各曲線 s_i の弧長を Δs_i とし， s_i の中に任意の点 P_i をとり次の和を考えます．

$$J(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{P}_i)\Delta s_i$$

ここで，この分割を細かくし Δ を限りなく小さくしたとき $J(\Delta)$ が極限値 J に近づくならば，この極限値 J をスカラー場 f の C に沿っての **線積分 (line integral)** といい，

$$\int_C f(\mathrm{P})ds$$

で表わします．曲線 C が閉じているときは

$$\oint_C f(\mathrm{P})ds$$

と表わします．

線積分の定義は，今までの積分と同じ Riemann 和によるものなので，線積分においても次の公式が成り立つのは明らかです．

1. $\int_C kf(\mathrm{P})ds = k\int_C f(\mathrm{P})ds$
2. $\int_C [f(\mathrm{P}) + g(\mathrm{P})]ds = \int_C f(\mathrm{P})ds + \int_C g(\mathrm{P})ds$

また，曲線 C が滑らかではないが有限個の滑らかな曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ をつなげてできているとき，この曲線を **区分的に滑らかな曲線 (piecewise smooth curve)** といい，このような曲線に沿っての線積分は

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n}$$

で表わせます．

例題 3.7 $\displaystyle\int_C (x^3 + y^4)ds$ を線積分してみましょう．ただし， C は点 $(0,0,0)$ と $(1,1,1)$ を結ぶ直線とします．

解 点 $(0,0,0)$ と点 $(1,1,1)$ を結ぶ直線をパラメター表示すると

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

となります．よって曲線 C は $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ で表され，曲線 C の弧長 s は

$$s(t) = \int_0^t \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt = \int_0^t |\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}| dt = \sqrt{3}t$$

となります．これより $ds = \sqrt{3}dt$ となり，求める線積分は

$$\int_C (x^3 + y^4) ds = \int_0^1 (t^3 + t^4)\sqrt{3}dt = \sqrt{3}(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) = \frac{9\sqrt{3}}{20}$$

ベクトル場の線積分

次に向きのついた曲線 $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ と C の上で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{F} = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$ が与えられているとします．ここで C の接線単位ベクトル $\mathbf{t}$ を曲線 C の正の方向 (長さが増加する方向) での接線単位ベクトルとします．すると $\boldsymbol{F} \cdot \mathbf{t}$ は C 上で定義されたスカラー場となるので，このスカラー場の曲線 C に沿っての線積分は

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{t} ds$$

で表わせ，これをベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の向きのついた曲線 C に沿っての線積分といいます．特に

$$\mathbf{t} ds = \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = d\mathbf{r}$$

に注意すると

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{t} ds = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r}$$

で表わすことができます．

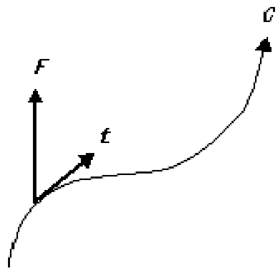


図 3.2　ベクトル場の線積分

ここでベクトル場$\boldsymbol{F}$が電場の場合を考えると，$\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{S}} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r}$ は正の電荷が点 P から点 S まで曲線 C にそって移動するとき，電場$\boldsymbol{F}$が行なう単位電荷あたりの仕事と考えることができ，これを 2 点間の電位差または電圧といいます．

例題 3.8 質点が楕円 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ の回りを一周するのに行なった仕事量を求めてみましょう．ただし，ベクトル場は

$$\boldsymbol{F} = (3x - 4y + 2z)\,\mathbf{i} + (4x + 2y - 3z^2)\,\mathbf{j} + (2xz - 4y^2 + z^3)\,\mathbf{k}$$

解 $x = 4\cos t, y = 3\sin t$ とおくと．

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j},\ d\mathbf{r}(t) = (-4\sin t\,\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j})dt$$

また,

$$\boldsymbol{F} = (12\cos t - 12\sin t)\,\mathbf{i} + (16\cos t + 6\sin t)\,\mathbf{j} - 36\sin^2 t\,\mathbf{k}$$

よって

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [48 - 30\sin t\cos t]dt = 96\pi$$

例題 3.9 $\displaystyle\int_C (x^2y\mathbf{i} + (x+y)\,\mathbf{j})\cdot\mathbf{t}ds$ を求めてみましょう．ただし， C は曲線 $y = x^2$ の点 $(0,0)$ と点 $(2,4)$ を結ぶ曲線とします.

解

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{t}ds &= \int_C \boldsymbol{F}\cdot d\mathbf{r}\\ &= \int_C (x^2y\mathbf{i} + (x+y)\,\mathbf{j})\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}) = \int_C (x^2ydx + (x+y)dy)\\ &= \int_0^2 x^2x^2dx + \int_0^2 (x+x^2)(2xdx) = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{296}{15}\end{aligned}$$

別解 曲線 C をパラメター t で表示すると

$$C : \mathbf{r}(t) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2$$

よって

$$d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j})dt,\ \boldsymbol{F} = x^2y\,\mathbf{i} + (x+y)\,\mathbf{j} = t^4\,\mathbf{i} + (t+t^2)\,\mathbf{j}$$

これより

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{t}ds &= \int_C \boldsymbol{F}\cdot d\mathbf{r}\\ &= \int_0^2 (t^4\,\mathbf{i} + (t+t^2)\,\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j})dt = \int_0^2 (t^4 + 2t^2 + 2t^3)dt = \left[\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{4}t^4\right]_0^2 = \frac{296}{15}\end{aligned}$$

この例題で $-C$ を曲線 C の向きを $(2,4)$ から $(0,0)$ に変えた曲線とすると，曲線 $-C$ のパラメター表示は

$$-C : \mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(2-t) = (2-t)\,\mathbf{i} + (2-t)^2\,\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2$$

となります．よって

$$d\mathbf{R} = (-\mathbf{i} - 2(2-t)\,\mathbf{j})dt,\ \boldsymbol{F} = x^2y\,\mathbf{i} + (x+y)\,\mathbf{j} = (2-t)^4\,\mathbf{i} + (2-t) + (2-t)^2\,\mathbf{j}$$

これより,

$$\int_{-C} \boldsymbol{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_0^2 ((2-t)^4\,\mathbf{i} + ((2-t) + (2-t)^2)\,\mathbf{j})\cdot(-\mathbf{i} - 2(2-t)\,\mathbf{j})dt$$

ここで $2 - t = u$ とおくと， $du = -dt$ より

$$\begin{aligned}\int_{-C} \boldsymbol{F}\cdot d\mathbf{R} &= -\int_2^0 (u^4\,\mathbf{i} + (u+u^2)\,\mathbf{j})\cdot(-\mathbf{i} - 2u\,\mathbf{j})du\\ &= -\int_0^2 (u^4\,\mathbf{i} + (u+u^2)\,\mathbf{j})\cdot(-\mathbf{i} - 2u\,\mathbf{j})du = -\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\mathbf{r}\end{aligned}$$

よって,

$$\int_{-C} \boldsymbol{F}\cdot d\mathbf{R} = -\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\mathbf{r}$$

または,

$$\int_{-C} \boldsymbol{F}\cdot \mathbf{t}ds = -\int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathbf{t}ds$$

となります.

これまでに保存場では，ベクトル場はスカラー場の勾配と大きさが等しくなることをすでに学びました．では線積分との関係においては，どんなことが成り立つのか調べてみましょう.

定理 3.1 ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ では次の条件は同値である.
(1) $\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$ となるスカラー関数 $\phi(x,y,z)$ が存在する．($\boldsymbol{F}$は保存場)
(2) 任意の閉曲線 C について $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ が成り立つ (積分経路無関係).

位置エネルギー

力の場 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャル U をもつとします．つまり，$\boldsymbol{F} = -\nabla U$ が成り立つとします．この力の場内に曲線 C を考え，曲線 C は点 P から Q に至るとします．質点がこの力の場の作用を受けながら，この曲線 C に沿って点 P から Q まで移動したとき，この質点が $\boldsymbol{F}$ から受ける仕事量 W は

$$W = \int_C \boldsymbol{F}\cdot d\mathbf{r} = U(P) - U(Q)$$

となり，2 点 P,Q を結ぶ曲線 C の選び方に関係しません．そこで，ポテンシャル U の点 P に値 U(P) を，この力の場の点 P における**位置エネルギー (potential energy)** といいます.

例題 3.10 $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$ とすると，ベクトル場 $\boldsymbol{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ はスカラーポテンシャル $\phi = \frac{1}{r}$ をもつことを示し，空間の各点における位置エネルギーを求めよう.

解 $\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ より，$\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$. または,

$$\begin{aligned}\nabla\frac{1}{r} &= \frac{\partial(r^{-1})}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial(r^{-1})}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial(r^{-1})}{\partial z}\,\mathbf{k} = \frac{\partial(r^{-1})}{\partial r}\frac{d(r)}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial(r^{-1})}{\partial r}\frac{d(r)}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial(r^{-1})}{\partial r}\frac{d(r)}{\partial z}\,\mathbf{k}\\ &= -r^{-2}(\frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}\end{aligned}$$

これより，$\boldsymbol{F} = -\nabla\frac{1}{r}$ となり，ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ はポテンシャル $\phi = \frac{1}{r}$ をもちます．したがって，点 P における位置エネルギーは $\frac{1}{r}$ となります.

問 3.1 力の場 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャル U をもつとする．この力の場内で質量 m の質点が運動して，点 A から点 B まで移動したとき，次の式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + U(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 + U(B)$$

ここで，v_A, v_B はそれぞれ点 A,B におけるこの質点の速度ベクトルの大きさである.

演習問題 3.3

1.　力の場 $\mathbf{F} = 3xy\mathbf{i} - 5\mathbf{z} + 10x\mathbf{k}$ の中で質点が曲線

$$C : x = t^2 + 1,\ y = 2t^2,\ z = t^3$$

に沿って $t = 1$ から $t = 2$ まで運動する間に力 $\mathbf{F}$ がする仕事量 $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ を求めよ．

2.　スカラー場 $\phi = 2xyz^2$，ベクトル場 $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ がある．媒介変数表示 $x = t^2, y = 2t, z = t^3$ $(0 \le t \le 1)$ で表される曲線を C とする．次の線積分を求めよ．

(1) $\int_C \phi d\mathbf{r}$　　　　(2) $\int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$

3.　$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ とする．任意の閉曲線 C について $\int_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0$ であることを証明せよ．

4.　力の場 $\mathbf{F}$ がポテンシャル U をもつとする．この力の場内で質量 m の質点が運動して，点 A から点 B まで移動したとき，次の式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + U(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 + U(B)$$

ここで，v_A, v_B はそれぞれ点 A,B におけるこの質点の速度ベクトルの大きさである．

5.　全空間から z 軸を除外した領域 D で $\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ は定義されている．xy 平面上で原点 O を中心とし，半径 a の円を C とする．次の等式を証明せよ．

$$\int_C (\nabla\phi) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$$

3.3　面積分 (surface integrals)

曲面 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ に対して定義されたスカラー場を $f(\mathrm{P}) = f(x, y, z)$ とします．ただし，曲面 S は滑らかな曲面とします．

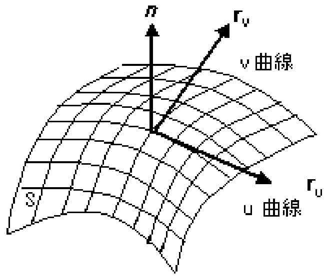


図 3.3　曲面

S を n 個の小さな面 $S_1, S_2, \ldots, S_n$ に分割し，この分割を Δ で表わします．次に曲面 S_i の面積を ΔS_i とし， S_i の中に点 P_i をとり，次の和を考えます．

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{P}_i)\Delta S_i$$

ここで，分割を細かくし Δ を限りなく小さくしたとき， $S(\Delta)$ が限りなく S に近づくならば，この極限値 S をスカラー場 f の **面積分 (surface integral)** といい

$$\iint_S f(x, y, z)dS$$

で表わします．

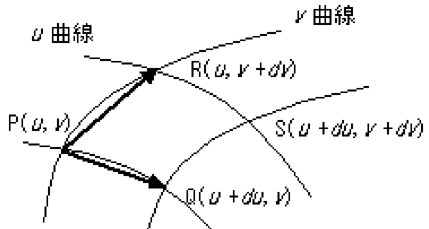


図 3.4　面積素

ここで面積素 dS は $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du$ と $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv$ を 2 辺とする平行四辺形の面積で近似できるので，

$$dS \approx |\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}|dudv$$

で与えられることに注意すると，スカラー場 f の曲面 S 上での面積分は，次のように表わされます．

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_\Omega f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|dudv$$

ここで，Ω は S に対応する uv 平面上の領域です．

例題 3.11 次のスカラー場 f の放物面 $S : x^2 + y^2 + z = 4$ のうち $z \geq 0$ の部分上での面積分を求めてみましょう．

$$f(x,y,z) = \frac{2y^2 + z}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{1/2}}$$

解 曲面 $S : x^2 + y^2 + z = 4$ より対応する $\mathbf{r}$ を位置ベクトルとすると

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (4 - x^2 - y^2)\,\mathbf{k}$$

次に曲面 S の法線ベクトル $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$ を求めると

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y &= (\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} - 2y\,\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\end{aligned}$$

これより

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

ここで，$\Omega : 4 - (x^2 + y^2) \geq 0$ より極座標変換を行なうと

$$\begin{aligned}\iint_S f(x,y,z)dS &= \iint_\Omega \frac{2y^2 + z}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{1/2}} |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| dxdy \\ &= \iint_\Omega (2y^2 + z)dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2 + 2r^2 \sin^2\theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^2}{4} + \frac{r^4}{2}\sin^2\theta\right]_0^{2\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} (4 + 8\sin^2\theta)d\theta = 8\pi + 8\pi = 16\pi\end{aligned}$$

問 3.2 $\displaystyle\iint_S xy^2 dS$, ただし，　$S : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ を求めよ．

問 3.3 平面 $2x + 2y + z = 2$ と x 軸，y 軸, z 軸の交点をそれぞれ A,B,C とする．△ABC を曲面 S とするとき，$\int_S f dS$, $f = x^2 + 2y + z - 1$ を求めよ．

ベクトル場の面積分

線積分と同様に曲面 S 上で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{F} = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$ の面積分を曲面 S の法線ベクトル $\mathbf{n}$ または，面積ベクトル $\mathbf{S}$ を用いて定義し，次のように表わします．

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\mathbf{S}$$

なお $\mathbf{n}$ の方向と $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ の方向は等しいので

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

と表せます．よって曲面 S 上のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の面積分は次のように 2 重積分で表されます．

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS &= \iint_\Omega \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|dudv = \iint_\Omega \boldsymbol{F}\cdot(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)dudv \\ &= \iint_\Omega \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv\end{aligned}$$

また， 方向余弦を用いて $\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$ とすると，次のようにも書けます．

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS &= \iint_S \boldsymbol{F}\cdot(\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k})dS = \iint_S (F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma)dS \\ &= \iint_S (F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy)\end{aligned}$$

問 3.4 方程式 $F(x, y, z) = 0$ で表される曲面を S とする．曲面 S の法線単位ベクトル $\mathbf{n}$ は次の式で与えられることを証明せよ．ここで，$\nabla F \neq \mathbf{0}$ とする．

$$\mathbf{n} = \frac{F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

流束

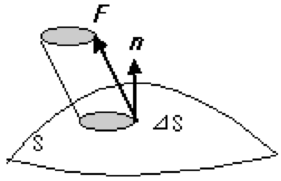


図 3.5　流束

ここで, ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を, 流体が流管中を定常的にながれるときの, ある点での速度場とするとき, $\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS$ を $\boldsymbol{F}$ の $\mathbf{n}$ に向かう**束 (flux)** といいます．よって速度場 $\boldsymbol{F}$ の束が流速 (流量)dQ となり, その面積分 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS$ を **束積分 (flux integral)** といい，全流束 (全流量) を表わします.

例題 3.12 ベクトル場 $\boldsymbol{F} = y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, 曲面 $S : x^2 + y^2 = 4 - z,\ z \geq 0$ とする．このとき面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS$ を求めてみましょう.

解 位置ベクトルは $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (4 - x^2 - y^2)\,\mathbf{k}$ より

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_\Omega \begin{vmatrix} 0 & y & 4-x^2-y^2 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} dxdy = \iint_\Omega (4 - x^2 + y^2)dxdy$$

ここで $\Omega : x^2 + y^2 \leq 4$ より極座標変換を行うと $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ より

$$\begin{aligned}\iint_\Omega (4 - x^2 + y^2)dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2 + 2r^2\sin^2\theta)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left[2r^2 - \frac{r^2}{4} + \frac{r^4}{2}\sin^2\theta\right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(4 + 8\sin^2\theta)d\theta = 8\pi + 8\pi = 16\pi\end{aligned}$$

問 3.5　ベクトル場 $\boldsymbol{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - 2z\,\mathbf{k}$, 曲面 $S : x^2 + y^2 = a^2,\ 0 \leq z \leq 1$ とする．このとき面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS$ を求めよ

問 3.6　原点Oを中心とする半径 a の球面を S とする．任意の点 P の位置ベクトルを $\mathbf{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とする．球面 S の単位法ベクトル $\mathbf{n}$ を S の外側に向けてとれば，次の式が成り立つことを証明せよ.

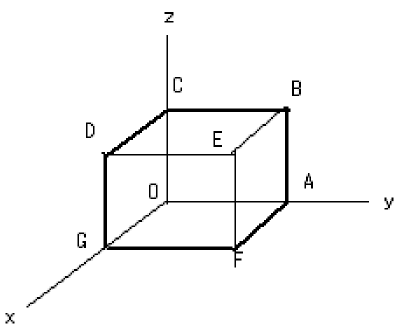
$$\int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\mathbf{n}\,dS = 4\pi,\quad r = |\mathbf{r}|$$

解 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ より，$z \geq 0$ では，位置ベクトルは $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,\mathbf{k}$.
よって,

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_\Omega \begin{vmatrix} \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} dxdy$$

例題 3.13　$\boldsymbol{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2 y\mathbf{j} - x^2 z\mathbf{k}$，曲面 S は面 $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ で囲まれている部分とする．このとき，面積分 $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{n} dS$ を求めよ．

解



面 DEFG: $x = 1$ より位置ベクトル $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$．ここで，正の方向は面 DEFG の裏から表へ向かう方向である．したがって，法線単位ベクトルは

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_y \times \mathbf{r}_z}{|\mathbf{r}_y \times \mathbf{r}_z|} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}$$

また，yz 平面への正射影は $\Omega_{yz} = \{(y, z) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ より，

$$\iint_{DEFG} \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 (2 - z) dy dz = \int_0^1 [2y - yz]_{y=0}^1 \, dz = \int_0^1 (2 - z) dx = \left[2z - \frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

面 ABCO: $x = 0$ より位置ベクトル $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$．ここで，正の方向は面 ABCO の裏から表へ向かう方向である．したがって，法線単位ベクトルは

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_z \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_z \times \mathbf{r}_y|} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i}$$

また，yz 平面への正射影は $\Omega_{yz} = \{(y, z) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ より，

$$\iint_{ABCO} \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 z dy dz = \int_0^1 [yz]_{y=0}^1 \, dz = \int_0^1 z dx = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

面 ABEF: $y = 1$ より位置ベクトル $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$．ここで，正の方向は面 ABEF の裏から表へ向かう方向である．したがって，法線単位ベクトルは

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_z \times \mathbf{r}_x}{|\mathbf{r}_z \times \mathbf{r}_x|} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{j}$$

また，xz 平面への正射影は $\Omega_{xz} = \{(x, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ より，

$$\iint_{ABEF} \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 x^2 dx dz = \frac{1}{3}$$

同様にして，残りの面での面積分を行うと，

$$\int \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{11}{6}$$

演習問題 3.4

1.　平面 $2x+2y+z=2$ と x 軸，y 軸，z 軸の交点をそれぞれ A,B,C とする．△ABC を曲面 S とする．次の面積分を求めよ．

(1) $\int_S f dS,\ f = x^2 + 2y + z - 1$

(2) $\int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} dS,\ \mathbf{A} = x^2\mathbf{i} + z\mathbf{k}$

2.　xy 平面上の領域 $x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq a^2$ を曲面 S とする．次の面積分を求めよ．

$$\int_S \mathbf{A}\times\mathbf{n} dS,\ \mathbf{A} = x\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j} + (\log xy)\mathbf{k}$$

3.4　発散

空間のある領域で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を考えます．$\boldsymbol{F}$ の成分表示を

$$\boldsymbol{F} = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$$

とします．このときベクトル場の **発散 (divergence)** とよばれるスカラー場 div $\boldsymbol{F}$ を次のように定義します．

定義 3.2

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

ここで演算子 ∇ を用いると，div $F = \nabla \cdot \boldsymbol{F}$ と表わすことができます．

例題 3.14　$\boldsymbol{F} = 3xy\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j} + y^2z\,\mathbf{k}$ の発散を求めてみましょう．

解

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= 3y + x^2 + y^2\end{aligned}$$

となります．

次に，ベクトル場の発散とは何なのかを，実際の物理現象を使いながら考えてみましょう．ここでは液体，ガスなどが空間に広がっていく動きを考えます．このときその空間での粒子の速度はベクトル場 $\mathbf{v}(x, y, z) = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k}$ を形成します．ここで空間の点 P を原点とする直交座標系を考え，図 3.6 のような小さな直方体 $\Delta x\Delta y\Delta z$ が液体の中にあると想像します．$\Delta y\Delta z$ で作られる面積を ΔS_{yz} と表すことにします．

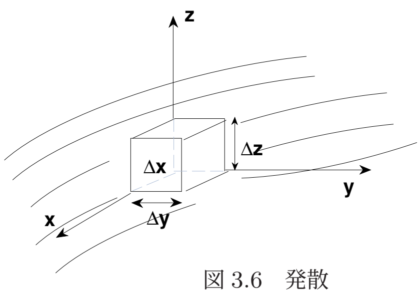


図 3.6　発散

まず，直方体の表面から出て行く単位時間内での流量変化を計算してみます．点 $(0, y, z)$ で直方体に入っていく流体の，直方体の面に垂直なベクトルの x 成分は ρv_1，ただし ρ は液体の密度とします．よって，単位時間 Δt 内に後ろの面から流入する流体の流量は

$$\rho v_1(0, y, z)\Delta S_{yz}\Delta t$$

次に直方体から出てくる流体の，直方体の面に垂直なベクトルの x 成分は

$$\begin{aligned}\rho v_1(\Delta x,y,z) &= \rho v_1(\Delta x,y,z)-\rho v_1(0,y,z)+\rho v_1(0,y,z)\\ &= \frac{\rho v_1(\Delta x,y,z)-\rho v_1(0,y,z)}{\Delta x}\Delta x+\rho v_1(0,y,z)\\ &\approx \frac{\partial \rho v_1}{\partial x}\Delta x+\rho v_1(0,y,x)\end{aligned}$$

で表わせます．よって，前の面から流出する流体の流量は

$$\rho v_1(0,y,z)\Delta S_{yz}\Delta t+\left(\frac{\partial \rho v_1}{\partial x}\Delta x\right)\Delta S_{yz}\Delta t$$

同様のことが残りの 4 つの面でも起こります．ここで，ベクトル場 $\rho\mathbf{v}$ の微小な 6 個の閉曲面上での面積分 $\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$ は，前章で学んだように，全流速 (全流量) をあらわすので，これらを全て加えたもので近似できます．

$$\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS \approx \left(\frac{\partial \rho v_1}{\partial x}+\frac{\partial \rho v_2}{\partial y}+\frac{\partial \rho v_3}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z=\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\Delta V$$

ここで，左辺は微小な直方体の表面 S から外部へ，1 秒間に流出する流体の流量です．つまり，1 秒間に湧き出す流体の流量と考えられます．したがって，

$\nabla\cdot\rho\mathbf{v}$ の点 P における値は，1 秒間に湧き出す流体の体積の点 P における体積密度である．

これは点 P における $\rho\mathbf{v}$ の発散です．これより点 P において

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\rho\mathbf{v}>0 \text{ のとき湧き出し}\\ &\nabla\cdot\rho\mathbf{v}<0 \text{ のとき飲み込み}\\ &\nabla\cdot\rho\mathbf{v}=0 \text{ のとき平衡}\end{aligned}$$

とよびます．

基本公式

任意のベクトル場 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ とスカラー場 ϕ において，次の公式が成り立ちます．

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})=\nabla\cdot\boldsymbol{F}+\nabla\boldsymbol{G}$$

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{F})=(\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{F}+\phi\nabla\cdot\boldsymbol{F}$$

証明

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) &= (\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z})\cdot(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})\\ &= (\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z})\cdot\boldsymbol{F}+(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z})\cdot\boldsymbol{G}\\ &= \nabla\cdot\boldsymbol{F}+\nabla\boldsymbol{G}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{F}) &= (\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z})\cdot(\phi\boldsymbol{F})=\mathbf{i}\cdot\frac{\partial(\phi\boldsymbol{F})}{\partial x}+\mathbf{j}\cdot\frac{\partial(\phi\boldsymbol{F})}{\partial y}+\mathbf{k}\cdot\frac{\partial(\phi\boldsymbol{F})}{\partial z}\\ &= \mathbf{i}\cdot(\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{F}+\phi\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x})+\mathbf{j}\cdot(\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{F}+\phi\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial y})+\mathbf{k}\cdot(\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{F}+\phi\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial z})\\ &= (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{F}+\phi\nabla\cdot\boldsymbol{F}\end{aligned}$$

例題 3.15　$\phi = 3x^2 - yz$, $\boldsymbol{F} = 3xyz^2\,\mathbf{i} + 2xy^3\,\mathbf{j} - x^2yz\,\mathbf{k}$ のとき，次のスカラーを求めよう．
(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$　　(2) $\boldsymbol{F} \cdot \nabla\phi$　　(3) $\nabla \cdot (\phi\boldsymbol{F})$

解 (1)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}(3xyz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^2yz) = 3yz^2 + 6xy^2 - x^2y$$

(2) $\nabla\phi = 6x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{k}$ より，

$$\boldsymbol{F} \cdot \nabla\phi = (3xyz^2)(6x) + (2xy^3)(-z) + (-x^2yz)(-y) = 18x^2yz^2 - 2xy^3z + x^2y^2z$$

問 3.7　(3) を求めよ．

例題 3.16　$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$ とする．次の式を証明せよ．

$$(1)\ \nabla \cdot \mathbf{r} = 3, \qquad (2)\ \nabla \cdot (r^n\mathbf{r}) = (n+3)r^n \qquad (3)\ \nabla \cdot (\frac{\mathbf{r}}{r^3}) = 0$$

解 (1)

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

(2) 合成関数の微分法より，

$$\nabla \cdot (r^n\mathbf{r}) = (\nabla r^n) \cdot \mathbf{r} + r^n\nabla \cdot \mathbf{r} = nr^{n-1}\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} + r^n(3) = nr^n + 3r^n = (n+3)r^n$$

(3)

$$\nabla \cdot (\frac{\mathbf{r}}{r^3}) = \nabla \cdot r^{-3}\mathbf{r} = (\nabla r^{-3}) \cdot \mathbf{r} + r^{-3}\nabla \cdot \mathbf{r} = -3r^{-4}\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} + r^{-3}(3) = 0.$$

ラプラシアン

$\boldsymbol{F}$ が保存場のとき $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$ は

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} &= \nabla \cdot \nabla\phi \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) \\ &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\,\mathbf{i} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\,\mathbf{j} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

と表わせます．これをスカラー場 f の **ラプラシアン (Laplacian)** といい，$\nabla^2\phi$ または $\Delta\phi$ で表わします．ここで，演算子の内積 $\nabla \cdot \nabla$ を記号 ∇^2 で表せば

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

また，偏微分方程式

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

を **ラプラスの方程式 (Laplace equation)** といい，その解 ϕ を**調和関数**といいます．

例題 3.17　$\phi = 3x^2y - y^3z^2$ のとき，$\nabla^2\phi$ を求めよう．

解

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(3x^2y - y^3z^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(3x^2y - y^3z^2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(3x^2y - y^3z^2) = 6y - 6yz^2 - 2y^3.$$

問 3.8　$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$ とする．

(1) $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$　　　(2) $\nabla^2(\frac{1}{r}) = 0$

例題 3.18　$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$ とする．

(1) $\nabla^2 f(r) = \dfrac{d^2 f}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{df}{dr}$ を証明せよ．
(2) $\nabla^2 f(r) = 0$ となる $f(r)$ を求めよ．
解 (1) $w = f(r), r = r(x, y, z)$ より，

$$\nabla f(r) = \frac{df}{dr}(\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k}) = \frac{df}{dr}\nabla r.$$

これより，

$$\nabla^2 f(r) = \nabla \cdot (\frac{df}{dr}\nabla r) = \nabla(\frac{df}{dr}) \cdot \nabla r + \frac{df}{dr}\nabla \cdot \nabla r.$$

ここで，$\nabla r \cdot \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = 1$．また，$\nabla \cdot \nabla r = \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \nabla \cdot (r^{-1}\mathbf{r}) = (\nabla r^{-1}) \cdot \mathbf{r} + r^{-1}\nabla \cdot \mathbf{r} = -r^{-2}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + r^{-1}(3) = \frac{2}{r}$．したがって，

$$\nabla^2 f(r) = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr}.$$

(2) $\nabla^2 f(r) = 0$ より，

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} = 0.$$

ここで，$w = \frac{df}{dr}$ とすると，$\frac{dw}{dr} = -\frac{2}{r}w$ の変数分離形．これより，$\frac{dw}{w} = -\frac{2}{r}dr$ となり，両辺を積分すると，
$\log|w| = -2\log|r| + c$．よって，$w = cr^{-2}$．$w = \frac{df}{dr}$ より，$\frac{df}{dr} = cr^{-2}$．したがって，$f = c_0 r^{-1} + c_1$．

演習問題 3.5

基本公式 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とすると，

(1) $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$

(2) $\nabla r^n = nr^{n-1}\nabla r = nr^{n-2}\mathbf{r}$

(3) $\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{A}) = (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A} + \phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$

1. 次のものを求めよ.

(1) $\nabla\cdot(2x^2z\mathbf{i} - xy^2z\mathbf{j} + 3yz^2\mathbf{k})$　　(2) $\nabla^2(3x^2z - y^2z^3 + 4x^2y)$

(3) $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}),\ \boldsymbol{F} = (3x^2y - z)\mathbf{i} + (xz^3+y^4)\mathbf{j} - 2x^2z^2\mathbf{k}$

2. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},\ r = |\mathbf{r}|$ とする．次のスカラーを求めよ.

(1) $\nabla\cdot(r\nabla r^{-3})$　　(2)$\nabla^2\left\{\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^2}\right)\right\}$

3. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},\ \mathbf{w}$ を定ベクトルとする.

$$\nabla\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{r}) = 0$$

を証明せよ.

4. スカラー場 ϕ, ψ について次の式を証明せよ.

(1) $\nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + 2(\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) + \psi\nabla^2\phi$

(2) $\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) = (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) + \phi\nabla^2\psi$

(3) $\nabla\cdot(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) = \phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi$

5. $\nabla\phi = 2xyz^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k}$ を満足する $\phi = \phi(x,y,z)$ を求めよ．ただし，$\phi(1,-2,2) = 4$ とする.

6. スカラー場 U, V について次の式を証明せよ.

$$\nabla\cdot\{(\nabla U)\times(\nabla V)\} = 0$$

7. 曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ とスカラー場 $\phi = \phi(x,y,z)$ について，この曲線に沿っての ϕ の微分係数 $\frac{d\phi(x(t),y(t),z(t))}{dt}$ は $\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\phi$ に等しい．このことを証明せよ.

8. 関数 $\phi(x,y,z,t)$ に $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ を代入して得られる t の関数 $\phi(t)$ の導関数は $\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\phi$ であることを証明せよ．ただし，$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

3.5　回転

定義 3.3　空間のベクトル場 $\boldsymbol{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ に対して $\boldsymbol{F}$ の **回転 (curl)**，curl$\boldsymbol{F}$ を次のように定義します．

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial \mathrm{z}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial \mathrm{x}}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{y}}\right)\mathbf{k}$$

形式的に

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

と表わします．

例題 3.19　$\boldsymbol{F} = z\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + 2y\,\mathbf{k}$ の回転を求めてみましょう．

解

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x^2 & 2y \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$$

ベクトル場の回転を求めるのはそれほど難しくないことですが，ベクトル場の回転とは何かは分かりにくいものとなっています．そこで次の例を考えながらベクトル場の回転とは何かを理解しましょう．
$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$ のとき，このベクトル場によって点 A (x_A, y_A), B$(x_A + \Delta x, y_A)$, C$(x_A + \Delta x, y_A + \Delta y)$, D$(x_A, y_A + \Delta y)$ からなる四辺形 ABCD をどれだけ回転させせられるか調べてみます．
まず，点 A (x_A, y_A) での水平方向の成分は $F_1(x_A, y_A)$．点 D $(x_A, y_A + \Delta y)$ での水平方向の成分は

$$F_1(x_A, y_A) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_A, y_A)\Delta y$$

この 2 つの値の差，つまり，水平方向の成分の差 $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x_A, y_A)\Delta y$ が正のとき，四辺形 ABCD は時計回りに回転します．また，点 A,B での垂直方向の成分の差 $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x_A, y_A)\Delta x$ が正のとき，四辺形 ABCD は反時計回りに回転します．よって

$$\|\mathrm{curl}\boldsymbol{F}\| = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

はベクトル場 $\boldsymbol{F}$ が四辺形に与える回転力の大きさとなり，その力の方向は右ねじの法則より四辺形に垂直な方向 $\mathbf{k}(\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y})$ となります．これが curl の名前の由来です．このことから $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$ のときベクトル場 $\boldsymbol{F}$ は渦なしとなります．

例題 3.20　$\boldsymbol{F}$ が保存場ならば，$\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ を示してみましょう．

解 $\boldsymbol{F}$ が保存場より，$\boldsymbol{F} = \nabla f$ となる f が存在します．よって curl$\boldsymbol{F}$ を求めると

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz})\mathbf{i} + (f_{xz} - f_{zx})\mathbf{j} + (f_{yx} - f_{xy})\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

定理 3.2　任意のスカラー場 ϕ と任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について次の式が成り立つ.

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}, \qquad \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

例題 3.21　$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$ とし, ω を定ベクトルとする. 次の等式を証明せよ.

$$(1)\ \nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \qquad (2)\ \nabla \times (\omega \times \mathbf{r}) = 2\omega$$

$$(1)\ \nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\tfrac{\partial z}{\partial y} - \tfrac{\partial y}{\partial z})\mathbf{i} + (\tfrac{\partial x}{\partial z} - \tfrac{\partial z}{\partial x})\mathbf{j} + (\tfrac{\partial y}{\partial y} - \tfrac{\partial x}{\partial y})\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

(2) $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$ とすると,

$$\mathbf{w} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (w_2 z - w_3 y)\mathbf{i} + (w_3 x - w_1 z)\mathbf{j} + (w_1 y - w_2 x)\mathbf{k}$$

したがって,

$$\nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_2 z - w_3 y & w_3 x - w_1 z & w_1 y - w_2 x \end{vmatrix} = 2w_1\mathbf{i} + 2w_2\mathbf{j} + 2w_3\mathbf{k} = 2\mathbf{w}$$

スカラー・ポテンシャル

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ がポテンシャル ϕ を持てば, $\boldsymbol{A} = -\nabla\phi$ であるから, 定理 3.2 によって, $\nabla \times \boldsymbol{A} = -\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$ となります. 逆はどうでしょうか.

定理 3.3　全空間で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について $\nabla \times \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ ならば, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ はポテンシャルを持つ

例題 3.22　$\displaystyle\int_C ((2x + yz)\,\mathbf{i} + zx\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{r}$ を求めてみましょう. ただし, C は点 $(1, 0, -1)$ から点 $(2, -1, 3)$ に至る曲線.

解

$$\nabla \times (2x + yz)\,\mathbf{i} + zx\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x + yz & zx & xy \end{vmatrix} = 0$$

より,

$$\int_C ((2x + yz)\,\mathbf{i} + zx\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

ベクトル・ポテンシャル

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して,

$$\boldsymbol{A} = \nabla \times \mathbf{p}$$

となるベクトル場 $\mathbf{p}$ が存在するとき, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ は**ベクトル・ポテンシャル** $\mathbf{p}$ を持つといいます. ここで, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ がベクトル・ポテンシャル $\mathbf{p}$ を持つならば, 定理 3.2 より, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{p}) = 0$ となるので, $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ が成り立ちます. 逆はどうでしょうか.

定理 3.4　全空間で定義されたベクトルば $\boldsymbol{A}$ について, $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ ならば, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ はベクトル・ポテンシャルを持つ.

演習問題を解くために，新たな記号を導入します．ベクトル場 $\boldsymbol{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ とナブラ ∇ の形式的内積

$$\boldsymbol{A}\cdot\nabla = a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial z}$$

は演算子です．これをスカラー場 ϕ とベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に作用させると，

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\phi = a_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + a_2\frac{\partial\phi}{\partial y} + a_3\frac{\partial\phi}{\partial z} = \boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi$$
$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} = a_1\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x} + a_2\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y} + a_3\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{A}}$$

と表すことができます．

公式

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

とその証明.

演算子 ∇ を含んだ式を処理するには，∇ を $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{z}$ とおいて，∇ を作用させ，その後ベクトル代数で学んだ，スカラー 3 重積，ベクトル 3 重積を用いて処理する．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{A}\times\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x} + \mathbf{j}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial z}\right)\\ &= (A\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x})\mathbf{i} + (A\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial y})\mathbf{y} + (A\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial z})\mathbf{k} - (\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x} - (\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{j})\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial y} + (\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{k})\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial z}\end{aligned}$$

上の式で $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を入れ替えると，

$$\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = (B\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x})\mathbf{i} + (B\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y})\mathbf{y} + (B\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z})\mathbf{k} - (\boldsymbol{B}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x} - (\boldsymbol{B}\cdot\mathbf{j})\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y} + (\boldsymbol{B}\cdot\mathbf{k})\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}$$

この 2 つの式を加えると，

$$\begin{gathered}\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\\ = \nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) - (B\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (A\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\end{gathered}$$

したがって，

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

演習問題 3.6

1.　ベクトル場 $\boldsymbol{A} = 2xz^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + 3xz^3\mathbf{k}, \phi = x^2yz$ とする．次のものをもとめよ．

(1) $\nabla \times \boldsymbol{A}$

(2) $\nabla \times (\phi\boldsymbol{A})$

(3) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$

2.

$\mathbf{V} = (x + 2y + az)\mathbf{i} + (bx - 3y - z)\mathbf{j} + (4x + cy + 2z)\mathbf{k}$ が $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ を満足するように a, b, c を定めよ．

3.　$\nabla \times \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$, $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mathbf{0}$ であれば，$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0$ であることを証明せよ．

4.　$\boldsymbol{C}$ を定ベクトルとする．任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ について次の式を証明せよ．

(1) $\nabla(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{C} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$

(2) $\nabla \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{C} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})$

(3) $\nabla \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{C} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}$

5.　任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について次の式を証明せよ．

$$(\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{A}|^2 - \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$$

6.　ρ と p をスカラー場とする．$\rho\boldsymbol{F} = \nabla p$ であれば，$\boldsymbol{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0$ であることを証明せよ．

第 4 章

積分公式

4.1　ガウスの発散定理

次にドイツの数学者 Karl Friedrich Gauss (1777-1855) の名前をとってつけられた発散定理について学びます.

Gauss の発散定理

定理 4.1　[Gauss の発散定理] ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x, y, z) = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ において，区分的に滑らかな閉曲面 S で囲まれた空間の領域を V とし， S の内部から外部に向かう法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とすると，

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{F}dV$$

$$\iint_S (F_1dydz + F_2dzdx + F_3dxdy) = \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dxdydz$$

が成り立つ.

S, V を変数と見なせば,

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dV$$

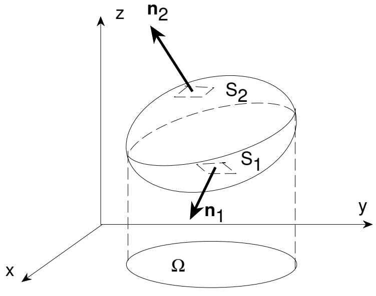


図 4.1　Gauss の定理

証明　まず，V が 2 つの曲面 S_1, S_2 で下と上からはさまれているとします．また，S_1 は $z = f_1(x,y)$，$(x,y) \in \Omega$，S_2 は $z = f_2(x,y)$ $(x,y) \in \Omega$ で与えられているとします．このとき，

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dV = \iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dz dy dx &= \iint_\Omega [\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz] dy dx \\ &= \iint_\Omega [F_3]_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} dy dx \\ &= \iint_\Omega [F_3(x,y,f_2(x,y)) - F_3(x,y,f_1(x,y))] dy dx\end{aligned}$$

曲面 S_2 において，曲線座標 (x,y) に対する法線単位ベクトル

$$\frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\|}$$

は $\mathbf{n}$ と一致していますが，曲面 S_1 では法線単位ベクトルは $-\mathbf{n}$ に等しくなります．よって

$$\iint_\Omega F_3(x,y,f_2(x,y)) dx dy = \iint_{S_2} F_3 dx dy$$

$$-\iint_\Omega F_3(x,y,f_1(x,y)) dx dy = \iint_{S_1} F_3 dx dy$$

これより，

$$\iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dV = \iint_{S_2} F_3 dx dy + \iint_{S_1} F_3 dx dy = \iint_S F_3 dx dy$$

が成り立ちます．同様にして，S を他の平面に正射影することにより

$$\iiint_V \frac{\partial F_1}{\partial z} dV = \iint_S F_1 dy dz$$

$$\iiint_V \frac{\partial F_2}{\partial z} dV = \iint_S F_2 dz dx$$

を示すことができるので，これらをそれぞれ加えれば，

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} dV = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

を得ることができます．
領域 V が一般な場合には，V を部分領域に分割して証明すればよいでしょう．

例題 4.1　面積分

$$\iint_S xz^2 dy dz + (x^2 y - z^3) dz dx + (2xy + y^2 z) dx dy$$

ただし，曲面 S は上半球面 $S_1 : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq a^2$ と $S_2 : z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2$ からなっているとする．

(1) この面積分を Gauss の発散定理を用いて求めよ．

(2) この面積分を直接求めよ．

解 (1) $\boldsymbol{F} = xz^2\mathbf{i} + (x^2y - z^3)\mathbf{j} + (2xy + y^2z)\mathbf{k}$ より $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$を求めると

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \nabla \cdot (xz^2\mathbf{i} + (x^2y - z^3)\mathbf{j} + (2xy + y^2z)\mathbf{k}) = z^2 + x^2 + y^2$$

よって

$$\iint_S xz^2dydz + (x^2y - z^3)dzdx + (2xy + y^2z)dxdy = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dV$$

ここで V は半径 a の上半球より球面座標変換 (ρ, ϕ, θ) を用いると

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho=0}^{a} \rho^2\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \int_{\rho=0}^{a} \rho^4 d\rho = 2\pi(1)(\frac{a^5}{5}) = \frac{2\pi a^5}{5}$$

(2)

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} xz^2dydz + (x^2y - z^3)dzdx + (2xy + y^2z)dxdy &= \iint_{S_1} xz^2dydz + \iint_{S_1} (x^2y - z^3)dxdy \\ &+ \iint_{S_1} (2xy + y^2z)dxdy\end{aligned}$$

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ より，yz 平面に正射影すると，$x = 0$ より，$\Omega_1 = \{(y, z) : y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$．ここで，$x > 0$ の場合と $x < 0$ の場合を考えると，

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} xz^2dydz &= \int_{y=-a}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-y^2}} z^2\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}dzdy - \int_{y=-a}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-y^2}} -z^2\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}dzdy \\ &= 4\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-y^2}} z^2\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}dzdy\end{aligned}$$

次に，xz 平面に正射影すると，$y = 0$ より，$\Omega_1 = \{(x, z) : x^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$．よって，$y > 0$ の場合と $y < 0$ の場合より，

$$\iint_{S_1} (x^2y - z^3)dzdx = 2\int_{x=-a}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2\sqrt{a^2 - x^2 - z^2} - z^3)dzdx = 4\int_{x=0}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} x^2\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}dzdx$$

最後に，xy 平面に正射影すると，$x = 0$ より，$\Omega_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$．

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} (2xy + y^2z)dzdx &= \int_{x=-a}^{a}\int_{y=-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (2xy + y^2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2})dydx = \int_{x=-a}^{a}\int_{y=-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dydx \\ &= 4\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dydx\end{aligned}$$

次に，$S_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ における面積分を考える．まず，yz 平面への正射影で，S_2 は $\Omega_2 = \{(y, z) : -a \leq y \leq a, z = 0\}$ に移るので，

$$\iint_{S_2} xz^2dydz = 0$$

xz 平面への正射影で，S_2 は $\Omega_2 = \{(x, z) : -a \leq x \leq a, z = 0\}$ に移るので，

$$\iint_{S_2} (x^2y - z^3)dzdx = 0$$

xy 平面への正射影で，S_2 は $\Omega_2 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ に移るので，

$$\iint_{S_2} (2xy + y^2 z) dzdy = \iint_{S_2} 2xydzdx = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2xydydx = 0$$

これらを加えると，

$$\begin{aligned}\int_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= 4\int_{y=0}^{a} \int_{z=0}^{\sqrt{a^2-y^2}} z^2 \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} dzdy + 4\int_{x=0}^{a} \int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} x^2 \sqrt{a^2 - x^2 - z^2} dzdx \\ &+ 4\int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dydx = 12\int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dydx\end{aligned}$$

ここで，極座標変換を行うと，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より，

$$\begin{aligned}\int_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= 12\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{a} r^2 \sin^2\theta \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta = 12(\int_{0}^{a} r^3 \sqrt{a^2 - r^2} dr)(\int_{0}^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta) \\ &= 12(\int_{t=a^2}^{0} \sqrt{t}(a^2 - t)(\frac{dt}{-2}))(\frac{\pi}{4}) = (3\pi)(\frac{1}{2}\int_{0}^{a^2} (a^2 t^{1/2} - t^{3/2}) dt) \\ &= (\frac{3\pi}{2}) \left[\frac{2}{3}a^2 t^{3/2} - \frac{2}{5}t^{5/2}\right]_0^{a^2} = (\frac{3\pi}{2})(\frac{2}{3}a^5 - \frac{2}{5}a^5) = \frac{2\pi a^2}{5}\end{aligned}$$

例題 4.2　$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ とする．任意の領域 V とその境界面 S について次の等式を証明せよ．なお，領域 V の体積を V で表す．

$$(1)\ \int_S \mathbf{n} dS = \mathbf{0} \qquad (2)\ \int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS = 3V \qquad (3)\ \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{r} dS = \mathbf{0}$$

解 (1) 任意の定ベクトルを用いて，面積分の形に直し Gauss の発散定理を用いると，

$$\int_S \boldsymbol{C} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{C}\, dV = 0$$

したがって，$\int_S \boldsymbol{C} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$
(2) Gauss の発散定理より，

$$\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{r}\, dV = \int_V (\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z})\, dV = 3V$$

(3) 任意の定ベクトルを用いて，面積分の形に直しスカラー 3 重積と Gauss の発散定理を用いると，

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{C} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r})\, dS &= \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{C})\, dS = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{C})\, dV \\ &= \int_V (\boldsymbol{C} \cdot \nabla \times \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \times \boldsymbol{C})\, dV = 0\end{aligned}$$

例題 4.3　スカラー場 ϕ 内の領域 V とその境界面 S について次の等式を証明せよ．

(1) $\displaystyle\int_S \frac{\partial\phi}{\partial n} dS = \int_V \nabla^2 \phi dV$
(2) ϕ が調和関数であれば

$$\int_S \frac{\partial\phi}{\partial n} dS = 0$$

解 (1) 面積分の問題は必ず $\int_S \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$ の形に書き直す．この場合，$\frac{\partial\phi}{\partial n}$ は法線単位ベクトル $\mathbf{n}$ 方向での方向微分係数より，$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi\cdot\mathbf{n}$. したがって，

$$\int_S \frac{\partial\phi}{\partial n}\,dS = \int_S \nabla\phi\cdot\mathbf{n}\,dS$$

ここで，Gauss の発散定理を用いると，

$$\int_S \frac{\partial\phi}{\partial n}dS = \int_S \nabla\phi\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot(\nabla\phi)\,dV = \int_V \nabla^2\phi\,dV$$

(2) ϕ が調和関数とは，$\nabla^2\phi = 0$ のことでした．したがって，(1) より，

$$\int_S \frac{\partial\phi}{\partial n}\,dS = \int_V \nabla^2\phi\,dV = 0$$

定理 4.2 スカラー場 ϕ とベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の共通の定義域内にある任意の領域 V とその境界面 S について

$$\iiint_V \phi dV = \iint A\cdot\mathbf{n}dS$$

であれば，$\phi = \nabla\cdot\boldsymbol{A}$ である．

証明 Gauss の発散定理より，

$$\iint_S A\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_V A\cdot\mathbf{n}dV$$

であるから，

$$\iiint_V \phi\,dV = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV$$

これより，

$$\iiint_V (\phi - \nabla\cdot A)dV = 0$$

ここで，$\phi - \nabla\cdot\boldsymbol{A}$ は連続関数であり，任意の領域 V について上の等式が成り立つから，連続関数の性質により，

$$\phi - \nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0 \text{ つまり } \phi = \nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

定理 4.3 ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ 内の任意の領域 V の境界面 S について

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}dS = 0$$

ならば，$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$ であることを証明せよ．

証明 上の定理で $\phi = 0$ とすると，

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_V \phi\,dV = 0$$

であれば，$\nabla\cdot A = \phi = 0$.

流管 ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ 内の曲面 S の点を通る流線全体が作る管状の立体図形を**流管**といいます．この流管の断面 S_1, S_2 をとります．このとき，流管 S_1, S_2 を貫く流速は等しくなります．つまり，

$$\int_{S_1} \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_{S_2} \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

この共通の値をこの**流管の流速**といいます．

演習問題 4.1

1. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|$ とする．任意の領域 V とその境界面 S について次の等式を証明せよ．

(1) $\int_V \frac{1}{r^2}\, dV = \int_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\, dS$

(2) $\int_S \mathbf{r} \times \mathbf{n}\, dS = 0$

(3) $\int_S r^n \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS = (n+3) \int_V r^n\, dV$

(4) $\int_S r^n \mathbf{n}\, dS = n \int_V |bfr r^{n-2}\, dV$

(5) $\int_S r^n \mathbf{r} \times \mathbf{n}\, dS = 0$

(6) $\int_V r\, dV = \frac{1}{2} \int_S r^2 \mathbf{n}\, dS$

(7) $\int_S F(r)\mathbf{n}\, dS = \int_V \frac{dF}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}\, dV$

2. スカラー場 ϕ 内の任意の領域 V の境界面 S について次の等式を証明せよ．

$$\int_S \mathbf{n} \times (\nabla\phi)\, dS = \mathbf{0}$$

3. ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ を満足しているとする．このベクトル場内にある曲面 S の境界線になっている閉曲線 C をとる．このとき，面積分 $\Phi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$ は C を境界線にもつどんな曲面 S についても常に同一の値をもち，その値は閉曲線 C によって定まる．以上のことを証明せよ．この Φ を閉曲線 C を貫く流速という．

4. スカラー場 ϕ とベクトル場 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の共通の定義域内にある，任意の領域 V とその境界面 S について次の等式を証明せよ．

(1) $\int_V \boldsymbol{A} \cdot \nabla\phi\, dV = \int_S \phi\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n}\, dS - \int_V \phi\nabla \cdot \boldsymbol{A}\, dV$

(2) $\int_V \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})\, dV = \int_S (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})\, dV$

(3) $\int_V (\nabla\phi) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})\, dV = -\int_S ((\nabla\phi) \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS$

(4) $\boldsymbol{A} = \nabla\phi, \nabla^2\phi = 0$ **ならば，** $\int_V |\boldsymbol{A}|^2\, dV = \int_S \phi\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$

5. スカラー場 ϕ, ψ の共通の定義域内にある，任意の領域 V とその境界面 S について次の等式を証明せよ．

(1) $\int_S \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\, dS = \int_V \{\psi\nabla^2\phi + (\nabla\psi) \cdot (\nabla\phi)\}\, dV$

(2) $\int_S \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\, dS = \int_V \{\phi\nabla^2\phi + |\nabla\phi|^2\}\, dV$

(3) $\int_S \left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\, dS = \int_V \{\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi\}\, dV$ **グリーンの公式**

(4) ϕ **が調和関数であれば**

$$\int_S \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\, dS = \int_V |\nabla\phi|^2\, dV$$

(5) ϕ, ψ **が調和関数であれば**

$$\int_S \left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\, dS = 0$$

(6) S **上で** $\phi = 0$ **(または，** $\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$**) ならば，調和関数 ϕ は V 内で $\mathbf{0}$ (または，定数) である．**

6. ベクトル場 A は全空間で定義されているとする．任意の領域の境界面 S について $\int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ ならば，A はベクトル・ポテンシャルをもつ．以上のことを証明せよ．

7. ベクトル場 A は全空間で定義されているとする．任意の領域の境界面 S について $\int_S \boldsymbol{A} \times \mathbf{n} dS = 0$ ならば，A はスカラー・ポテンシャルをもつ．以上のことを証明せよ

4.2　ストークスの定理

Stokes の定理

Green の定理を アイルランドの数学者で物理学者の George Gabriel Stokes (1819-1903) が一般化したものを Stokes の定理とよびます．まず，Stokes の定理を学ぶには，曲面の向きづけを行なう必要があります．

定義 4.1　曲面 S 上の各点 (x, y, z) で法線ベクトル $\mathbf{n}(x, y, z)$ を適当に選び， $\mathbf{n}(x, y, z)$ が S 上で連続になるようにできるとき，曲面 S は **向きづけられる曲面 (orientable)** という．また，このとき各点で選んだ $\mathbf{n}$ を，曲面の向きづけにより定まる法線単位ベクトルという．

向きづけられた曲面 S の境界の曲線 ∂S に沿っての線積分を， S 上での面積分に書き換える等式を与えるのが Stokes の定理です．

定理 4.4　[Stokes の定理]$S : z = f(x, y), (x, y) \in \Omega$ をいくつかの区分的に滑らかな閉曲線を境界とする向きづけられた曲面とする．また，ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ は S 上で C^1 級とする．そのとき，

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

ただし， ∂S は S の境界を表わし，曲線 ∂S 上の線積分の向きは領域 S を左手にみるように ∂S を一周するものとする．つまり，法線単位ベクトル $\mathbf{n}$ に対して右手の法則に従う．

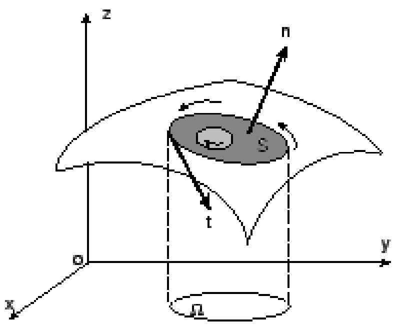


図 4.2　Stokes の定理

証明 まず， $\iint_S [\nabla \times F_1 \mathbf{i}] \cdot \mathbf{n} dS$ **を考えよう．**

$$\nabla \times F_1 \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial z}\mathbf{j} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\mathbf{k}$$

より

$$[\nabla \times F_1 \mathbf{i}] \cdot \mathbf{n} dS = \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \right) dS \tag{4.1}$$

$\mathbf{r} = {}^t[x, y, z]$ **を位置ベクトルとすると，** $\mathbf{r}_y = (0, 1, z_y)$ **は** S **の接線ベクトルとなるので，法線ベクトル** $\mathbf{n}$ **とは直交する．よって**

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_y = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} + z_y \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0 \text{ または } \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = -z_y \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$$

これを式 4.1 に代入すると，

$$[\nabla \times F_1 \mathbf{i}] \cdot \mathbf{n} dS = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} dS$$

ここで S 上では $F_1(x,y,z) = F_1(x,y,f(x,y)) = H(x,y)$ とおけるので合成関数の微分法より

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

となる．よって

$$[\nabla \times F_1 \mathbf{i}] \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{\partial H}{\partial y}\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} dS = -\frac{\partial H}{\partial y} dxdy$$

を得る．これより

$$\iint_S [\nabla \times F_1 \mathbf{i}] \cdot \mathbf{n} dS = \iint_\Omega -\frac{\partial H}{\partial y} dxdy$$

で表わせる．ここで， Ω は S を xy 平面に正射影したものである．右側の積分は平面上の積分で，Green の定理より $\oint_{\partial\Omega} \mathbf{H} dx$ となる．Ω の境界上の点 (x,y) での $H(x,y)$ の値と， S の境界上の点 (x,y,z) での $F_1(x,y,z)$ の値は等しく，また， dx はどちらの曲線でも同じなので，

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{H} dx = \oint_{\partial S} F_1 dx$$

または

$$\iint_S [\nabla \times F_1 \mathbf{i}] \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial S} F_1 dx$$

となる．同様にして，他の平面への正射影をとると，

$$\iint_S [\nabla \times F_2 \mathbf{j}] \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial S} F_2 dy, \quad \iint_S [\nabla \times F_3 \mathbf{k}] \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial S} F_3 dz$$

となり，くわえると，

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r}$$

となる．

例題 4.4　$\boldsymbol{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k},\ S : z = (4 - x^2 - y^2)^{1/2}$ のとき，Stokes の定理が成り立つことを示してみましょう．

解 S の境界 ∂S は $x^2+y^2 = 4$ の円となります．よって位置ベクトル $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = 2\cos t\mathbf{i}+2\sin t\mathbf{j}$ より線積分を求めると

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{\partial S} (-2\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (-2\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j})dt \\ &= \int_0^{2\pi} [4\sin^2 t + 4\cos^2 t]dt = 8\pi\end{aligned}$$

次に面積分を求めてみます．

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{k}$$

次に法線単位ベクトルを求めると

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -\frac{x}{z} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{z} \end{vmatrix} = \frac{x}{z}\mathbf{i} + \frac{y}{z}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

となるので

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{x}{z}\mathbf{i} + \frac{y}{z}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\|\frac{x}{z}\mathbf{i} + \frac{y}{z}\mathbf{j} + \mathbf{k}\|}$$

これより，

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathbf{n} dS &= 2\iint_S \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\|} \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| dxdy \\ &= 2\iint_\Omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y dxdy \\ &= \iint_\Omega 2dxdy = 2(4\pi) = 8\pi\end{aligned}$$

よって Stokes の定理が成り立つことが示せました．

これまでに保存場では，ベクトル場はスカラー場の勾配と等しくなり，またベクトル場の回転は 0 になることをすでに学びました．では線積分との関係においては，どんなことが成り立つのか調べてみましょう．

定理 4.5　ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ では次の 3 つの条件は同値である．

(1)　$\boldsymbol{F} = \nabla\phi$ となるスカラー関数 $\phi(x, y, z)$ が存在する．($\boldsymbol{F}$は保存場)

(2)　いたるところ $\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ が成り立つ．(渦なし)

(3)　任意の閉曲線 C について $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ が成り立つ (積分経路無関係).

証明 (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1) を示す．

(1) ⇒ (2)　$\nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla \times \nabla\phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

(2) ⇒ (3)　閉曲線 C で囲まれた曲面 S を考えて，Stokes の定理を使うと

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{0} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

(3) ⇒ (1)　定点 P (x_0, y_0, z_0) と動点 Q(x, y, z) をむすぶ 2 つの曲線 C_1, C_2 をとり，P から C_1 を経て Q に至り，Q から C_2 を逆向きに通って P に戻る道を C とすると，

$$\int_{\mathrm{P}(C_1)\mathrm{Q}} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathrm{P}(C_2)\mathrm{Q}} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathrm{P}(C_1)\mathrm{Q}} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathrm{Q}(C_2)\mathrm{P}} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

よって，

$$\int_{\mathrm{P}(C_1)\mathrm{Q}} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathrm{P}(C_2)\mathrm{Q}} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r}$$

すなわち，P から Q に至る線積分 $\int_{\mathrm{PQ}} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r}$ は途中の経路に関係なく，終点 Q の座標 (x, y, z) の関数で与えられる．よってこれを $\phi(x, y, z)$ とすれば，

$$\int_{\mathrm{PQ}} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(x, y, z)$$

P から Q に至る任意の曲線のベクトル方程式を $\mathbf{r} = (x(s), y(s), z(s))$ とすると，

$$\int_{\mathrm{PQ}} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_0}^{s} \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = \int_{s_0}^{s} \left(F_1 \frac{dx}{ds} + F_2 \frac{dy}{ds} + F_3 \frac{dz}{ds} \right) ds$$

よって

$$F_1 \frac{dx}{ds} + F_2 \frac{dy}{ds} + F_3 \frac{dz}{ds} = \frac{d}{ds} \int_{\mathrm{PQ}} \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds}$$

曲線 PQ は任意，したがって $x(s), y(s), z(s)$ も任意の関数でよいから，

$$F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}, F_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

これより，

$$\boldsymbol{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla \phi$$

この定理より，線積分をおこなうときに，ベクトル場がスカラー・ポテンシャルを持てば，積分をしなくとも答は 0 であることが分かります．

例題 4.5　$\int_C ((2x + yz)\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{r}$ を求めてみましょう．ただし，C は点 $(1, 0, -1)$ から点 $(2, -1, 3)$ に至る曲線.

解

$$\nabla \times ((2x + yz)\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x + yz & zx & xy \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

より，

$$\int_C ((2x + yz)\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

例題 4.6　スカラー場 ϕ, ψ の共通の定義域内にある任意の曲面 S とその境界線 C について，次の等式を証明せよ.

$$\iint_S \{(\nabla \phi) \times (\nabla \psi)\} \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \phi (\nabla \psi) \cdot d\mathbf{r}$$

解 まず，$\nabla \times (\phi \nabla \psi)$ を計算すると，

$$\nabla \times (\phi \nabla \psi) = (\nabla \phi) \times (\nabla \psi) + \phi \nabla \times (\nabla \psi)$$

ここで，$\nabla \times (\nabla \psi) = \mathbf{0}$ より，

$$\nabla \times (\phi \nabla \psi) = (\nabla \phi) \times (\nabla \psi)$$

したがって，ストークスの定理より，

$$\iint_S \{(\nabla \phi) \times (\nabla \psi)\} \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \phi (\nabla \psi) \cdot d\mathbf{r}$$

問 4.1　$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ とする．任意の曲面 S とその境界線 C について次の等式を証明せよ.

$$(1) \int_C d\mathbf{r} = \mathbf{0} \qquad (2) \int_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

演習問題 4.2

1. スカラー場 ϕ, ψ の共通な定義域内にある任意の曲面 S の境界線 C について次の式を証明せよ．

$$\int_C \phi(\nabla\psi)\cdot d\mathbf{r} = -\int_C \psi(\nabla\phi)\cdot d\mathbf{r}$$

2. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},\ r = |\mathbf{r}|$ とし，ϕ をスカラー場とする．任意の曲面 S とその境界線 C について次の式を証明せよ．

(1) $\int_C \mathbf{r}\times d\mathbf{r} = 2\int_S \mathbf{n}dS$

(2) $\int_C r^k\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = 0$

(3) $\int_C \mathbf{r}(\nabla\phi)\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\phi)\times\mathbf{n}dS$

3. スカラー場 ϕ とベクトル場 $\mathbf{A}$ の共通な定義域内にある任意の曲面 S の境界線 C について次の式を証明せよ．

$$\int_S \phi(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}dS = \int_C \phi\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} - \int_S \{(\nabla\phi)\times\mathbf{A}\}\cdot\mathbf{n}dS$$

4. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},\ r = |\mathbf{r}|$ とし，ϕ をスカラー場とする．任意の曲面 S とその境界線 C について次の式を証明せよ．

$$\int_C \frac{\mathbf{r}\times d\mathbf{r}}{r^3} = -\int_S \mathbf{n}\cdot\nabla\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)dS = \int_S \left(\frac{3|bfr\cdot\mathbf{n}}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{n}}{r^3}\right)dS$$

5. ベクトル場 $\mathbf{A}$ は全空間で定義されているとする．任意の曲面の境界線 C について

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

ならば，$\mathbf{A}$ はスカラー・ポテンシャルをもつ．以上のことを証明せよ．

第 5 章

演習問題解答

演習問題詳解 3.2

1.

(1) $\phi = x^2 z + e^{y/x}$ より，

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = (2xz + e^{y/x}(-\frac{y}{x^2}))\mathbf{i} + (e^{y/x}(\frac{1}{x}))\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$$

$\psi = 2z^2 y - xy^2$ より，

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{k} = -y^2\mathbf{i} + (2z^2 - 2xy)\mathbf{j} + 4zy\mathbf{k}$$

(2) $\nabla(\phi\psi) = (\nabla\phi)\psi + \phi\nabla\psi$. **(1)** より，

$$\begin{aligned}\nabla(\phi\psi) &= ((2xz + e^{y/x}(-\frac{y}{x^2}))\mathbf{i} + (e^{y/x}(\frac{1}{x}))\mathbf{j} + x^2\mathbf{k})(2z^2y - xy^2) \\ &\quad + (x^2 z + e^{y/x})(-y^2\mathbf{i} + (2z^2 - 2xy)\mathbf{j} + 4zy\mathbf{k})\end{aligned}$$

より，点 $\mathbf{P}(1, 0, -2)$ での値は

$$\nabla(\phi\psi)_P = (-4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})(0) + (-2 + 1)(8)\mathbf{j} = -8\mathbf{j}$$

2. ϕ の点 $\mathbf{P}(2, -1, 2)$ における $\mathbf{u}$ 方向への方向微分係数は，

$$\frac{\partial\phi(2, -1, 2)}{\partial u} = \nabla\phi(1, 0, -2) \cdot \mathbf{u}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\nabla\phi(2, -1, 2) &= (4z^3 - 6xyz)\mathbf{i} + (-3x^2 z)\mathbf{j} + (12xz^2 - 3x^2 y)\mathbf{k}\ |_{(2,-1,2)} \\ &= (32 + 24)\mathbf{i} + (-24)\mathbf{j} + (96 + 12))\mathbf{k}\end{aligned}$$

より，

$$\frac{\partial\phi(2, -1, 2)}{\partial u} = (56\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 108\mathbf{k}) \cdot \frac{2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{7} = \frac{1}{7}(112 + 72 + 648) = \frac{832}{7}$$

3. $\nabla r^n = nr^{n-1}\nabla r = nr^{n-1}\frac{\mathbf{r}}{r} = nr^{n-2}\mathbf{r}$ を用いると簡単である．

(1)

$$\mathbf{A} = \nabla\left(2r^2 - 4\sqrt{r} + \frac{6}{3\sqrt{r}}\right) = 2(2\mathbf{r}) - 4(\frac{1}{2}r^{-\frac{3}{2}}\mathbf{r}) + \frac{6}{3}(-\frac{1}{2}r^{-\frac{5}{2}}\mathbf{r}) = (4 - \frac{2}{r\sqrt{r}} - \frac{1}{r^2\sqrt{r}})\mathbf{r}$$

(2)

$$\mathbf{B} = \nabla(r^2 e^{-r}) = (\nabla r^2)e^{-r} + r^2(\nabla e^{-r}) = 2e^{-r}\mathbf{r} + r^2(-e^{-r})\nabla r = 2e^{-r}\mathbf{r} - r^2 e^{-r}\frac{\mathbf{r}}{r} = (2-r)e^{-r}\mathbf{r}$$

別解 $\nabla f(\phi) = \frac{df}{d\phi}\nabla\phi$ **を用いると，**

$$\mathbf{B} = \nabla(r^2 e^{-r}) = \frac{d(r^2 e^{-r})}{dr}\nabla r = (2re^{-r} - r^2 e^{-r})\frac{\mathbf{r}}{r} = (2-r)e^{-r}\mathbf{r}$$

4. $\phi(x,y,z) = x^2 y + 2xz$ **の勾配** $\nabla\phi$ **は点 P でこの曲面** $\phi(x,y,z) = 4$ **に垂直である．したがって，単位法ベクトル n は**

$$\mathbf{n} = \frac{(\nabla\phi)_P}{|\nabla\phi|_P}$$

ここで，$(\nabla\phi)_P = (2xy+2z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 2x\mathbf{k})\ |_{(2,-2,3)} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ **より，**

$$\mathbf{n} = \frac{-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{4+16+16}} = \frac{1}{3}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

5. $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ **より，**

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\phi}{\psi}) &= \mathbf{i}\frac{\phi_x\psi - \phi\psi_x}{\psi^2} = \frac{\psi\phi_x\mathbf{i} - \phi\psi_x\mathbf{i}}{\psi^2} \\
\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\phi}{\psi}) &= \mathbf{j}\frac{\phi_y\psi - \phi\psi_y}{\psi^2} = \frac{\psi\phi_y\mathbf{j} - \phi\psi_y\mathbf{j}}{\psi^2} \\
\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\phi}{\psi}) &= \mathbf{k}\frac{\phi_z\psi - \phi\psi_z}{\psi^2} = \frac{\psi\phi_z\mathbf{k} - \phi\psi_z\mathbf{k}}{\psi^2}
\end{aligned}$$

ここで，$\phi_x\mathbf{i} + \phi_y\mathbf{j} + \phi_z\mathbf{k} = \nabla\phi$**,** $\psi_x\mathbf{i} + \psi_y\mathbf{j} + \psi_z\mathbf{k} = \nabla\psi$ **であるから，**

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi}{\phi^2}$$

6.

(1) $r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}$**,** $\nabla_Q = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial\xi} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial\eta} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\zeta}$**,** $\nabla_P = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ **とすると，**

$$\begin{aligned}
\nabla_Q r &= \mathbf{i}\frac{\partial r}{\partial\xi} + \mathbf{j}\frac{\partial r}{\partial\eta} + \mathbf{k}\frac{\partial r}{\partial\zeta} \\
&= \mathbf{i}\frac{2(\xi-x)}{2r} + \mathbf{j}\frac{2(\eta-y)}{2r} + \mathbf{k}\frac{2(\zeta-z)}{2r} \\
\nabla_P r &= \mathbf{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial r}{\partial z} \\
&= \mathbf{i}\frac{-2(\xi-x)}{2r} + \mathbf{j}\frac{-2(\eta-y)}{2r} + \mathbf{k}\frac{-2(\zeta-z)}{2r} = -\nabla_Q r
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\nabla_Q(\frac{1}{r}) &= \mathbf{i}\frac{\partial r^{-1}}{\partial\xi} + \mathbf{j}\frac{\partial r^{-1}}{\partial\eta} + \mathbf{k}\frac{\partial r^{-1}}{\partial\zeta} \\
&= \mathbf{i}(-r^{-2}\frac{(\xi-x)}{r}) + \mathbf{j}(-r^{-2}\frac{(\eta-y)}{r}) + \mathbf{k}(-r^{-2}\frac{(\zeta-z)}{r}) \\
\nabla_P(\frac{1}{r}) &= \mathbf{i}\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial r^{-1}}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial r^{-1}}{\partial z} \\
&= \mathbf{i}(r^{-2}\frac{(\xi-x)}{r}) + \mathbf{j}(r^{-2}\frac{(\eta-y)}{r}) + \mathbf{k}(r^{-2}\frac{(\zeta-z)}{r}) = -\nabla_Q(\frac{1}{r})
\end{aligned}$$

演習問題詳解 3.3 **1.** $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = (t^2+1)\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ より，

$$d\mathbf{r} = (2t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})dt$$

また，$\mathbf{F} = 3xy\mathbf{i} - 5z\mathbf{j} + 10x\mathbf{k} = 3(t^2+1)(2t^2)\mathbf{i} - 5(t^3)\mathbf{j} + 10(t^2+1)\mathbf{k}$．したがって，

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \left(12t^3(t^2+1) - 20t^4 + 30(t^2+1)t^2\right)dt \\ &= \int_1^2 (12t^5 + 10t^4 + 12t^3 + 30t^2)dt = \left[2t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 10t^3\right]_1^2 \\ &= 2(64-1) + 2(32-1) + 3(16-1) + 10(8-1) = 303 \end{aligned}$$

2.

(1) $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}\ (0 \le t \le 1)$ より，

$$d\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

また，$\phi = 2xyz^2 = 2t^2(2t)(t^3)^2 = 4t^9$．したがって，

$$\begin{aligned} \int_C \phi d\mathbf{r} &= \int_0^1 4t^9(2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})dt \\ &= \int_0^1 (8t^{10}\mathbf{i} + 8t^9\mathbf{j} + 12t^{11}\mathbf{k})dt = \left[\frac{8}{11}t^{11}\mathbf{i} + \frac{8}{10}t^{10}\mathbf{j} + t^{12}\mathbf{k}\right]_0^1 \\ &= \frac{8}{11}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

(2) $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}\ (0 \le t \le 1)$ より，

$$d\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

また，$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k} = 2t^3\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$．したがって，

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}\times d\mathbf{r} &= \int_0^1 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t^3 & -t^3 & t^4 \\ 2t & 2 & 3t^2 \end{vmatrix} = \int_0^1 \left((-3t^5 - 2t^4)\mathbf{i} - (6t^5 - 2t^5)\mathbf{j} + (4t^3 + 2t^4)\mathbf{k}\right)dt \\ &= \left[(-\frac{t^6}{2} - \frac{2t^5}{5})\mathbf{i} - \frac{4t^6}{6}\mathbf{j} + (t^4 + \frac{2t^5}{5})\mathbf{k}\right]_0^1 \\ &= (-\frac{1}{2} - \frac{2}{5})\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + (1 + \frac{2}{5})\mathbf{k} = -\frac{9}{10}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{7}{5}\mathbf{k} \end{aligned}$$

3. ベクトル場 $\mathbf{A}$ は $\mathbf{A} = -\nabla\phi$ のとき，がスカラー・ポテンシャルを持つといい，そのとき，$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0$ である．そこで，$\mathbf{r} = \nabla\phi$ であるような ϕ を求める．

$$\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = \nabla r^2 = 2\mathbf{r}$$

より，$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})$．したがって，

$$\int_C \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\int_C \nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})d\mathbf{r} = 0$$

4. 力の場 $\mathbf{F}$ がポテンシャル U をもつことより，$\mathbf{F} = -\nabla U$．これより，この質点の運動方程式は

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = -\nabla U$$

また，$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$**．そこで，**

$$m\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \cdot \mathbf{v} = -\nabla U \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

これより，

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla U = 0$$

ここで，$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla U$ **を計算すると，**

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla U = (\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}) \cdot (\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

よって，

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U) = 0$$

これより，

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = C \ (C \text{ 定数})$$

したがって，

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + U(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 + U(B)$$

5. xy **平面上で原点 O を中心とし，半径** a **の円を** C **とすると，**$C : x = a\cos t, y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ **とパラメター化できる．これより，**

$$\nabla\phi = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + (\frac{y}{x})^2}\mathbf{i} + \frac{\frac{1}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2}\mathbf{j} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j} = \frac{-\sin t}{a}\mathbf{i} + \frac{\cos t}{a}\mathbf{j}$$

また，

$$d\mathbf{r} = (-a\sin t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j})dt$$

したがって，

$$\int_C (\nabla\phi) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}) \cdot (-\sin t + \cos t)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

演習問題詳解 3.4

1.

(1) 曲面 S **を** xy **平面に正射影すると，**S **は** $\Omega = \{(x, y) : 2x + 2y \le 2, x \ge 0, y \ge 0\}$ **に移る．また，曲面** $S : 2x + 2y + z = 2$ **より，対応する** $\mathbf{r}$ **を位置ベクトルとすると，**

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (2 - 2x - 2y)\mathbf{k}$$

これより，曲面 S **の法線ベクトル** $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$ **を求めると，**

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

ここで，$dS = |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|dxdy = \sqrt{4 + 4 + 1}dxdy = 3dxdy$ **に注意すると，**

$$\int_S f dS = 3\int_\Omega (x^2+2y+z-1)dxdy = 3\int_0^1\int_{y=0}^{1-x}(x^2+2y+(2-2x-2y)-1)dydx$$
$$= 3\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2-2x+1)dydx = 3\int_0^1\int_0^{1-x}(x-1)^2\,dydx$$
$$= 3\int_0^1 \left[(x-1)^2 y\right]_0^{1-x} dx = 3\int_0^1 (1-x)^3\,dx = -3\left[\frac{1}{4}(1-x)^4\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

(2) $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(2-2x-2y)\mathbf{k}$ **とすると，** $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y|} = \frac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}}{3}$**．よって，**

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = (x^2\mathbf{i}+z\mathbf{k})\cdot\frac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}}{3} = \frac{2x^2+z}{3}$$

したがって，

$$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS = \int_\Omega \frac{2x^2+z}{3}3dxdy = \int_\Omega (2x^2+(2-2x-2y))dxdy$$
$$= \int_0^1\int_0^{1-x}(2x^2-2x-2y+2)dydx = \int_0^1 \left[2x^2y-2xy-y^2+2y\right]_0^{1-x}dx$$
$$= \int_0^1 (2x^2(1-x)-2x(1-x)-(1-x)^2+2(1-x))dx$$
$$= \int_0^1 (1-x)(2x^2-2x-(1-x)+2)dx = \int_0^1 (1-x)(2x^2-x+1)dx$$
$$= \int_0^1 (-2x^3+3x^2-2x+1)dx = \left[-\frac{x^4}{2}+x^3-x^2+x\right]_0^1$$
$$= -\frac{1}{2}+1-1+1 = \frac{1}{2}$$

2. 曲面 S **は** xy **平面上領域より，法線単位ベクトルは** $\mathbf{n}=\mathbf{k}$ **となる．**

$$\mathbf{A}\times\mathbf{n} = (x\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}+(\log xy)\mathbf{k})\times\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & x-y & \log xy \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)\mathbf{i}-x\mathbf{j}$$

また， S **は** xy **平面上にあるので，** $S=\Omega$**，** $dS = dxdy$**．ここで，** Ω **は円板より，極座標を用いると，** $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le a$ **となり，**

$$\int_S \mathbf{A}\times\mathbf{n}dS = \int_0^{\pi/2}\int_0^a ((r\cos\theta-r\sin\theta)\mathbf{i}-r\cos\theta\mathbf{j})rdrd\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a((\cos\theta-\sin\theta)\mathbf{i}-\cos\theta\mathbf{j})\,d\theta$$
$$= \frac{a^3}{3}\left[(\sin\theta+\cos\theta\mathbf{i}-\sin\theta\mathbf{j}\right]_0^{\pi/2} = \frac{a^3}{3}((1-1)\mathbf{i}-\mathbf{j}) = -\frac{a^3}{3}\mathbf{j}$$

演習問題詳解 3.5 基本公式 $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とすると，(1) $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ (2) $\nabla r^n = nr^{n-1}\nabla r = nr^{n-2}\mathbf{r}$ (3) $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A} = (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A}+\phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$

1.

(1)

$$\nabla\cdot(2x^2z\mathbf{i}-xy^2z\mathbf{j}+3yz^2\mathbf{k}) = \frac{\partial(2x^2z)}{\partial x}+\frac{\partial(-xy^2)}{\partial y}+\frac{\partial(3yz^2)}{\partial z} = 4xz-2xy+6yz$$

(2)

$$\nabla^2(3x^2z - y^2z^3 + 4x^2y) = \frac{\partial^2(3x^2z - y^2z^3 + 4x^2y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(3x^2z - y^2z^3 + 4x^2y)}{\partial y^2} + \frac{\partial(3x^2z - y^2z^3 + 4x^2y)}{\partial z^2}$$
$$= 6z + 8y - 2z^3 - 6y^2z$$

(3)

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) = \nabla(6xy + 4y^3 - 4x^2z) = (6y - 8xz)\mathbf{i} + (6x + 12y^2)\mathbf{j} - 4x^2\mathbf{k}$$

2.

(1) $\nabla r^{-3} = \frac{dr^{-3}}{dr}\nabla r = -3r^{-4}\frac{\mathbf{r}}{r} = -3r^{-5}\mathbf{r}$ より，$r\nabla r^{-3} = -3r^{-4}\mathbf{r}$. したがって，

$$\nabla \cdot (r\nabla r^{-3}) = \nabla \cdot (-3r^{-4}\mathbf{r}) = \nabla(-3r^{-4}) \cdot \mathbf{r} + (-3r^{-4}\nabla \cdot \mathbf{r} = 12r^{-5}\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} - 3r^{-4}(3) = 12r^{-4} - 9r^{-4} = 3r^{-4}$$

(2) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2}\right) = \nabla \cdot r^{-2}\mathbf{r} = (\nabla r^{-2}) \cdot \mathbf{r} + r^{-2}\nabla \cdot \mathbf{r} = -2r^{-3}\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} + r^{-2}(3) = -2r^{-2} + 3r^{-2} = r^{-2}$. したがって，

$$\nabla^2\left\{\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2}\right)\right\} = \nabla \cdot (\nabla(r^{-2})) = \nabla \cdot (-2r^{-3}\frac{\mathbf{r}}{r} = \nabla \cdot (-2r^{-4}\mathbf{r}$$
$$= \nabla(-2r^{-4}) \cdot \mathbf{r} + -2r^{-4}\nabla \cdot \mathbf{r} = 8r^{-5}\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} - 2r^{-4}(3) = 8r^{-4} - 6r^{-4} = 2r^{-4}$$

3. $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$ とすると，

$$\mathbf{w} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (w_2z - w3y)\mathbf{i} + (w_3x - w_1z)\mathbf{j} + (w_1y - w_2x)\mathbf{k}$$

したがって，

$$\nabla \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) = 0$$

4.

(1) 基本公式より，

$$\nabla^2(\phi\psi) = \nabla \cdot \nabla(\phi\psi) = \nabla \cdot ((\nabla\phi)\psi + \phi(\nabla\psi)) = \nabla \cdot (\nabla\phi)\psi + (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi\nabla \cdot (\nabla\psi)$$
$$= \psi + (\nabla^2\phi) + 2(\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi\nabla^2\psi$$

(1) 基本公式より，

$$\nabla \cdot (\phi\nabla\psi) = (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi\nabla \cdot (\nabla\psi) = (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi\nabla^2\psi$$

(3) (2) より，$\nabla \cdot (\phi\nabla\psi) = (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi\nabla^2\psi$. 対称性より，$\nabla \cdot (\psi\nabla\phi) = (\nabla\psi) \cdot (\nabla\phi) + \psi\nabla^2\phi$. したがって，

$$\nabla \cdot (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) = \phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi$$

5. $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z} = 2xyz^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k}$ より

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xyz^3,\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2z^3,\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 3x^2yz^2$$

これより，$\phi(x, y, z) = x^2yz^3 + c(y, z)$. ここで，$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2z^3$ を用いると，$\frac{\partial c(y,z)}{\partial y} = 0$ より，$c(y, z) = c(z)$. 最後に，$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 3x^2yz^2$ より，$\frac{\partial c(z)}{\partial z} = 0$ となり，$c(z) = c$. よって，$\phi(x, y, z) = x^2yz^3 + c$. ここで，初期値 $\phi(1, -2, 2) = 4$ より，$-16 + c = 4$ となり，$c = 20$.

6.

$$(\nabla U) \times (\nabla V) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = (U_yV_z - U_zV_y)\mathbf{i} + (U_zV_x - U_xV_z)\mathbf{j} + (U_zV_y - U_yV_z)\mathbf{k}$$

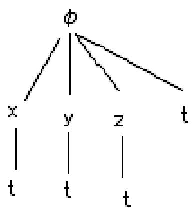
したがって，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ((\nabla U) \times (\nabla V)) &= \frac{\partial(U_yV_z - U_zV_y)}{\partial x} + \frac{\partial(U_zV_x - U_xV_z)}{\partial y} + \frac{\partial(U_xV_y - U_yV_x)}{\partial z} \\ &= U_{yx}V_z + U_yV_{zx} - U_{zx}V_y - U_zV_{yx} + U_{zy}V_x + U_zV_{xy} - U_{xy}V_z - U_xV_{zy} \\ &+ U_{xz}V_y + U_xV_{yz} - U_{yz}V_x - U_yV_{xz} = 0 \end{aligned}$$

7.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\phi = (\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{d}{dt}\phi(x, y, z)$$

8.



合成関数の微分法より，

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

演習問題詳解 3.6

1.

(1)

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^2 & -yz & 3xz^3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(y) + \mathbf{j}(4xz - 3z^3) + \mathbf{k}(0) = y\mathbf{i} + (4xz - 3z^3)\mathbf{j}$$

(2)

$$\begin{aligned} \nabla \times (\phi\boldsymbol{A}) &= (\nabla\phi) \times \boldsymbol{A} + \phi\nabla \times \boldsymbol{A} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2xyz & x^2z & x^2y \\ 2xz^2 & -yz & 3xz^3 \end{vmatrix} + x^2yz \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^2 & -yz & 3xz^3 \end{vmatrix} \\ &= (3x^3z^4 + x^2y^2z)\mathbf{i} + (2x^3yz^2 - 6x^2yz^4)\mathbf{j} + (-2xy^2z^2 - 2x^3z^3)\mathbf{k} + x^2yz(y\mathbf{i} + (4xz - 3z^3)\mathbf{j}) \\ &= (3x^3z^4 + 2x^2y^2)\mathbf{i} + (6x^3yz^2 - 9x^2yz^4)\mathbf{i} - (2xy^2z^2 + 2x^3z^3)\mathbf{k} \end{aligned}$$

(3) (1) より， $\nabla \times \boldsymbol{A} = y\mathbf{i} + (4xz - 3z^3)\mathbf{j}$.

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 4xz - 3z^3 & 0 \end{vmatrix} = (-4x + 9z^2)\mathbf{i} + (4z - 1)\mathbf{k}$$

2.

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z \end{vmatrix} = (c+1)\mathbf{i} + (a-4)\mathbf{j} + (b-2)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

より，$a = 4, b = 2, c = -1$

3.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) &= (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}) \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \\
&= \mathbf{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \\
&= \mathbf{i} \cdot (\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}) + \mathbf{j} \cdot (\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}) + \mathbf{k} \cdot (\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}) \\
&= \boldsymbol{B} \cdot (\mathbf{i} \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}) + \boldsymbol{B} \cdot (\mathbf{j} \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}) + \boldsymbol{B} \cdot (\mathbf{k} \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}) \qquad ([A\ B\ C] = [C\ A\ B]) \\
&- \boldsymbol{A} \cdot (\mathbf{i} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}) - \boldsymbol{A} \cdot (\mathbf{j} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}) - \boldsymbol{B} \cdot (\mathbf{k} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}) \\
&= \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = 0
\end{aligned}$$

(1)

$$\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B})$$

を用いると，

$$\nabla(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{C} + (\boldsymbol{C} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$$

ここで，$(\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{C} = 0, \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{C}) = \mathbf{0}$ より，

$$\nabla(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{C} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$$

(2)

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) &= (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \\
&= \mathbf{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \\
&= \mathbf{i} \cdot (\frac{\partial C}{\partial x} \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}) + \mathbf{j}(\cdot \frac{\partial C}{\partial y} \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}) + \mathbf{k}(\cdot \frac{\partial C}{\partial z} \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}) \\
&= -\boldsymbol{C} \cdot (\mathbf{i} \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}) - \boldsymbol{C} \cdot (\mathbf{j} \times \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial y}) - \boldsymbol{C} \cdot (\mathbf{k} \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}) \\
&= -\boldsymbol{C} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) &= (\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}) \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \\
&= \mathbf{i} \times \frac{\partial(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A})}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A})}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A})}{\partial z} \qquad (\boldsymbol{C}\text{は定数ベクトル}) \\
&= \mathbf{i} \times (\boldsymbol{C} \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}) + \mathbf{j} \times (\boldsymbol{C} \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}) + \mathbf{k} \times (\boldsymbol{C} \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}) \quad (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}) \\
&= (\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x})\boldsymbol{C} - (\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{C})\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x} + (\mathbf{j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y})\boldsymbol{C} - (\mathbf{j} \cdot \boldsymbol{C})\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y} + (\mathbf{k} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z})\boldsymbol{C} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{C})\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z} \\
&= \boldsymbol{C}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{C} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

5. 公式

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

を用いると，

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}) &= (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\\ &= 2(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\end{aligned}$$

よって，

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{A}|^2 - \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

6. $\nabla\times(\rho\boldsymbol{F}) = (\nabla\rho)\times\boldsymbol{F} + \rho(\nabla\times\boldsymbol{F})$ また，$\nabla\times(\rho\boldsymbol{F}) = \nabla\times(\nabla p) = 0$ より，$\nabla\times\boldsymbol{F} = -\frac{\nabla\rho}{\rho}\times\boldsymbol{F}$. したがって，

$$\boldsymbol{F}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}\cdot(-\frac{\nabla\rho}{\rho}\times\boldsymbol{F}) = \frac{\nabla\rho}{\rho}\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{F}) = 0$$

7.

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 6xy+z^3 & 3x^2-z & 3xz^2-y\end{vmatrix} = (-1+1)\mathbf{i} - (3z^2-3z^2)\mathbf{j} + (6x-6x)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

ここで，$\nabla\times\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ より，$\boldsymbol{A} = -\nabla\phi$ となる ϕ が存在することに注意する．

$$\boldsymbol{A} = (6xy+z^3)\mathbf{i} + (3x^2-z)\mathbf{j} + (3xz^2-y)\mathbf{k} = -\nabla\phi = -(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k})$$

より，

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x} = 6xy+z^3,\ -\frac{\partial\phi}{\partial y} = 3x^2-z,\ -\frac{\partial\phi}{\partial z} = 3xz^2-y$$

まず，-$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 6xy+z^3$ より，$-\phi(x,y,z) = 3x^2y + xz^3 + f(y,z)$. ここで，$\phi$ を y について偏微分すると，

$$-\frac{\partial\phi}{\partial y} = 3x^2 + f_y(y,z)$$

一方，

$$-\frac{\partial\phi}{\partial y} = 3x^2 - z$$

より，

$$f_y(y,z) = -z$$

これより，$f(y,z) = -yz + g(z)$ となる．よって，$-\phi(x,y,z) = 3x^2y + xz^3 - yz + g(z)$. ここで，$\phi(x,y,z)$ を z について偏微分すると，

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z} = 3xz^2 - y + g'(z)$$

一方，

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z} = 3x^2 - y$$

より，

$$g'(z) = 0$$

よって，$g(z) = c$ となり，$\phi(x,y,z) = -(3x^2y + xz^3 - yz + c)$

8.

演習問題詳解 4.1

1.

(1) Gauss の発散定理より,

$$\int_S \frac{\mathbf{r}}{r^2} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^2}\, dV$$

ここで,

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^2} = \nabla \cdot (r^{-2}\mathbf{r}) = \nabla r^{-2} \cdot \mathbf{r} + r^{-2}\nabla \cdot \mathbf{r} = -2r^{-3}\nabla r \cdot \mathbf{r} + r^{-2}(3) = -2r^{-3}\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} + 3r^{-2} = -2r^{-2} + 3r^{-2} = r^{-2}$$

したがって,

$$\int_S \frac{\mathbf{r}}{r^2} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V \frac{1}{r^2}\, dV$$

(2) $\int_S \mathbf{r} \times \mathbf{n}\, dS$ を面積分の形に直す．任意の定ベクトル $\boldsymbol{C}$ とスカラー 3 重積の性質を用いると

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{C} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{n})\, dS &= \int_S \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{C} \times \mathbf{r}) \\ &= \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{C} \times \mathbf{r})\, dV = -\int_V \boldsymbol{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{r}) = -\boldsymbol{C} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{C}$ は任意の定ベクトルより,

$$\int_S \mathbf{r} \times \mathbf{n}\, dS = 0$$

(3) Gauss の発散定理より,

$$\begin{aligned}\int_S r^n \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \int_V \nabla \cdot r^n \mathbf{r}\, dV = \int_V \left((\nabla r^n) \cdot \mathbf{r} + r^n \nabla \cdot \mathbf{r}\right)\, dV \\ &= \int_V (n r^{n-1} \nabla r \cdot \mathbf{r} + 3r^n)\, dV = \int_V (n r^n + 3r^n)\, dV \\ &= (3+n) \int_V r^n\, dV\end{aligned}$$

(4) $\int_S r^n \mathbf{n}\, dS$ を面積分の形に直す．任意の定ベクトル $\boldsymbol{C}$ を用いると

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{C} \cdot (r^n \mathbf{n})\, dS &= \int_S r^n \boldsymbol{C} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V \nabla \cdot (r^n \boldsymbol{C})\, dV = \int_V (\nabla r^n \cdot \boldsymbol{C} + r^n \nabla \cdot \boldsymbol{C})\, dV \\ &= \int_V n r^{n-1} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \boldsymbol{C}\, dV = \int_V \boldsymbol{C} \cdot n r^{n-2} \mathbf{r}\, dV\end{aligned}$$

これより,

$$\int_S r^n \mathbf{n} = \int_V n r^{n-2} \mathbf{r}\, dV$$

(5) $\int_S r^n \mathbf{r} \times \mathbf{n}\, dS$ を面積分の形に直す．任意の定ベクトル $\boldsymbol{C}$ とスカラー 3 重積を用いると

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{C} \cdot (r^n \mathbf{r} \times \mathbf{n})\, dS &= \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{C} \times (r^n \mathbf{r})\, dS = \int_S \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{C} \times r^n \mathbf{r})\, dS = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{C} \times r^n \mathbf{r})\, dV \\ &= \int_V (-\boldsymbol{C} \cdot (\nabla \times r^n \mathbf{r})\, dV = -\int_V \boldsymbol{C} \cdot (\nabla r^n \times \mathbf{r} + r^n \nabla \times \mathbf{r})\, dV \\ &= -\int_V \boldsymbol{C} \cdot (n r^{n-1} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{r} + 0)\, dV = 0\end{aligned}$$

(6) $\int_S r^2\mathbf{n}\,dS$ を面積分の形に直す．任意の定ベクトル $\boldsymbol{C}$ を用いると，

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{C}\cdot(r^2\mathbf{n})\,dS &= \int_S r^2\boldsymbol{C}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot(r^2\boldsymbol{C})\,dV \\ &= \int_V (\nabla r^2\cdot\boldsymbol{C} + r^2\nabla\cdot\boldsymbol{C})\,dV = \int_V (2r\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\boldsymbol{C})\,dV \\ &= \boldsymbol{C}\cdot\int_V 2\mathbf{r}\,dV\end{aligned}$$

したがって，

$$\int_S r^2\mathbf{n}\,dS = 2\int_V \mathbf{r}\,dV$$

(7) $\int_S F(r)\mathbf{n}\,dS$ を面積分の形に直す．任意の定ベクトル $\boldsymbol{C}$ を用いると，

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{C}\cdot(F(r)\mathbf{n})\,dS &= \int_S F(r)\boldsymbol{C}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot(F(r)\boldsymbol{C})\,dV = \int_V (\nabla F(r)\cdot\boldsymbol{C} + F(r)\nabla\cdot\boldsymbol{C})\,dV \\ &= \int_V \frac{dF}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\boldsymbol{C})\,dV = \boldsymbol{C}\cdot\int_V \frac{dF}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}\,dV\end{aligned}$$

したがって，

$$\int_S F(r)\mathbf{n}\,dS = \int_V \frac{dF}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}\,dV$$

2. 任意の定ベクトル $\boldsymbol{C}$ を用いて，面積分の形に直すと，

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{C}\cdot(\mathbf{n}\times(\nabla\phi))\,dS &= \int_S \mathbf{n}\cdot(\nabla\phi\times\boldsymbol{C})\,dS = \int_V \nabla\cdot(\nabla\phi\times\boldsymbol{C})\,dV \\ &= \int_V (\boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\nabla\phi) + \nabla\phi\cdot(\nabla\times\boldsymbol{C}))\,\,dV\end{aligned}$$

ここで，$(\nabla\times\nabla\phi = 0, \nabla\times\boldsymbol{C} = \mathbf{0})$ に注意すると，

$$\int_S \boldsymbol{C}\cdot(\mathbf{n}\times(\nabla\phi))\,dS = 0$$

3. 曲面 S の境界線を C とするので, 境界線で分けられた曲面を S_1, S_2 とする．また, 曲面 S_1 の法単位ベクトルを $\mathbf{n}_1$，S_2 の法単位ベクトルを $\mathbf{n}_2$ とする．このとき, 曲面 S の法単位ベクトルを $\mathbf{n}$ とすると $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}, \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}$ または，$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}, \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$．ここで,

$$\int_{S_1} \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}_1\,dS + \int_{S_2} \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}_2\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV = 0$$

より，

$$\int_{S_1} \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}_1\,dS = -\int_{S_2} \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}_2\,dS$$

4.

(1) Gauss の発散定理より，

$$\int_S \phi\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}\,dV$$

ここで，$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A} + \phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ であることに注意すると，

$$\int_S \phi\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A}\,dV + \int_V \phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV$$

(2) Gauss の発散定理より，

$$\int_S (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})\,dV$$

ここで，演習問題 3. り，$\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$．よって，

$$\int_S (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\,dV - \int_V \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\,dV$$

(3) Gauss の発散定理より，

$$\int_S ((\nabla\phi)\times\boldsymbol{A})\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \nabla\cdot((\nabla\phi)\times\boldsymbol{A})\,dV$$

ここで，

$$\nabla\cdot((\nabla\phi)\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times(\nabla\phi)) - (\nabla\phi)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = -(\nabla\phi)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

したがって，

$$\int_S ((\nabla\phi)\times\boldsymbol{A})\cdot\mathbf{n}dS = -\int_V (\nabla\phi)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}\,dV$$

(4) Gauss の発散定理より，

$$\int_S \phi\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A})\,dV$$

ここで，$\boldsymbol{A} = \nabla\phi, \nabla^2\phi = 0$ より，

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A} + \phi\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} + \phi\nabla\cdot(\nabla\phi) = |\boldsymbol{A}|^2 + \phi\nabla^2\phi = |\boldsymbol{A}|^2$$

したがって，

$$\int_S \phi\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V |\boldsymbol{A}|^2\,dV$$

5.

(1)

labelenshu:4-1-5-1 例題 4.3 のように，面積分の形に書き直す．$\frac{\partial\phi}{\partial n}$ は法線単位ベクトル $\mathbf{n}$ 方向での方向微分係数より，$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi\cdot\mathbf{n}$．よって，

$$\int_S \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS = \int_S \psi\nabla\phi\cdot\mathbf{n}dS$$

ここで，Gauss の発散定理を用いると，

$$\int_S \psi\nabla\phi\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \nabla\cdot(\psi\nabla\phi)\,dV$$

なお，$\nabla\cdot(\psi\nabla\phi) = (\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi) + \psi\nabla\cdot(\nabla\phi) = (\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi) + \psi\nabla^2\phi$ より，

$$\int_S \psi\nabla\phi\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \{\psi\nabla^2\phi + (\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi)\}\,dV$$

(2) 例題 4.3 のように，面積分の形に書き直す．$\frac{\partial\phi}{\partial n}$ は法線単位ベクトル $\mathbf{n}$ 方向での方向微分係数より，$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi\cdot\mathbf{n}$．よって，

$$\int_S \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS = \int_S \phi\nabla\phi\cdot\mathbf{n}dS$$

ここで，Gauss の発散定理を用いると，

$$\int_S \phi\nabla\phi\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \nabla\cdot(\phi\nabla\phi)\,dV$$

なお，$\nabla\cdot(\phi\nabla\phi) = (\nabla\phi)\cdot(\nabla\phi) + \phi\nabla\cdot(\nabla\phi) = |\nabla\phi|^2 + \phi\nabla^2\phi$ より，

$$\int_S \phi\nabla\phi\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \{\phi\nabla^2\phi + |\nabla\psi|^2\}\,dV$$

(3) (1) の結果から (2) の結果を引くと，

$$\int_S (\psi\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\phi}{\partial n})dS = \int_V \{\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\phi\}\,dV$$

(4) ϕ が調和関数とは，$\nabla^2\phi = 0$ となることである．したがって，(2) を用いると，

$$\int_S \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS = \int_V |\nabla\phi|^2\,dV$$

(5) ϕ, ψ が調和関数とは，$\nabla^2\phi = \nabla^2\psi = 0$ となることである．したがって，(3) を用いると，

$$\int_S (\psi\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\phi}{\partial n})dS = \int_V \{\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\phi\}\,dV = 0$$

(6) ϕ が調和関数とすると，(4) より，

$$\int_S \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS = \int_V |\nabla\phi|^2\,dV$$

S 上で $\phi = 0$ とすると，$\int_V |\nabla\phi|^2\,dV = 0$ となり，$|\nabla\phi|^2 = 0$. よって，$|\nabla\phi| = 0$. すなわち $\nabla\phi = 0$. したがって，ϕ は定数.

6. $\int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS = 0$ ならば，Gauss の発散定理より，

$$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = 0$$

したがって，$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$. 定理 3.4 より，$\mathbf{A}$ はベクトル・ポテンシャルを持つ.

7. $\int_S \mathbf{A}\times\mathbf{n}dS = \mathbf{0}$. ここで，任意の定ベクトル $\mathbf{C}$ を用いて，面積分の形に直すと，

$$\int_S \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{n})\,dS = \int_S \mathbf{n}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\,dS$$

Gauss の発散定理より，

$$\int_S \mathbf{n}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\,dS = \int_V \nabla\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})dV = 0$$

ここで, ,

$$0 = \nabla\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{C} - \mathbf{C}\cdot\nabla\times\mathbf{A} = -\mathbf{C}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})$$

したがって，$\nabla\times\mathbf{A} = 0$ となり，$\mathbf{A}$ はスカラー・ポテンシャルをもつ.

演習問題詳解 4.2

1.

1. Stokes の定理より，

$$\int_C (\nabla\phi\psi)\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times(\nabla\phi\psi))\cdot\mathbf{n}dS = 0$$

ここで，

$$\nabla\phi\psi = \psi(\nabla\phi) + \phi(\nabla\psi)$$

より，

$$\int_C \phi(\nabla\psi)\cdot d\mathbf{r} = -\int_C \psi(\nabla\phi)\cdot d\mathbf{r}$$

2.

(1) 線積分を $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ の形に直す．そこで，任意の定ベクトル $\mathbf{C}$ とスカラー 3 重積を用いると，

$$\int_C \mathbf{C}\cdot\mathbf{r}\times d\mathbf{r} = \int_C d\mathbf{r}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{r}$$

と表せる．ここで，Stokes の定理を用いると，

$$\int_C d\mathbf{r}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times(\mathbf{C}\times\mathbf{r}))\cdot\mathbf{n}dS$$

さて，

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\mathbf{C}\times\mathbf{r}) &= (\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{r}) \\
&= \mathbf{i}\times\frac{\partial(\mathbf{C}\times\mathbf{r})}{\partial x} + \mathbf{j}\times\frac{\partial(\mathbf{C}\times\mathbf{r})}{\partial y} + \mathbf{k}\times\frac{\partial(\mathbf{C}\times\mathbf{r})}{\partial z} \\
&= \mathbf{i}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{r}_x) + \mathbf{j}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{r}_y) + \mathbf{k}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{r}_z) \\
&= (\mathbf{i}\cdot\mathbf{r}_x)\mathbf{C} - (\mathbf{i}\cdot\mathbf{C})\mathbf{r}_x + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{r}_y)\mathbf{C} - (\mathbf{j}\cdot\mathbf{C})\mathbf{r}_y + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_z)\mathbf{C} - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{C})\mathbf{r}_z \\
&= (\mathbf{i}\cdot\mathbf{r}_x + \mathbf{j}\cdot\mathbf{r}_y + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_z)\mathbf{C} - ((\mathbf{i}\cdot\mathbf{C})\mathbf{r}_x + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{C})\mathbf{r}_y + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{C})\mathbf{r}_z) \\
&= (\nabla\cdot\mathbf{r})\mathbf{C} - (\mathbf{C}\cdot\nabla)\mathbf{r} +
\end{aligned}$$

ここで，

$$\{(\mathbf{C}\cdot\nabla)\mathbf{r}\}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{C}\cdot\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\mathbf{C}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{n} &= (\nabla\cdot\mathbf{r})\mathbf{C}\cdot\mathbf{n} - (\mathbf{C}\cdot\nabla)\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} \\
&= \mathbf{C}\cdot\{(\nabla\cdot\mathbf{r})\mathbf{n} - \nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\}
\end{aligned}$$

これより，

$$\int_C \mathbf{C}\cdot\mathbf{r}\times d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{C}\cdot\{(\nabla\cdot\mathbf{r})\mathbf{n} - \nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\}dS$$

ここで，C は任意の定ベクトルであるから，

$$\int_C \mathbf{r}\times d\mathbf{r} = \int_S \{(\nabla\cdot\mathbf{r})\mathbf{n} - \nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\}dS$$

最後に，

$$\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}) = (\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{r} + (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{n} + \mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{r}) + \mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{n}) = \mathbf{n}$$

したがって，

$$\int_C \mathbf{r}\times d\mathbf{r} = \int_S (3\mathbf{n} - \mathbf{n})dS = 2\int_S \mathbf{n}dS$$

(2) Stokes の定理を用いると,

$$\int_C r^k \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times (r^k \mathbf{r}))\cdot \mathbf{n} dS$$

ここで,

$$(\nabla r^k) \times \mathbf{r} + r^k \nabla \times \mathbf{r}) = kr^{k-2}\mathbf{r}\times\mathbf{r} + r^k(0) = kr^{k-2}\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{r} = 0$$

に注意すると,

$$\int_C r^k \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

(3) C を任意の定数ベルトルとし，Stokes の定理を用いると,

$$\int_C \mathbf{C}\cdot\mathbf{r}(\nabla\phi)\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}(\nabla\phi)))\cdot\mathbf{n}dS$$

ここで,

$$\nabla\times(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}(\nabla\phi)) = \nabla(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})\times(\nabla\phi) + (\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})\nabla\times\nabla\phi = \nabla(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})\times(\nabla\phi)$$

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}) &= (\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z})(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{i}\frac{\partial(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})}{\partial z}\\ &= \mathbf{i}(\mathbf{C}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}) + \mathbf{j}(\mathbf{C}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}) + \mathbf{k}(\mathbf{C}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z})\\ &= \mathbf{i}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{i}) + \mathbf{j}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{j}) + \mathbf{k}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{k}) = \mathbf{C}\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{C}\cdot(\nabla(\nabla\phi))\cdot d\mathbf{r} &= \int_S \mathbf{C}\times(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}(\nabla\phi))\cdot\mathbf{n}dS = \int_S (|bfC\times\nabla\phi)\cdot\mathbf{n}dS\\ &= \int_S \mathbf{C}\cdot(\nabla\phi\times\mathbf{n})dS\end{aligned}$$

したがって,

$$\int_C \mathbf{r}(\nabla\phi)\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\phi\times\mathbf{n})dS$$

3. Stokes の定理より,

$$\int_C \phi\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times\phi\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}dS$$

ここで,

$$\nabla\times(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\times\mathbf{A} + \phi\nabla\times\mathbf{A}$$

であることに注意すると,

$$\int_C \phi\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times\phi\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}dS = \int_S \{(\nabla\phi)\times\mathbf{A}\}\cdot\mathbf{n}dS + \int_S \{\phi\nabla\times\mathbf{A}\}\cdot\mathbf{n}dS$$

4. 線積分を $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ の形に直す．そこで，任意の定ベクトル $\mathbf{C}$ とスカラー 3 重積，Stokes の定理を用いると,

$$\int_C \mathbf{C}\cdot\frac{\mathbf{r}\times d\mathbf{r}}{r^3} = \int_C d\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{C}\times\mathbf{r}}{r^3} = \int_S (\nabla\times\frac{\mathbf{C}\times\mathbf{r}}{r^3})\cdot\mathbf{n}dS$$

と表せる．

ここで，ベクトル３重積を用いると

$$\begin{aligned}
\nabla \times \frac{\mathbf{C}\times\mathbf{r}}{r^3} &= (\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}) \times \mathbf{C} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\
&= \mathbf{i}\times\mathbf{C}\times\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\mathbf{r}}{r^3}) + \mathbf{j}\times\mathbf{C}\times\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\mathbf{r}}{r^3}) + \mathbf{k}\times\mathbf{C}\times\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\mathbf{r}}{r^3}) \\
&= \left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\mathbf{r}}{r^3})\right)\mathbf{C} - (\mathbf{i}\cdot\mathbf{C})\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\mathbf{r}}{r^3}) + \left(\mathbf{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\mathbf{r}}{r^3})\right)\mathbf{C} - (\mathbf{j}\cdot\mathbf{C})\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\mathbf{r}}{r^3}) \\
&\quad + \left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\mathbf{r}}{r^3})\right)\mathbf{C} - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{C})\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\mathbf{r}}{r^3}) \\
&= \mathbf{C}(\nabla\cdot(\frac{\mathbf{r}}{r^3})) - \mathbf{C}\cdot\nabla(\frac{\mathbf{r}}{r^3})
\end{aligned}$$

さらに，

$$\nabla\cdot(\frac{\mathbf{r}}{r^3}) = \nabla\cdot(r^{-3}\mathbf{r}) = -3r^{-4}\nabla r\cdot\mathbf{r} + r^{-3}\nabla\cdot\mathbf{r} = -3r^{-4}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{r} + 3r^{-3} = -3r^{-3} + 3r^{-3} = 0$$

より，

$$\int_C \mathbf{C}\cdot\frac{\mathbf{r}\times d\mathbf{r}}{r^3} = -\int_S \{\mathbf{C}\cdot\nabla(\frac{\mathbf{r}}{r^3})\}\cdot\mathbf{n}dS$$

ここで，$\mathbf{C}$ は任意の定ベクトルであるから，

$$\int_C \frac{\mathbf{r}\times d\mathbf{r}}{r^3} = -\int_S \nabla(\frac{\mathbf{r}}{r^3})\cdot\mathbf{n}dS$$

最後に，

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}\cdot\nabla(\frac{\mathbf{r}}{r^3}) &= (n_1\frac{\partial}{\partial x} + n_2\frac{\partial}{\partial y} + n_3\frac{\partial}{\partial z})(r^{-3}\mathbf{r}) \\
&= n_1(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\mathbf{r}}{r^3}) + \frac{1}{r^3}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}) + n_2(\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\mathbf{r}}{r^3}) + \frac{1}{r^3}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}) + n_3(\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\mathbf{r}}{r^3}) + \frac{1}{r^3}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}) \\
&= \mathbf{n}\cdot\nabla(\frac{1}{r^3})\mathbf{r} + \frac{\mathbf{n}}{r^3} = -3r^{-4}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{n}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{n}}{r^3} \\
&= -3\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{t^5}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{n}}{r^3}
\end{aligned}$$

5. Stokes の定理より，

$$0 = \int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}dS$$

よって，$\nabla\times\mathbf{A} = 0$．したがって，$\mathbf{A}$ はスカラー・ポテンシャルをもつ．

ベクトル解析のまとめ

ベクトル解析の問題を解くには以下の事柄を自分の物にしておくとよいでしょう.

基礎の基礎

ナブラ

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

ベクトルの外積

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}, \text{特に } \mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

スカラー３重積

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$$

ベクトル３重積

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

方向微分係数 方向単位ベクトル $\mathbf{n}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{n}$$

基本公式

位置ベクトルの大きさ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ の勾配

$$\nabla r = (\mathbf{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial r}{\partial z}) = \mathbf{i}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \mathbf{j}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \mathbf{k}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

位置ベクトル $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ の発散

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}) = 1 + 1 + 1 = 3$$

位置ベクトル $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ の回転

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

スカラー場とベクトル場の積の微分法

スカラー場の勾配

$$\nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi$$

$$\nabla r^n = \mathbf{i}\frac{\partial r^n}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial r^n}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial r^n}{\partial z} = \mathbf{i}(nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}) + \mathbf{j}(nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial y}) + \mathbf{k}(nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial z}) = nr^{n-1}\nabla r = nr^{n-2}\mathbf{r}$$

ベクトル場の発散

$$\nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{A} + \phi\nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (r^n\mathbf{r}) = (\nabla r^n) \cdot \mathbf{r} + r^n\nabla \cdot \mathbf{r} = nr^{n-1}\nabla r \cdot \mathbf{r} + 3r^n = (n+3)r^n$$

ベクトル場の回転

$$\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi\nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (r^n\mathbf{r}) = (\nabla r^n) \times \mathbf{r} + r^n\nabla \times \mathbf{r} = nr^{n-1}\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{r} = nr^{n-2}\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$$

勾配，発散，回転の合成

勾配の回転

$$\nabla\times(\nabla\phi)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}=0$$

回転の発散

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z})\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}=0$$

回転の回転

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z})\times(\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z})$$

ここで，

$$\begin{aligned}\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\times(\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z})&=(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x})\mathbf{i}-(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}+(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y})\mathbf{j}+(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z})\mathbf{k}\\&=\frac{\partial^2A_1}{\partial x^2}\mathbf{i}+\frac{\partial^2A_2}{\partial x\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial^2A_3}{\partial x\partial z}\mathbf{k}-\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2}\end{aligned}$$

よって，

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$$

外積の発散

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})&=(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\\&=\mathbf{i}\cdot(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x})+\mathbf{j}\cdot(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y})+\mathbf{k}\cdot(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z})\\&=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z})-\mathbf{A}\cdot(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}+\mathbf{j}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y}+\mathbf{k}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z})\\&=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})\end{aligned}$$

外積の回転

$$\begin{aligned}\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})&=(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z})\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\\&=\mathbf{i}\times(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x})+\mathbf{j}\times(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y})+\mathbf{k}\times(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z})\\&=(\mathbf{i}\cdot\mathbf{B})\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}-(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x})\mathbf{B}+(\mathbf{j}\cdot\mathbf{B})\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}-(\mathbf{j}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y})\mathbf{B}+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B})\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}-(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z})\mathbf{B}\\&=(B_1\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}+B_2\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}+B_3\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z})-(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}+(\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}-(A_1\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}+A_2\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y}+A_3\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z})\\&=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}-(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}\end{aligned}$$

内積の勾配

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$$

積分公式

ガウスの発散定理 ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ 内において，区分的に滑らかな閉曲面 S で囲まれた空間の領域を V とし， S の内部から外部に向かう法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とすると，

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}dV$$

例題 5.1 $\int_S \mathbf{r}\times\mathbf{n}\,dS = 0$ を証明せよ.

解 任意の定ベクトル $\boldsymbol{C}$ とスカラー 3 重積の性質を用いると

$$\int_S \boldsymbol{C}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{n})\,dS = \int_S \mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{C}\times\mathbf{r}) = \int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{C}\times\mathbf{r})\,dV = -\int_V \boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\mathbf{r}) = 0$$

ここで，$\boldsymbol{C}$ は任意の定ベクトルより，$\int_S \mathbf{r}\times\mathbf{n}\,dS = 0$.

ストークスの定理 $S : z = f(x,y), (x,y)\in\Omega$ をいくつかの区分的に滑らかな閉曲線を境界とする向きづけられた曲面とする．また，ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ は S 上で C^1 級とする．そのとき，

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

ただし， ∂S は S の境界を表わし，曲線 ∂S 上の線積分の向きは領域 S を左手にみるように ∂S を一周するものとする．つまり，法線単位ベクトル $\mathbf{n}$ に対して右手の法則に従う.

例題 5.2 $\int_C \phi(\nabla\psi)\cdot d\mathbf{r} = -\int_C \psi(\nabla\phi)\cdot d\mathbf{r}$ を証明せよ.

解 $\int_C (\nabla\phi\psi)\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times(\nabla\phi\psi))\cdot\mathbf{n}dS = 0$. ここで，$\nabla\phi\psi = \psi(\nabla\phi) + \phi(\nabla\psi)$ より，

$$\int_C \phi(\nabla\psi)\cdot d\mathbf{r} = -\int_C \psi(\nabla\phi)\cdot d\mathbf{r}$$

スカラー・ポテンシャル ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x,y,z) \quad \in C^1$ では次の 3 つの条件は同値である.

(1) $\boldsymbol{F} = \nabla\phi$ となるスカラー関数 $\phi(x,y,z)$ が存在する.（$\boldsymbol{F}$は保存場)

(2) いたるところ $\nabla\times\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ が成り立つ. (渦なし)

(3) 任意の閉曲線 C について $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ が成り立つ (積分経路無関係).

例題 5.3 xy 平面上で原点 O を中心とし半径 a の円を C とする．$\phi(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ のとき，$\int_C (\nabla\phi)\cdot d\mathbf{r}$ を求めよ.

解 $\mathbf{F} = \nabla\phi$ より，$\int_C (\nabla\phi)\cdot d\mathbf{r} = 0$ は間違い．$\mathbf{F} = \nabla\phi = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}\mathbf{i} + \frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}\mathbf{j} = \frac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{x^2+y^2}$ は原点で微分可能でない.

$C : x = a\cos t, y = a\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$ とパラメター化できる．これより，$\nabla\phi = \frac{-\sin t}{a}\mathbf{i} + \frac{\cos t}{a}\mathbf{j}$. また，$d\mathbf{r} = (-a\sin t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j})dt$. したがって，

$$\int_C (\nabla\phi)\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j})\cdot(-\sin t + \cos t)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

例題 5.4　S が円柱面 $x^2+y^2=9$ と平面 $z=0, z=3$ で囲まれている曲面のとき，$\int_S (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}dS$ を次の方法で求めよ．

(1) 発散定理を用いて　　　　　(2) 面積分を直接

(1) $\mathbf{A}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ とおくと，$\nabla\cdot\mathbf{A}=3$．よって，発散定理より，

$$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS=\int_V(\nabla\cdot\mathbf{A})dV=3\int_V dV=3V=3(\pi(3)^2)(3)=81\pi$$

(2) まず，曲面 S は 3 つの面 $S_1: x^2+y^2=9, 0\leq z\leq 3$，$S_2: x^2+y^2\leq 9, z=0$, $S_3: x^2+y^2\leq 9, z=3$ で囲まれている．そこで，それぞれの面での面積分を求めることになる．

面 S_1 において，単位法ベクトルを求める．$x^2+y^2=9$ より，$x=\pm\sqrt{9-y^2}$．$x>0$ の場合，位置ベクトル $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=\sqrt{9-y^2}\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$．これより，単位法ベクトル $\mathbf{n}$ は

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_y\times\mathbf{r}_z}{|\mathbf{r}_y\times\mathbf{r}_z|}=\frac{(-\frac{y}{\sqrt{9-y^2}}\mathbf{i}+\mathbf{j})\times\mathbf{k}}{|\mathbf{r}_y\times\mathbf{r}_z|}=\frac{\sqrt{9-y^2}\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{3}$$

よって，

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}=(\sqrt{9-y^2}\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\cdot\frac{\sqrt{9-y^2}\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{3}=\frac{1}{3}(9-y^2+y^2)=3$$

ここで，S_1 を yz 平面に正射影すると，$dS=|\mathbf{r}_y\times\mathbf{r}_z|dydz=\frac{3}{\sqrt{9-y^2}}dydz$ より，

$$\int_{S_1,x>0}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS=9\int_{y=-3}^{3}\int_{z=0}^{3}\frac{1}{\sqrt{9-y^2}}dzdy=27\int_{-3}^{3}\frac{1}{9-y^2}dy=54\left[\sin^{-1}\frac{y}{3}\right]_0^3=27\pi$$

しかし，これは，円柱面 $x^2+y^2=9, 0\leq z\leq 3$ の $x>0$ の部分であるから，積分しなくてもその面積は 27π と求まる．

$x<0$ の場合，位置ベクトル $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=-\sqrt{9-y^2}\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$．これより，単位法ベクトル $\mathbf{n}$ は

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_z\times\mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_z\times\mathbf{r}_y|}=\frac{\mathbf{k}\times(\frac{y}{\sqrt{9-y^2}}\mathbf{i}+\mathbf{j})}{|\mathbf{r}_z\times\mathbf{r}_y|}=\frac{-\sqrt{9-y^2}\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{3}$$

よって，

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}=(-\sqrt{9-y^2}\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\cdot\frac{-\sqrt{9-y^2}\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{3}=\frac{1}{3}(9-y^2+y^2)=3$$

したがって，

$$\int_{S_1}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS=\int_{S_1}3dS=3S_1=3(2\pi(3))(3)=54\pi$$

面 S_2 では $\mathbf{n}=-\mathbf{k}$．よって，$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}=-z$．　しかし，$z=0$ より，$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}=0$．したがって，

$$\int_{S_2}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS=0$$

面 S_3 では $\mathbf{n}=\mathbf{k}$．よって，$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}=z$．　ここで，$z=3$ より，$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}=3$．したがって，

$$\int_{S_3}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS=3\int_{S_3}dS=3S_3=3(9\pi)=27\pi$$

全てを加えると，

$$\int_S\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS=81\pi$$