確率論入門

横田 壽

目 次

第1章　個数の処理

1.1　順列・組み合わせ

ある事柄が何通りの起こり方があるかを考えるとき，その起こり方の個数を**場合の数**という．

番号のついた n 個の異なったものをある規則のもとに順に並べたものを**順列** (permutation) といい，順列の総数を**順列の数**という．

- **順列**　異なる n 個のものから r 個とって 1 列に並べる順列の数は

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} $$

　である．特に，${}_nP_n = n!$，$0! = 1$ とする．

- **重複順列**　異なる n 個のものから重複を許して r 個とる順列の数は

$$ {}_n\Pi_r = n^r $$

- **円順列**　異なる n 個のものを円形に並べる順列の数は

$$ (n-1)! $$

- **同じものを含む順列**　n 個のもののうち，p 個，q 個, ..., r 個がそれぞれ同じであるとき，これらを 1 列に並べる順列の数は

$$ \binom{n}{p, q, \ldots, r} = \frac{n!}{p!q!\cdots r!},\ p + q + \cdots + r = n $$

並べる順序は考えずに，複数個から幾つか選んだ組を**組合せ** (combination) という．

- **組み合わせ** 異なる n 個のものから r 個とる組み合わせの数は

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

　である．特に，${}_nC_0 = 1$，${}_nC_n = 1$ とする．

- **幾つかの組に分ける**　n 個の物を，p 個，q 個, ..., r 個の組に分ける組合せの数は

$$\binom{n}{p, q, \ldots, r} = \frac{n!}{p!q!\cdots r!},\ p+q+\cdots+r=n$$

- **重複組合せ**　n 個の異なるものから，繰り返しを許して，r 個とるときの組合せの数は

$${}_nH_r = \binom{n+r-1}{r} = \frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}$$

演習問題 1.1

1.　0 から 6 までの 7 個の数字を取り出して並べるとき，次のような 4 けたの整数はいくつあるか求めよう．

(a)　すべての数字が異なる場合

(b)　5 の倍数

(c)　同じ数字が重複してもよい場合

2.　1 から 10 までの番号のついたカードから 6 枚を取り出すとき，次のような場合の数を求めよう．

(a)　すべての場合

(b)　1 と 2 のカードを含む場合

(c)　1 または 2 のカードを含む場合

3. 1 枚の硬貨を 5 回投げるとき，次の場合は何通りあるか求めよう．

(a)　表の出る回数が 0 回，1 回，2 回，3 回，4 回，5 回のそれぞれの場合

(b)　起こりえるすべての場合

4. a, b, c, d, e, f の文字を一列に並べるのに次の場合は何通りあるか求めよう．

(a)　a, b が隣あう場合

(b)　a, b が隣合わない場合

(c)　a, b が両端にくる場合

5.　a, a, a, a, b, b, c, d の 8 個の文字を並べる順列の総数は $\binom{8}{4,2,1,1}$ で与えられることを示せ．

第2章　確率モデル

2.1　確率の定義

さいころを投げてどの目が出るか，1 枚の硬貨を投げて表がでるか裏が出るかは，実際に投げてみないと分からない．このように，ほぼ一定の条件のもとで，繰り返し起こる現象を観察したり実験することを**試行 (experiment)** という．試行によって起こる結果 (outcome) は一般に多数あるが，その起こる事柄を**事象 (event)** という．また，試行によって起こりえるすべての事象の集まりを**標本空間 (sample space)** といい，一般に Ω で表す．事象のうち，これ以上簡単なものに分解できないような事象を**根元事象**という．

例 2.1　さいころを投げるという試行を行う．このとき，根元事象は

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

の 6 つであり，標本空間 Ω は $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ である．ここで，出た目が偶数であるという事象 E を考えると，$E = \{x : x \text{ は偶数 }\} = \{2, 4, 6\}$ となる．

- **理論的確率**　ある試行において起こりえる標本空間 Ω の根元事象が全部で n 個あり，それらのどれが起こることも同様に確からしいとする．このとき．ある事象 A の起こる根元事象が r 個であるとき，事象 A の起こる確率を
$$P(A) = \frac{r}{n}$$
で定義する．

- **統計的確率**　ある試行を繰り返し n 回おこなってとき，事象 A が r 回起こったとする．いま，試行の回数 n を増やしていくとき，相対度数 r/n が一定の値 p に近づくならば，事象 A の起こる確率を p と定義する．これを**統計的確率**という．

演習問題 2.1

1.　1 個のさいころを 6 回投げるとき，次の確率を求めよう．

(a)　1 の目が 1 回出る．

(b)　1 の目が 4 回出る．

(c)　1 の目が出るのは 4 回以下である．

(d)　1 の目が出るのは 5 回以上である．

2. 1 つの袋に白玉が 5 個，赤玉が 3 個，黒玉が 2 個入っている．その中から 4 個の球を取り出すとき，次の確率を求めよう．

(a) 全部が白である場合．

(b) 白がちょうど 2 個である場合．

(c) 白が 2 個以内．

(d) 白が 2 個，赤が 2 個．

(e) 白，赤，黒がともに含まれている場合

3. 1 から 10 までの番号のついたカードがある．これらのカードを勝手に 1 列に並べるとき，次の確率を求めよう．

(a) 1 から 10 までがその順に並ぶ場合

(b) 4 のカードがちょうど 4 番目にある場合

(c) 1 が最初に，4 が 4 番目にある場合

4. 広い方眼紙に縦横に 8cm 間隔に線を引いて，8cm 四方の正方形が沢山かかれているとする．直径が 3cm の円板を投げるとき，次の確率を求めよう．

(a) 円板が 1 つの正方形の中に入る．

(b) 円板が正方形の辺にかかる．

(c) 円板が 4 つの正方形にまたがる．

5. 4 個の白玉と 6 個の赤玉のはいっている袋がある．この袋から，同時に 2 個を取り出すとき次の確率を求めよう．

(a) 2 個とも白玉である確率

(b) 1 個だけ白玉である確率

(c) 少なくとも 1 個は白玉である確率

2.2 確率の公理

事象 A と事象 B とが同じであるとき，$A = B$ と書く．事象 A が事象 B に含まれているとき，$A \subset B$ と書く．

- **全事象** 標本空間 Ω 自身で表される事象
- **和事象** 事象 A，B の少なくとも一方が起こる事象．$A \cup B$ で表す．
- **積事象** 事象 A，B がともに起こる事象．$A \cap B$ で表す．
- **余事象** 事象 A に対して A が起こらない事象．$\overline{A}$ で表す．
- **空事象** 決して起こらない事象．ϕ で表す．

事象の演算について，集合の場合と同様に次の関係式が成り立つ．

1. 全事象を Ω，空事象を ϕ とするとき，

$$\Omega = \Omega \cup \phi, \phi = \Omega \cap \phi$$

2. 任意の事象 A に対して

$$A \cap \overline{A} = \phi,\ A \cup \overline{A} = \Omega$$

3. 任意の事象 A, B, C に対して

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

4. 任意の事象 A, B に対して（DeMorgan の法則)

$$(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

5. 任意の事象 A，B，C に対して，

$$(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \phi,\ A = (A \cap B) \cup (A \cup \overline{B})$$

定理 2.1 (確率の公理) 標本空間 Ω の任意の事象 A に対して，次の公理を満足する実数 $P(A)$ が定まるとき，$P(A)$ を事象 A の確率といい，確率が考えられる事象を**確率事象**という．

1.

$$0 \le P(A) \le 1$$

2.

$$P(\Omega) = 1, P(\phi) = 0$$

3. 事象の列 $A_1, A_2, \ldots, A_i \ldots$ のいずれの 2 つも互いに排反であれば，

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

が成り立つ．この性質を確率に関する**完全加法性**という．

条件確率 事象 A を固定して，事象 B の関数として

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

と定義すると，この関数は確率の公理を満たす．これを事象 A が起こったときの事象 B の**条件付き確率**という．

事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が互いに排反であり，

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$$

ならば，任意の事象 B に対して

$$B = B \cap \Omega = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2 \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$$

と表せる．よって，

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

ここで，条件付き確率より，$P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$ となるので，

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots P(A_n)P(B|A_n)$$

で求めることができる．これを **Bayes の定理**という．

演習問題 2.2

1.　$A =$ [さいころを 4 回投げて少なくとも 1 回 6 の目がでる]．$B =$ [2 個のさいころを同時に 24 回投げて少なくとも 1 回 2 個とも 6 の目がでる] とするとき，

(a) $P(A)$ を求めよう．

(b) $P(B)$ を求めよう．

2.　ある患者がある種の症状を訴えてきた．医師の経験から，同じ年齢層の人がその症状を訴えるとき，約 5%の人がガンであることを知っている．一方，ある精密検査によって真のガン患者に対しては 85%の陽性反応を示し，ガン患者でない人にも 5%の陽性反応を示す．もしある患者がその精密検査の結果陽性反応を示した場合，その患者がガン患者である確率を求めよう．
3. 次の関係を示そう．

(a) $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$

(b) $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$

(c) B と C が互いに排反ならば，$P((B \cup C) \mid A) = P(B \mid A) + P(C \mid A)$

第3章　確率変数

3.1　確率変数

- **確率変数**　$x_1, x_2, \ldots, x_n$ なる n 個の値をとる変数 X に対して，$X = x_i$ なる確率 p_i が与えられているとき，X を**確率変数**という．
- **確率分布**　確率変数 X とそれに対応する確率 $P(X = x_i)$ との対応関係を**確率分布**という．
- **分布関数**　確率変数 X の値がある値 x までとる確率を $F(x)$ で表し，確率変数 X の**分布関数**という．つまり，分布関数は $F(x) = P(X \leq x)$ で与えられる．

確率変数 X のとる値が有限個または，無限個であっても自然数で番号が付けられる場合，確率変数 X は**離散型**であるという．また，確率変数 X がある区間内の全ての実数を取り得る場合，**連続型**であるという．

離散型の場合

確率変数 X のとる値を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ とし，各事象 $(X = x_i)$ の確率を $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とするとき，

$$P(X = x_i) = p_i \ (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \sum p_i = 1, (p_i \geq 0)$$

で表される．これより，X の確率分布 f は

X の値 x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i) = p_i = f(x_i$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

また，確率変数 X のとる値を $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ とするとき，その分布関数 $F(x_r)$ は次のように求められる．

$$F(x_r) = P(X \leq x_r) = p_1 + p_2 + \cdots + p_r = \sum_{i=1}^{r} p_i$$

確率分布 f と分布関数 F は次の性質をもつ．

1. $0 \leq p_i = f(x_i) \leq 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$
2. $F(x_n) = P(X \leq x_n) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$
3. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
4. $a < b \Longrightarrow F(a) < F(b)$

連続型の場合

確率変数 X が連続的な値をとるとき，事象 $\{X \leq x\}$ の確率が連続関数 $F(x)$ によって，

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

で与えられるとき，$F(x)$ を X の**分布関数**といい，$f(x)$ を**確率密度関数**という．

演習問題 3.1

(1) 男児と女児の出生率が等しいと仮定して，4 児を持つ家庭の確率変数 X の値と確率分布 f を求めよ．
(2) 1 つの袋に赤玉 4 個と白玉 6 個が入っている．同時に 3 個の球を取り出す場合，赤玉の個数を表わす確率変数 X と確率分布 f を求め，そのグラフをかこう．また，$P(X = 1), P(1 \leq X \leq 3)$ を求めよう．

3. 与えられた a, b $(a < b)$ に対して，関数 $f(x) = \begin{cases} k & (a < x \leq b) \\ 0 & (x \leq a, x > a) \end{cases}$
が与えられている．

(a) $f(x)$ が確率密度関数であるためには，定数 k はどのような値であるか.

(b) $a \leq c \leq b$ である c に対して $P(X \leq c)$ を求めよ．

4. 確率密度が

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 & \\ 6x(1-x) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

で与えられている．

(a) 分布関数 $F(x)$ を求めよ．

(b) $P(X \leq 0.7)$, $P(0.2 < X \leq 0.8)$ を求めよ．

5. 関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

が与えられている．

(a) $f(x)$ は確率密度関数を与えることを示せ．

(b) $P(X \leq a) = 0.1$, $P(X > b) = 0.05$ であるような a, b を求めよ．

3.2　2 次元確率分布

離散型の場合，2 つの確率変数の取り得る値をそれぞれ

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_l$$

とし，

$$P_r(X = x_i) = p_i$$

$$P_r(Y = y_j) = q_j$$

とする。ここで,「$X = x_i$ かつ $Y = y_j$」という事象の確率を

$$P_r(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij},\ i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, l$$

で表す。このとき，

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{l} p_{ij} = p_i, \\ \sum_{i=1}^{k} p_{ij} = q_j \\ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} p_{ij} = \sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{j=1}^{l} q_i = 1 \end{cases}$$

となる。このような分布を **2 次元確率分布**という。

演習問題 3.2

1.　2 個のサイコロの出る目の確率変数を X, Y とするとき，積 XY の確率分布と分布関数を求めよ.
2.　一枚の銅貨を投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 と表すことにする．3 枚の銅貨を投げるとき，それぞれの銅貨の表が出ることの確率変数を X, Y, Z とする.

(a)　和 $X + Y + Z$ の確率分布を求めよ.

(b)　和 $X + Y + Z$ の分布関数を求めよ.

3.3　確率変数の平均値と分散

確率変数 X に対して，次の式で定義される値 $E(X)$ を X の**平均値**または**期待値 (Expectation)** といい，$V(X)$ を X の分散という。

離散型の場合 $p_i = P(X = i)$

1. $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_kp_k = \sum_{i=1}^{k} x_ip_i$

2. $V(X) = (x_1 - E(X))^2p_1 + (x_2 - E(X))^2p_2 + \cdots + (x_k - E(X))^2p_k = \sum_{i=1}^{k}(x_i - E(X))^2p_i$

連続型の場合 $P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

1. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

2. $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E(x))^2f(x)dx$

$aX + b$ の期待値と分散

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)dx = a\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx \\ &= aE(X) + b \qquad \left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx = 1 \text{ に注意}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= \int_{-\infty}^{\infty}[(ax+b) - (aE(x)+b)]^2f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}a^2(x-E(x))^2f(x)dx \\ &= a^2V(X) \end{aligned}$$

演習問題 3.3

1. $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

のとき次の問いに答えよう．

(a) $f(x)$ は確率密度関数であることを示そう．

(b) 分布関数 $F(x)$ を求めよう．

(c) $P_r(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$ を求めよう．

(d) $E(X), V(X)$ を求めよう．

2. 1 つのサイコロを，3 回投げるとき，1 の目が出る回数を X とする．

(a) X の確率分布を求めよう．

(b) X の平均と標準偏差を求めよう．

(c) X を標準化した確率変数 Z を求め，更に，Z の確率分布を求めよう．

3. Bernoulli の定理を利用して，次の確率を求めよう．

(a)　1 枚の硬貨を 1000 回投げたとき，表が現われる回数 r が

$$\left|\frac{r}{1000} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10}$$

を満たす確率.

(b)　2 枚の硬貨を 1000 回投げたとき，2 枚とも表が現われる回数 r が，

$$\left|\frac{r}{1000} - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{10}$$

をみたす確率.

(c)　1 枚の硬貨を 2000 回投げて，表の出る回数が 1000 回より 50 回以内の偏りである確率を求めよ.

(d)　1 枚の硬貨を 2000 回投げて，表の出る割合と理論的確率 0.5 との差が 5% 以内である確率が 99% 以上であるようにするには，何回以上投げればよいか.

3.4　多次元確率分布

演習問題 3.4

1.　1 枚の銅貨を投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 と表わすことにする．3 枚の銅貨を投げるとき，それぞれの銅貨の表がでることの確率変数を X, Y, Z として，次の問に答えよ．

(a) その和 $X+Y+Z$ の確率分布と分布関数を求めよ．

(b) 表の出る枚数 $X+Y+Z$ の平均値と分散を求めよ．

2.　確率変数 X の確率密度が次の式

$$f(x)=\begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられるとき，次の確率変数 Y, Z の確率密度，平均値，分散を求めよ．

(a)　$Y=2X+3$

(b)　$Z=X^2$

3.　2 つのさいころを投げて出た目を確率変数 X, Y とする．

(a) 積 XY の期待値を求めよ．

(b) 積 XY の分散を求めよ．

第4章　理論分布

4.1　2項分布

次の 1 〜 3 を満たす試行をベルヌーイ試行という．

1. 各試行において，その事象が発生するか否かのみを問題にする．
2. 各試行は統計的に独立．
3. 対象とする事象が発生する確率は，各試行を通じて一定．

1 回の試行において，ある事象 X が発生する確率を p とする。n 回のベルヌーイ試行列において，ちょうど i 回事象 X が発生する確率は

$$P_r(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

で表され，このとき X の確率分布を 2 項分布といい，$X \sim B(n, p)$ と表す．

演習問題 4.1

1. 2 項分布 $B(8, 0.4)$, $B(8, 0.2)$ の確率分布を求めよ．
2.　ある会社で製造したプラモデルは 25 セット中 2 セットの割合で部品がかけているとする．客が任意に 3 セット選ぶとき，いずれも完全なセットである確率を求めよ．
3.　ある試薬をネズミに注射すると一定期間のうちに 40% が死亡するという．8 匹のネズミにその試薬を注射した場合，

(a) 8 匹全部が一定期間以上生存する確率を求めよ．

(b) 95% の確率で，8 匹のうち何匹以上が生存するということができるか．

4.2　ポワソン分布

次の 1 ～ 5 の条件を満たすものを**ポワソン過程**という。

1. 事象はいかなる時点でもランダムに発生しうる。
2. 与えられた時間区間での事象の発生は，それと重複しない他の区間に対して独立である。
3. 微小時間 Δt における事象の発生確率は Δt に比例して小さくなっている。
4. 微小時間 Δt の間に事象が 2 回以上発生する確率は無視できる。
5. 時間 t の間に当該事象が発生する平均発生回数 λ がおおむね 5 以下である。

X をポワソン過程における事象の発生回数とすると，

$$P_r(X=r)=\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}$$

となり，$X \sim P_o(\lambda)$ と表す。ただし，λ はポワソン過程における事象の平均発生回数。
ポワソン過程には，テープの傷，交換台にかかってくる電話，電球の破損，タクシー待ちなどがある。

演習問題 4.2

1.　交通事故による死亡者が 1 日平均 0.8 人であるとき，次の確率はいくらか.

(a) 死亡者 0 の日.

(b) 死亡者 6 名以上.

2. ある放射性物質から 1 秒間に放出される粒子の数は平均して 3 個である．1 秒間に 0，1，2，3，4，5，6 個の粒子が放出される確率を求めよ．1 秒間に少なくとも 1 個の粒子が放出される確率はいくらか.
3. ある磁気テープには，平均して 100m あたりに 2 個の傷があることが分かっている．このとき，300m の長さのテープ一巻中に傷が全くない確率を求めよ.

4.3 正規分布

確率変数 X の確率密度関数が

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} EXP\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\ -\infty < x < \infty$$

で与えられるとき，確率変数 X は正規分布に従うといい，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ と表わします.
また，

$$P_r(0 \leq Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

の値は標準正規分布表として与えられている。

標準化

確率変数 X の平均 $E(X)$ を 0 に，分散 $V(X)$ を 1 に直すことを標準化といいます.

標準化の方法

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$$

とおくと

$$E(Z) = 0,\ V(Z) = 1$$

になります.

一様分布

確率変数 X の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

で与えられるとき，確率変数 X は一様分布に従うといい，$X \sim U(a, b)$ と表わします.

例題 4.1 電車が *20* 分間隔で走っているとする．ランダムにホームに着いたとき，*15* 分以上待つ確率を求めよ．

解 X を電車の待ち時間とすると，$X \sim U(a, b)$ である．このとき，

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & 0 < x < 20 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

よって，15 分以上待つ確率は，

$$P_r(15 \leq X \leq 20) = \int_{15}^{20} f(x)dx = \int_{15}^{20} \frac{1}{20} dx = \frac{1}{4}$$

正規分布の応用

定理 4.1 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が互いに独立で正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っているとすると，

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

定理 4.2 (中心極限定理) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が互いに独立で同じ分布にに従っているとする．このとき，n が十分大きければ

$\bar{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ は近似的に $\sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ に従う．

定理 4.3 (ラプラスの定理) $X \sim B(n,p)$ のとき，十分大きな n に対して

X は近似的に $N(np, np(1-p))$ に従う．

演習問題 4.3

1. $X \sim N(170, 10^2)$ のとき，次の確率を求めよう．

(a) $P_r(X \leq 160)$

(b) $P_r(160 \leq X \leq 175)$

2. $Z \sim N(0,1)$ のとき，次の式を満たす λ を求めよ．

(a) $P_r(Z > \lambda) = 0.05$

(b) $P_r(|Z| > \lambda) = 0.05$

3. 全国の 20 才に男子の身長は正規分布 $N(168.9, 5.6^2)$ に従うものとする．

(a) 身長の大きさに順に総数を 10 等分するためには，境界値をいくらにすればよいか．

(b) 20 才の男子 120 名を抽出して，身長の平均値が 168.9cm より 1.3cm 以上かたよる確率を求めよ．

4. 2 項分布，ポワソン分布，正規分布について，次のことがいえます．
$X \sim B(n,p)$ のとき，

$$X \sim \begin{cases} P_o(\mu) & , np \leq 5 \\ N(\mu, \sigma^2) & , np > 5 \end{cases} \quad \text{で近似される}$$

このことを用いて次の質問に答えよう．

(a) $X \sim B(100, 0.02)$ のとき，$P_r(X \geq 2)$ を求めよ．

(b) $X \sim B(100, 0.2)$ のとき，$P_r(X \geq 25)$ を求めよ．

(c) 1 個のさいころを 600 回投げて，1 の目の出る回数 S が 90 回以上 100 回以下である確率を近似せよ．

(d) 100 枚の偏りのない硬貨を同時に投げる．表の出る回数が 40 以上 60 以下の確率を近似せよ．

4.4　幾何分布

繰返し独立に試行を行うとき，注目している事象が初めて起こる直前までの試行回数を X とし，p を注目している事象が起こる確率とすると，注目している事象が $i+1$ 回目に起こる確率は，

$$P_r(X=i) = (1-p)^i p$$

となる。このとき，確率変数 X は幾何分布 $G_e(p)$ に従うといい，

$$X \sim G_e(p)$$

と表す。また，

$$E(X) = \frac{q}{p},\ V(X) = \frac{q}{p^2}$$

で与えられる。

期待値 $E(X)$ を求める一つの方法に，母関数 (generating function) を用いる方法がある。

離散型の場合

$\eta(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X=k)$ とおくと，$\eta'(t) = E(Xt^{X-1})$ より，$t=1$ のとき，$\eta(1) = E(X)$ となる。よって，期待値は $\eta(t)$ が求まれば微分することにより求めることができる。

連続型の場合

$\phi(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x)$ とおき，e^{tx} を整級数で置き換えると，

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{k} \frac{(tx)^k}{k!} dF(x) \\
&= \sum_{0}^{k} \frac{t^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x) \\
&= \sum_{0}^{k} \frac{t^k}{k!} E(X)
\end{aligned}$$

これより，

$$\phi'(t) = \sum_{1}^{k} \frac{kt^{k-1}}{k!} E(X)$$

ここで，$t=0$ とおくと，

$$\phi'(0) = E(X)$$

となる。

演習問題 4.4

1.

(a) $X \sim G_e(p)$ のとき，

$$E(X) = \frac{q}{p},\ V(X) = \frac{q}{p^2}$$

を示そう．ただし，$q = 1 - p$.

(b) 勝率 3 割のチームは平均して何試合目にはじめて勝つか求めよ．

4.5 超幾何分布

壺のなかに白玉が N_1 個，黒玉が N_2 個入っている。この中から 1 個ずつ，元に戻さない（非復元抽出) で n 個の玉を取り出すときの白玉の個数を X とする。白玉の数が i 個の確率は

$$P_r(X=i)=\frac{\binom{N_1}{i}\binom{N_2}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

となる。このとき，確率変数 X は超幾何分布に従うといい，

$$X \sim H_g(N, N_1, n)$$

と表す。また，

$$E(X)=\frac{nN_1}{N},\ V(X)=\frac{nN_1}{N}\cdot\frac{n-N_1}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

演習問題 4.5

1 10 本のくじがあり，そのうち 4 本が当たりで残り 6 本が外れである．いま 3 本くじを引いて，そのうち 2 本が当たる確率を求めよ．

4.6 指数分布

確率変数 X の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^{-\lambda x}, & 0 < x < \infty \\ 0, & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

で与えられるとき，確率変数は**指数分布**に従うといい，$X \sim E_x(\lambda)$ で表します．ここで，

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

で与えられる．

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x(\lambda e^{-\lambda x})dx = \lambda\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx \begin{pmatrix} u = x & dv = e^{-\lambda x}dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{pmatrix} \\ &= \lambda\left[-\frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

これより，期待値 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ となる．

分散は母関数を用いて求める．

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \lambda e^{(t-\lambda)x}dx \\ &= \lambda\frac{1}{t-\lambda}e^{(t-\lambda)x}\ |_{-\infty}^{\infty} \\ &= -\frac{\lambda}{t-\lambda} \end{aligned}$$

これより，

$$\Phi'(t) = \frac{\lambda}{(t-\lambda)^2},\ \Phi'(0) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

演習問題 4.6

1. ある人の通話時間 X は平均 3 分の指数分布に従うものとする．
(a) その人の通話が 4 分以内に終わる確率を求めよ．
(b) また，その人が通話をはじめてから 2 分が経過しているとき，その後 4 分以内に終わる確率を求めよ．

4.7　ガンマ分布

確率変数 X の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & 0 < x < \infty \\ 0, & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

で与えられるとき，確率変数は**ガンマ分布**に従うといい，$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ で表します．ここで，

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \tag{4.1}$$

で与えられます．

ガンマ関数の特徴

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

$$E(X) = \alpha\beta,\ V(X) = \alpha\beta^2$$

式 (4.1) の両辺を $\Gamma(\alpha)$ で割ると，

$$1 = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

ここで，x を $\frac{x}{\beta}$ で置き換えると，

$$1 = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

ここで，被積分関数を $f(x)$ とおくと，ガンマ関数の定義が得られる．また，この式より，ガンマ関数は確率密度関数であることも分かる．

演習問題 4.7

1. あるガスステイションで 1 週間に売れるガソリンの量 X キロリットルは，次の密度関数をもつ分布に従っているとする．

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-1}\{-(x-2)^2+2\}, & 1 < x < 3 \\ ce^{-(x-2)}, & x \geq 3 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

(a) 定数 c の値を定めよ．

(b) $2.5 \leq X \leq 3.5$ となる確率を求めよ．

2. 日本人の血液型は A 型 35%，B 型 25%，AB 型 10%，O 型 30%であるといわれている．いま，4 人いたとき，4 人とも血液型が異なる確率を求めよ．

3.. 電話での通話時間は平均 2 分の指数分布に従うとする．電話ボックスにすでに話し中の人も含めて 3 人いたとき，10 分以上待たなければならない確率を求めよ．

第5章　標本分布

5.1　統計量と標本分布

母集団からの大きさ n の無作為標本 $X_1, X_1, \ldots, X_n$ とするとき，各変数は母集団の分布と同じ分布に従う確率変数と考えられる。これを**標本確率変数**とよぶ。ここで，母平均値 μ，母分散 σ^2 が存在するものとすると，標本確率変数 $X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ は互いに独立に母集団に従う。よって，

$$E(X_i) = \mu,\ V(X_i) = \sigma^2$$

である。ここで，標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を用いて母平均と母分散を推定することを考える。

まず，素朴に考えて，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を n 個のデータの集まりとして，その平均と分散を求めると，

$$\begin{array}{ll} \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, & \text{標本平均} \\ S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, & \text{標本分散} \end{array}$$

となる。

演習問題 5.1

1. $\bar{X}, S^2$ は母平均 μ, 母分散 σ^2 を推測するのに適当な統計量だろうか。ここで，統計量とは標本確率変数 X_i の関数のことである。

5.2 χ^2 分布

χ^2 分布は 1 つの自然数 n を含む連続型分布で，$\chi^2(n)$ と表し n をその自由度という。χ^2 分布の密度関数 $f_n(x)$ は次の式で与えられる。

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ここで，**ガンマ関数** $\Gamma(x)$ は

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \ (x > 0)$$

で定義される。

χ^2 分布の名前は次の性質から来ている。

定理 5.1　確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が同一の標準正規分布 $N(0,1)$ に従い，互いに独立ならば，その統計量

$$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

は自由度 n の χ^2 分布に従う。その期待値と分散は

$$E(\chi_n^2) = n,\ V(\chi_n^2) = 2n$$

定理 5.2 (χ^2 分布の加法性) χ_n^2, χ_m^2 がそれぞれ自由度 n,m の χ^2 分布に従い，互いに独立ならば，$\chi^2 = \chi_n^2 + \chi_m^2$ は自由度 $n+m$ の χ^2 分布に従う。

標本確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の標本分散 S^2 は

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2$$

で定義される。しかし，この式から求まる標本標準偏差 S は一般に標準偏差として用いられていない。その理由は，

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

となり，S^2 の期待値は母分散の期待値と異なる。そこで，多くのテキストでは，

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2$$

と定義している。この定義によれば，

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n-1}\sigma^2 = \sigma^2$$

となる。このような統計量 S^2 を母分散の**不偏推定量**という。

標本分散 S^2 に関して，次の定理がある。

定理 5.3 $N(\mu, \sigma^2)$ の正規分布に従う母集団から無作為で得た標本を $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ とすると，

$$Y = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

は自由度が $n-1$ の χ^2 分布に従って分布する。

演習問題 5.2

1. 母集団が正規分布であるとする。n が 20 の標本から標本分散を求めたところ，その値は 1.5 であった。母分散が 1 のとき，標本分散が 1.5 より大きい確率を求めよ。

5.3　t 分布

定義 5.1 確率密度関数 $f_n(x)$ が

$$f_n(x) = \frac{\gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}\ (n \geq 1)$$

で与えられる分布 T_n を**自由度** n **の** t **分布**という。$n \geq 3$ のとき，その期待値と分散は

$$E(T_n) = 0,\ V(T_n) = \frac{n}{n-2}$$

となる。

定理 5.4 Z を標準正規確率変数，χ_n^2 を自由度 n の χ^2 確率変数とする。さらに，Z と χ_n^2 が互いに独立ならば，標本分布

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\chi_m^2/n}}$$

は自由度 n の t 分布に従う。

t 分布の正規近似

t 分布は自由度が大きければ標準正規分布で近似でき，

$$P_r(T_n \leq c) \approx P_r(Z \leq c)$$

となる。χ_n^2 は n 個の独立な確率変数の和であるから，n が大きければ χ_n^2/n は大数の法則により，1 に収束する。T_n 確率変数の分母が 1 に近づくから，T_n 確率変数は分子の標準正規確率変数と変わらなくなる。

5.4　F 分布

定義 5.2 確率密度関数 $f_{m,n}(x)$ が

$$f_{m,n}(x) = \begin{cases} \frac{\gamma(\frac{m+n}{2})}{\gamma(\frac{m}{2})\gamma(\frac{n}{2})} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}} & (x > 0) \\ 0, & \end{cases}$$

で与えられる分布 $F_{m,n}$ を**自由度対** (m,n) **の** F **分布**という。その期待値と分散は

$$\begin{aligned} E(F_{m,n}) &= \frac{m}{n-2}\ (n > 2) \\ V(F_{m,n}) &= \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}\ (n > 4) \end{aligned}$$

となる。

第6章　演習問題解答

演習問題 1.1

1

(a) ここでは□□□□の□の中に異なる数字を入れて 4 桁の数字を何個作れるか考えてみます．まず，4 桁の数字なので，千の位の□には 0 を使うことができません．そこで千の位は 1 から 6 までの 6 個の中から 1 個選ぶことになるので，6 通り．百の位から一の位までは 0 から 6 までのどの数字も使うことができます．しかし，数字を取り出して並べるため，同じ数字は 2 度使えないことに注意して下さい．では並べてみましょう．

まず，百の位には千の位で用いられた数字以外どれでも使えるので，6 通りあります．十の位は千の位と百の位で用いられた数字以外どれでも使えるので，5 通りあります．最後に一の位は千の位，百の位，十の位で用いられたもの以外すべて使えるので 4 通り．よって全部で

$$6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$$

個の 4 桁の数字を作ることができます．

ここで百の位，十の位，一の位は千の位で用いられた数字以外どれでも 1 回づつ使うことができることに注意すると，6 個の中から 3 個を取り出し順序をつけて並べる順列の数になるので ${}_6P_3$ と表わせます．よって

$$6 \cdot {}_6P_3 = 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$$

(b) まず，5 の倍数は一の位が必ず，0 か 5 になることに注意します．次に，一の位が 0 の場合と 5 の場合を別々に考えます．

一の位が 0 の場合．

千の位，百の位，十の位は 1 から 6 までの数字を 1 回づつ使うことができるので，6 個の中から 3 個を取り出し並べる順列の数になるので ${}_6P_3$ と表わせます．よって 120 通り

一の位が 5 の場合．

千の位に 0 が使えないので，千の位は 0，5 以外の 5 通り，百と十の位は一と千の位で用いた数字以外どれでも 1 回づつ使えるので ${}_5P_2$ 通り．よって $5 \cdot {}_5P_2 = 5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ 通り

ここで，一の位が 0 の場合と 5 の場合は同時におきないので，全部で

$$120 + 100 = 220 \text{ 通り}$$

(c) 同じ数字が重複してもよいので，千の位は 1 から 6 までの 6 通り，百の位は 0 から 6 までの 7 通り，十の位も 0 から 6 までの 7 通り，最後に一の位も 0 から 6 までの 7 通り．したがって，

$$6 \cdot {}_7\Pi_3 = 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2058 \text{ 通り}$$

2

(a) 1 から 10 までの番号のついたカードから 6 枚を取り出すとき，何通りの取り出し方があるかを考えます．このとき，一枚づつ順に取り出し並べるわけではないので，取り出す順序を考える必要はありません．よって，何通りの組み合わせがあるかを考えればよいでしょう．

10 個の中から 6 個を取り出す組み合わせは ${}_{10}C_6$ なので，

$${}_{10}C_6 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ 通り}$$

(b) 1 と 2 のカードを含むとは取り出した 6 枚の中に必ず 1 と 2 のカードが入っていなければならないということです．

これは 1 と 2 を先に引いておいて残りの 4 枚を 3 から 10 までの 8 枚から選ぶ選び方と考えることができます．よって ${}_8C_4 = 70$ 通り．

(c) 1 のカードを含む場合を C_1，2 のカードを含む場合を C_2 とします．すると C_1 は ${}_9C_5$ 通り，C_2 も ${}_9C_5$ 通りとなるので，1 または 2 を含む場合は

$${}_9C_5 + {}_9C_5 - 70 = 252 - 70 = 182 \text{ 通り}$$

別解 1 または 2 のカードを含むの否定は 1 と 2 のカードを含まないとなるので，1 と 2 のカードを含まない場合を考えます．

1 と 2 を含まないので残りの 8 枚のカードから 6 枚を取り出すことになるので，その取り出し方は ${}_8C_6$ 通り．よって，1 または 2 のカードを含む場合は

$$210 - {}_8C_6 = 210 - \frac{56}{2} = 210 - 28 = 182 \text{ 通り}$$

3

(a) $A_i = [\text{表の出る回数が } i \text{ 回}]$ とおきます．すると表は 5 回中 i 回どこで出てもよく出る順序は関係ないので，その組み合わせは ${}_5C_i$ となります．

A_0 は ${}_5C_0 = 1$ 通り，A_1 は ${}_5C_1 = 5$ 通り，A_2 は ${}_5C_2 = 10$ 通り，A_3 は ${}_5C_3 = 10$ 通り， A_4 は ${}_5C_4 = 5$ 通り，A_5 は ${}_5C_5 = 1$ 通り

(b) 起こりえるすべての場合は ${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$ 通り．または，

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 \text{ 通り}$$

4

(a) a, b が隣り合うので，a, b の順に並んでいるのを A とおくと，この問題は 5 文字を一列に並べる並べ方は何通りあるかという問題と同じになります．したがって，

$${}_5P_5 = 5! = 120$$

また，b, a の順に並んでいるのを B とおくと，

$${}_5P_5 = 5! = 120$$

したがって，全部で 240 通り．

(b) a, b が隣り合わないのはすべての並び方から a, b が隣り合う場合を引いたもの．よって

$$6! - 240 = 720 - 240 = 480 \text{ 通り}$$

(c) a, b が両端にくるのは a, b と b, a の場合があることに注意すると，中の 4 文字の並び方は ${}_4P_4$ 通りとなるので，全部で

$$2 \cdot {}_4P_4 = 2 \cdot 4! = 48 \text{ 通り}$$

5 $\binom{8}{4,2,1,1} = \frac{8!}{4!2!1!1!}$．全てに番号をつけて並べると，${}_8P_8 = 8!$ 通りの並べかたがある．しかし，実際は 4 個の a の重複 ${}_4P_4 = 4!$，2 個の b の重複 ${}_2P_2 = 2!$ は区別できないので，その組み合わせは $\frac{8!}{4!2!1!1!}$ である．

演習問題 2.1

(a) まず，場合の数を使って確率を求めてみましょう．$X_i = [6 \text{ 回中 } i \text{ 回 } 1 \text{ の目がでる}]$ とおきます．

さいころを 6 回投げると，目のでかたは全部で ${}_6\Pi_6 = 6^6$ 通りあります．次に 1 の目が 6 回中 1 回出る場合の数は何通りあるか数えてみましょう．

一投目で 1 の目が出ると，残りの 5 回は 1 以外なので，${}_5\Pi_5$ 通り．同じことが二投目，三投目，... でも言えるので，全部で

$${}_6C_1 \cdot {}_5\Pi_5 = 6 \cdot 5^5$$

したがって，1 の目が 6 回中 1 回出る確率は

$$P_r(X_1) = \frac{6 \cdot 5^5}{6^6} = \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

別解

まず，1 の目が 1 回出るのは最初の 1 投目でも 2 投目でも 6 投目でもいいので全部で 6 通りあることに注意します．この 6 通りのそれぞれの確率を調べてみましょう．まず，1 投目で 1 の目が出たとすると

$$\{1 \ \square \ \square \ \square \ \square \ \square\}$$

となります．このとき，□ の中には 1 の目以外なんでも入ります．よってこのときの確率を求めると，

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

となります．これが全部で 6 通りあるので，1 の目が 1 回出る確率は

$$6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776}$$

となります．

(b) 1 の目が 4 回出る組み合わせは全部で ${}_6C_4$ 通り．そのとき，残りの 2 回は 1 以外なので 5^2 通り．よって全部で，

$${}_6C_4 \cdot 5^2 \text{ 通り}$$

したがって，1 の目が 6 回中 4 回出る確率は

$$P_r(X_4) = \frac{{}_6C_4 \cdot 5^2}{6^6} = \frac{375}{46656}$$

別解

6 回中 4 回 1 の目がでる組み合わせは ${}_6C_4$ 通り．また，それぞれの確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

よって，

$$P_r(X_4) = {}_6C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{375}{46656} = \frac{125}{15552}$$

(c)　1 の目が出るのは 4 回以下とは

$$X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$$

のことです．ここで，それぞれの事象は同時に起こりえないことに注意すると，

$$\begin{aligned} P_r(X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4) &= P_r(X_0) + P_r(X_1) + P_r(X_2) + P_r(X_3) + P_r(X_4) \\ &= 1 - [Pr(X_5) + Pr(X_6) \\ &= 1 - \left[\binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right) + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6\right] = \frac{46625}{46656} \end{aligned}$$

(d)　1 の目が出るのは 5 回以上とは

$$X_5 \cup X_6$$

のことです．ここで，1 の目が出るのが 4 回以下の確率は

$$P_r\left(X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4\right) = \frac{46625}{46656}$$

に注意すると，

$$P_r(X_5 \cup X_6) = 1 - P_r\left(X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4\right) = \frac{31}{46656}$$

2. (a)　白玉 5 個，赤玉 3 個，黒玉が 2 個合わせて 10 個の中から 4 個を取り出す組み合わせは ${}_{10}C_4$ 通り．次に白玉 4 個を袋の中から取り出す組み合わせを考えてみましょう．

袋の中の 5 個の白玉から 4 個を取り出すしかないので，その組み合わせは ${}_5C_4$ 通り．したがって，取り出した 4 個が全て白玉の確率は

$$\frac{{}_5C_4}{{}_{10}C_4} = \frac{\frac{5!}{4!1!}}{\frac{10!}{6!4!}} = \frac{5}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7/4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{42}$$

別解　取り出した 4 個に注目．

1.　白玉 4 個取り出す組み合わせは ${}_5C_4 = 5$ 通り

2.　白玉 1 個ずつ取り出す確率は，$\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7}$

したがって，取り出した 4 個が全て白玉の確率は

$$5 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$$

(b) 白玉 5 個，赤玉 3 個，黒玉が 2 個合わせて 10 個の中から 4 個を取り出す組み合わせは ${}_{10}C_4$ 通り．次に白玉 2 個を袋の中から取り出す組み合わせを考えてみましょう．

2 個だけ白玉ということは 5 個の白玉から 2 個取り出し，残りの赤玉と黒玉から 2 個取り出す場合の数なので，${}_5C_2 \times {}_5C_2$．したがって，取り出した 4 個のうち白がちょうど 2 個である確率は

$$\frac{{}_5C_2 \times {}_5C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{10}{21}$$

(c) 白が 2 個以内とは白が 0 個，1 個，2 個の事象の場合である．よって，その確率は

$$\frac{{}_5C_0 \cdot {}_5C_4 + {}_5C_1 \cdot {}_5C_3 + {}_5C_2 \times {}_5C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{31}{42}$$

(d) 白が 2 個赤が 2 個を取り出す組み合わせは，${}_5C_2 \times {}_3C_2$ である．したがって，取り出した 4 個のうち白が 2 個赤が 2 個である確率は

$$\frac{{}_5C_2 \cdot {}_3C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{1}{7}$$

(e) 取り出した 4 個に注目．

1．白，赤，黒がともに含まれるということは，白，赤，黒のどれかが 2 個になる組み合わせを考えればよい．よって $\binom{4}{2,1,1}$ 通り．

2．白，赤，黒 1 つずつ取り出す確率は $\frac{5}{10}\frac{3}{9}\frac{2}{8}$．

3．したがって，白，赤，黒がともに含まれる確率は

$$\binom{4}{2,1,1}\frac{5}{10}\frac{3}{9}\frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

演習問題 2.2

(a) 1 から 10 までがその順に一列に並ぶ場合を考えているので，まずは，1 から 10 を勝手に一列に並べる並べ方は何通りあるか考えてみましょう．

先頭にくるのは 1 から 10 の内どれでもよいので，10 通り，次は 9 通り,... となるので，全部で ${}_{10}P_{10} = 10!$ 通りとなります．

次に 1 から 10 までがその順に一列に並ぶ場合は一通り．したがって，その確率は

$$\frac{1}{10!}$$

別解 1 が先頭にくる確率は $\frac{1}{10}$,1 が先頭にきたことが分ったあと，2 が 2 番目にくる確率は $\frac{1}{9}$，1 が先頭，2 が 2 番目にきたことが分ったあと，3 が 3 番目にくる確率は $\frac{1}{8}$,... となるので，1 から 10 までがその順に一列に並ぶ確率は

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdots \frac{1}{1} = \frac{1}{10!}$$

(b) 4 のカードがちょうど 4 番目ということは，それ以外の 9 枚のカードはどこにあってもいいので，4 のカードがちょうど 4 番目にくるのは ${}_9P_9 = 9!$ 通りあります．よってその確率は

$$\frac{{}_9P_9}{{}_{10}P_{10}} = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$$

別解 4 のカードがちょうど 4 番目にくる確率は $\frac{1}{10}$

(c) 1 が最初に，4 が 4 番目にあるということは，それ以外の 8 枚のカードはどこにあってもいいので，全部で ${}_8P_8$ 通り．よって，1 が最初に，4 が 4 番目にくる確率は

$$\frac{{}_8P_8}{{}_{10}P_{10}} = \frac{8!}{10!} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90}$$

別解 1 が最初にくる確率は $\frac{1}{10}$．次に 1 が最初にきたことが分ったあと，4 が 4 番目にくる確率は $\frac{1}{9}$．よって，1 が最初に，4 が 4 番目にくる確率は

$$\frac{1}{90}$$

4. (a) 円板の半径は 1.5cm よりちょうど正方形の中に入るには，円板の中心が 1 辺 5cm の正方形の中にあればよい．したがって，その確率は

$$\frac{1\text{ 辺 }5cm\text{ の正方形の面積}}{1\text{ 辺 }8cm\text{ の正方形の面積}} = \frac{25}{64}$$

(b) A ＝「円板が正方形の辺にかかる」の余事象は $\bar{A}$ ＝「円板が正方形の中にある」となる．したがって，その確率は

$$1 - \frac{1\text{ 辺 }5cm\text{ の正方形の面積}}{1\text{ 辺 }8cm\text{ の正方形の面積}} = \frac{39}{64}$$

(c) 円板が 4 つの正方形にまたがるには，その中心が 4 つの正方形の境界から 1.5cm 以内になければならない．また，その面積は $\pi(1.5)^2$．したがって，円板が 4 つの正方形にまたがる確率は

$$\frac{\pi(1.5)^2}{64}$$

5.

(a) 白玉 4 個，赤玉 6 個，合わせて 10 個の中から 2 個を取り出す組み合わせは ${}_{10}C_2$ 通り．白玉 2 個を袋の中から取り出す組み合わせを考えてみましょう．

袋の中の 4 個の白玉から 2 個を取り出すしかないので，その組み合わせは ${}_4C_2$ 通り．したがって，取り出した 2 個が両方白玉の確率は

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{10!}{8!2!}} = \frac{4 \cdot 3}{10 \cdot 9} = \frac{2}{15}$$

(b) 1 個だけ白玉ということは 4 個の白玉から 1 個取り出し，6 個の赤玉から 1 個取り出す場合の数なので，${}_4C_1 \times {}_6C_1$．よってその確率は

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_6C_1}{{}_{10}C_2} = \frac{4 \times 6}{45} = \frac{8}{15}$$

(c) 少なくとも 1 個は白玉という事象は，2 個とも白玉であるか，または 1 個だけ白玉であるかのどちらかです．ここで，これらの事象は排反事象 (同時に起きない) であることに注意すると，全部で，${}_4C_2 + {}_4C_1 \times {}_6C_1$ 通り．したがって，求める確率は

$$\frac{{}_4C_2 + {}_4C_1 \times {}_6C_1}{{}_{10}C_2} = \frac{2}{15} + \frac{8}{15} = \frac{2}{3}$$

3. 1.

(a) 4 回投げて少なくとも 1 回 6 の目がでるという事象 A の余事象 $\overline{A}$ は，4 回投げて一度も 6 の目がでないとなります．ここで，それぞれの回に 6 の目がでない確率は $\frac{5}{6}$ に注意すると，

$$P_r(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

となるので，これより，

$$P_r(A) = 1 - P_r(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296}$$

(b) 2 個のさいころを同時に 24 回投げて少なくとも 1 回 2 個とも 6 の目がでるという事象 B を考えます．まず，2 個のさいころを同時に投げたとき，2 個とも 6 の目がでる確率は $\frac{1}{36}$.

ここで，B の余事象 $\overline{B}$ は，2 個のさいころを同時に 24 回投げて一度も 2 個両方は 6 の目ではないとなります．したがって，

$$P_r(\overline{B}) = \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{24} = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

これより

$$P_r(B) = 1 - P_r(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.491$$

2　$A =$「真のガン患者」，$B =$「精密検査で陽性反応がでた患者」とおくと質問は，患者がその精密検査の結果陽性反応を示した場合にガン患者である確率を求めることです．これは条件付き確率を用いると次のように表わせます．

$$P_r(A|B)$$

また，$P_r(A) = 0.05$，$P_r(B|A) = 0.85$，$P_r(B|\overline{A}) = 0.05$ が分っていることに注意します．ここで，Bayes の定理を用いると

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \overline{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$$

より

$$\begin{aligned}
(1)\ P_r(B) &= P_r(B \cap A) + P_r(B \cap \overline{A}) = P_r(A)P_r(B|A) + P_r(\overline{A})P_r(B|\overline{A}) \\
&= 0.05 \cdot 0.85 + 0.95 \cdot 0.05 = 0.9 \\
(2)\ P_r(A|B) &= \frac{P_r(A \cap B)}{P_r(B)} = \frac{P_r(A)P_r(B|A)}{P_R(B)} = \frac{P_r(A)P_r(B|A)}{P_R(B)} \\
&= \frac{0.05 \cdot 0.85}{0.05 \cdot 0.85 + 0.95 \cdot 0.05} = \frac{0.425}{0.9} = 0.47
\end{aligned}$$

3.
(a)

$$\begin{aligned}
x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\
&\Leftrightarrow x \notin A \text{ and } x \notin B \\
&\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ and } x \in \overline{B} \\
&\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap x \in \overline{B}
\end{aligned}$$

これより，

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

したがって，

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

(b)

$$\begin{aligned}
x \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\
&\Leftrightarrow x \notin A \text{ or } x \notin B \\
&\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ or } x \in \overline{B} \\
&\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup x \in \overline{B}
\end{aligned}$$

これより，

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

したがって，

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$$

(c)　B と C が互いに排反ならば，$B \mid A$ と $C \mid A$ も互いに排反となるので，

$$P((B \cup C) \mid A) = P(B \mid A \cup C \mid A) = P(B \mid A) + P(C \mid A)$$

演習問題 3.1

1.　X を 4 児をもつ家庭の男児の数とすると，

$$P(x=0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P(x=1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$P(x=2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16}$$

$$P(x=3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$P(x=4) = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

よってその確率分布 f は

$$f(i) = P(X=i) = \binom{4}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

で与えられる．

2.　10 個から 3 個取り出す組み合わせは ${}_{10}C_3 = 120$ 通り．また，3 個中赤がゼロということは，白が 3 個と同じことなので，6 個の白から 3 個取り出すこととなり，その組み合わせは ${}_6C_3 = 20$ 通り．よって，X を赤玉の個数とおくと，

$$P_r(x=0) = \frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{10\cdot9\cdot8} = \frac{1}{6}$$

3 個中 1 個赤ということは残りの 2 個は白なので

$$P_r(X=1) = \frac{{}_4C_1\cdot{}_6C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{4\cdot6\cdot5}{2\cdot1}\cdot\frac{3\cdot2\cdot1}{10\cdot9\cdot8} = \frac{1}{2}$$

同様にして，

X	0	1	2	3
$P(X=i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{30}$

$$P_r(1 \le X \le 3) = 1 - P_r(X=0) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

3.

(a)　$f(x)$ が確率密度関数であるためには，

1. $f(x) \geq 0 \ (-\infty < x < \infty)$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

を満たしていることを示せばよい．そこで，

1. 定数 k を 0 以上とすれば $f(x) \geq 0$ は満たされる．
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int a^b k dx = kx \mid_a^b = k(b-a)$ より $k = \frac{1}{b-a}$ と定めればよい．

(b) $P(X \leq c) = F(c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ より

$$P(X \leq c) = \int_a^c f(x)dx = \int_a^c \frac{1}{b-a}dx = \frac{c-a}{b-a}$$

となる．

(4)

(a) 分布関数 $F(x)$ は

$$F(x) = P_r(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

で与えられることに注意します．

$x \leq 0$ のとき

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

$0 < x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x 6t(1-t)dt \\ &= 0 + \left[3t^2 - 2t^3\right]_0^x = 3x^2 - 2x^3 \end{aligned}$$

$x > 1$ のとき

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^1 6t(1-t)dt + \int_1^x 0dt = 1$$

(b)

$$\begin{aligned} P_r(X \leq 0.7) &= P_r(0 < X \leq 0.7) = F(0.7) - F(0) = [F(x)]_0^{0.7} \\ &= \left[3x^2 - 2x^3\right]_0^{0.7} = 3(0.7)^2 - 2(0.7)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_r(0.2 < X \leq 0.8) &= [F(x)]_{0.2}^{0.8} = \left[3x^2 - 2x^3\right]_{0.2}^{0.8} \\ &= 3(0.8)^2 - 2(0.8)^3 - (3(0.2)^2 - 2(0.2)^3) \end{aligned}$$

4.

(a)

$f(x) \geq 0$ と $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ を示せばよいでしょう．

1. $f(x) = e^{-x}$ は指数関数より全ての x で $f(x) > 0$.

2.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx \\ &= \left[0 + -e^{-x}\right]_0^{\infty-} = 1\end{aligned}$$

(b)　$P_r(X \leq a) = 0.1$ を満たす a を求めます．

$$P_r(X \leq a) = P_r(X \leq 0) + P_r(0 \leq X \leq a) = \int_0^a e^{-x}dx = 1 - e^{-a} = 0.1$$

より $e^{-a} = 0.9$．したがって，$a = -\log 0.9$

$$P_r(X > b) = 1 - P_r(X \leq b) = 1 - (1 - e^{-b}) = e^{-b}$$

より $P_r(X > b) = 0.05$ を満たす b は

$$b = -\log 0.05$$

演習問題 3.2

(1)　$W = XY$ とおくと W の変域は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$ である．また，確率分布 $h(i)$ は $P(W = i)$ で与えれることに注意する．まず，$h(1)$ を考えてみよう．$h(1) = P(W = 1)$ より，2 個のサイコロを投げて両方 1 の目が出る確率を求めることと同じである．場合の数を求めると，両方 1 の目の組み合わせは 36 通り中の 1 通り．したがって $P(W = 1) = \frac{1}{36}$．同様に，$W = 2, 3, 4, \ldots, 36$ について求めると

i	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$h(i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$H(i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{23}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

(2) (a)　$W = X + Y + Z$ とおくと W の変域は $\{0, 1, 2, 3\}$ である．確率分布 $h(i)$ は $P(W = i)$ で与えられる．まず，$h(0)$ を考えてみよう．$h(0) = P(W = 0)$ より，3 枚銅貨を投げて全て裏が出る確率を求めることと同じである．場合の数を求めると，全部裏の組み合わせは 8 通り中の 1 通り．したがって $P(W = 0) = \frac{1}{8}$．同様に，$W = 1, 2, 3$ について求めると

$$\begin{aligned}h(0) = P(W = 0) = \tbinom{3}{0}(\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{1}{8} \\ h(1) = P(W = 1) = \tbinom{3}{1}(\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{3}{8} \\ h(2) = P(W = 2) = \tbinom{3}{2}(\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{3}{8} \\ h(3) = P(W = 3) = \tbinom{3}{3}(\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{1}{8}\end{aligned}$$

となる．(b)　分布関数 $H(i)$ を求める．$H(i) = P(W \leq i)$ のことなので，

$$\begin{aligned}&H(0) = P(W \leq 0) = \tfrac{1}{8} \\ &H(1) = P(W \leq 1) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{8} = \tfrac{1}{2} \\ &H(2) = P(W \leq 2) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{8} = \tfrac{7}{8} \\ &H(3) = P(W \leq 3) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{8} = 1\end{aligned}$$

演習問題 3.3

(1)

(a)

$$1-|x|=\begin{cases}1+x & -1<x<0\\ 1-x & 0<x<1\end{cases}$$

より $f(x)\geq 0$．また

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-1} 0dt+\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_{0}^{1}(1-t)dt+\int_{1}^{\infty} 0dt\\ &= \left[t+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{1}\\ &= -(-1+\frac{1}{2})+1-\frac{1}{2}=1\end{aligned}$$

別解 $f(x)\geq 0$ より，$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ は $f(x)$ と x 軸の間の面積と考えられる．したがって，求める面積は底辺 2 高さ 1 の三角形の面積より 1.

(b)

$x<-1$ のとき

$$F(x)=P_r(X\leq x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt=0$$

$-1<x<0$ のとき

$$\begin{aligned}F(x)=P_r(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{-1} 0dt+\int_{-1}^{x}(1+t)dt\\ &= \left[t+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x}\\ &= x+\frac{x^2}{2}-(-1+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(x+1)^2\end{aligned}$$

$0<x<1$ のとき，

$$\begin{aligned}F(x)=P_r(X\leq x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-1} 0dt+\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_{0}^{x}(1-t)dt\\ &= \left[t+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x}\\ &= -(-1+\frac{1}{2})+x-\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{x}{2}(2-x)\end{aligned}$$

(c)

$$P_r(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2})=F(\frac{1}{2})-F(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(2-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$$

(d)

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{-1} 0dx+\int_{-1}^{0} x(1+x)dx+\int_{0}^{1} x(1-x)dx+\int_{1}^{\infty} 0dx\\ &= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}=0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{0} x^2(1+x)dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)dx + \int_{1}^{\infty} 0dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} \\
&= -(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

これより

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{6}$$

2.

(a)　1 の目が出る回数を X とすると，

$$P_r(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P_r(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$$

$$P_r(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{72}$$

$$P_r(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

別解　この試行はベルヌーイ試行である．つまり，

事象「1 の目がでる」が発生するか否かを問う

この事象の発生はそれぞれの試行において独立である

この事象の発生は各試行において一定である

ベルヌーイ試行を n 回行なったとき，事象の発生回数 X を i，事象の発生確率を p とすると

$$P_r(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

となり，X は 2 項分布に従うといい，$X \sim B(n,p)$ と表わします．このとき，

$$E(X) = np,\ V(X) = np(1-p)$$

が知られています．

(b)

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i \cdot P_r(X=i) = 0 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{25}{72} + 2 \cdot \frac{5}{72} + 3 \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} i^2 \cdot P_r(X = i) = 0 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{25}{72} + 2^2 \cdot \frac{5}{72} + 3^2 \cdot \frac{1}{216} = \frac{2}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{12}$$

したがって,

$$D(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{12}}$$

別解

$$E(X) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, V(X) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$

(c) X の標準化とは平均 μ を 0 に分散 σ^2 を 1 に変えることである．そこで X の標準化は

$$Z = \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} = \frac{X - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{6}}}$$

次に Z の確率分布を求めてみよう．

$$P_r(X = 0) = P_r\left(\frac{X - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{12}}} = \frac{0 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{12}}}\right) = P_r(Z = -\sqrt{\frac{3}{5}})$$

より

$$P_r(Z = -\sqrt{\frac{3}{5}}) = P_r(X = 0) = \frac{125}{216}$$

$$P_r(X = 1) = P_r\left(\frac{X - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{12}}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{12}}}\right) = P_r(Z = \sqrt{\frac{3}{5}})$$

より

$$P_r(Z = \sqrt{\frac{3}{5}}) = P_r(X = 0) = \frac{25}{72}$$

$$P_r(X = 2) = P_r\left(\frac{X - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{12}}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{12}}}\right) = P_r(Z = \frac{3\sqrt{3}}{5})$$

より

$$P_r(Z = \frac{3\sqrt{3}}{5}) = P_r(X = 0) = \sqrt{\frac{25}{72}}$$

$$P_r(X = 3) = P_r\left(\frac{X - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{12}}} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{12}}}\right) = P_r(Z = \frac{5\sqrt{3}}{5})$$

より

$$P_r(Z = \frac{5\sqrt{3}}{5}) = P_r(X = 0) = \sqrt{\frac{1}{216}}$$

3

(a)　Bernoulli の定理は試行回数が n，事象発生回数が r，事象発生確率が p のとき

$$P_r(|\frac{r}{n} - p| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

が成り立つといっているので，

$$P_r(|\frac{r}{1000} - \frac{1}{2}| \le \frac{1}{10}) \ge 1 - \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{1000(\frac{1}{10})^2} = \frac{39}{40}$$

(b)

$$P_r(|\frac{r}{1000} - \frac{1}{4}| \le \frac{1}{10}) \ge 1 - \frac{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4})}{1000(\frac{1}{10})^2} = \frac{3}{160}$$

(c)　この問題は試行回数が 2000 のとき，事象発生回数 r の偏りが 50 回以内である確率を求めよということである．言い換えると，2000 回中の表が現われる割合 $\frac{r}{2000}$ と理論的確率 $p = \frac{1}{2}$ との誤差が $\frac{50}{1000}$ である確率を求めよということになる．そこで Bernoulli の定理を用いると

$$P(|\frac{r}{n} - p| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

より

$$\begin{aligned} P(|\frac{r}{2000} - \frac{1}{2}| < \frac{50}{1000}) &\ge 1 - \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{2000(\frac{1}{20})^2} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{4}}{5} = 1 - 0.05 = 0.95 \end{aligned}$$

(d)　この問題は n 回中の表が現われる割合 $\frac{r}{n}$ と理論的確率 $p = \frac{1}{2}$ との誤差が 0.05% である確率が 99% 以上になるには何回以上投げればよいかということを聞いている．そこで Bernoulli の定理を用いると

$$P(|\frac{r}{n} - p| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

より $1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \ge 0.99$ である n を求めればよい．

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n(0.05)^2} &\ge 0.99 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n(0.05)^2} \le 0.01 \Rightarrow \\ n &\ge \frac{1}{4(0.05)^2 0.01} = 10000 \end{aligned}$$

演習問題 3.4

1.

(a)　$W = X + Y + Z$ とおくと W の変域は $\{0, 1, 2, 3\}$ である．確率分布 $h(i)$ は $P(W = i)$ で与えれれる．まず，$h(0)$ を考えてみよう．$h(0) = P(W = 0)$ より，3 枚銅貨を投げて全て裏が出る確率を求めることと同じである．場合の数を求めると，全部裏の組み合わせは 8 通り中の 1 通り．したがって $P(W = 0) = \frac{1}{8}$．同様に，$W = 1, 2, 3$ について求めると

$$\begin{aligned} h(0) = P(W = 0) = \tbinom{3}{0}(\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{1}{8} \\ h(1) = P(W = 1) = \tbinom{3}{1}(\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{3}{8} \\ h(2) = P(W = 2) = \tbinom{3}{2}(\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{3}{8} \\ h(3) = P(W = 3) = \tbinom{3}{3}(\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{1}{8} \end{aligned}$$

となる．次に分布関数 $H(i)$ を求める．$H(i) = P(W \le i)$ のことなので，

$$\begin{array}{l} H(0) = P(W \le 0) = \frac{1}{8} \\ H(1) = P(W \le 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \\ H(2) = P(W \le 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} \\ H(3) = P(W \le 3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1 \end{array}$$

(b) W の平均値は $E(W)$ は

$$E(W) = E(x + Y + Z) = E(X) + E(Y) + E(Z)$$

で与えられることに注意すればすぐに求まる．

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$E(Z) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

より

$$E(W) = \frac{3}{2}$$

別解　W の確率分布が分かっているので，直接求めることも可能である．

$$E(W) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

次に W の分散 $V(W)$ を求める．一般に $V(W) = E(W^2) - (E(W))^2$ を用いて求める方が簡単であるが，この問題では W の確率分布が分かっているので直接求める方が簡単である．$E(X) = \frac{3}{2}$ より

$$V(W) = \{(0 - \frac{3}{2})^2 \frac{1}{8} + (1 - \frac{3}{2})^2 \frac{3}{8} + (2 - \frac{3}{2})^2 \frac{3}{8} + (3 - \frac{3}{2})^2 \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

2.

(a) Y の確率密度関数 $g(x)$ を求めるには Y の分布関数 $G(y)$ について調べ，$g(y) = G'(y)$ の関係を用いる．

X の分布関数 $F(x)$ は $F(x) = P(X \le x)$，Y の分布関数 $G(y)$ は $G(y) = P(Y \le y)$ で与えられるので，

$$G(y) = P(Y \le y) = P(2X + 3 \le y) = P(X \le \frac{y-3}{2}) = F(\frac{y-3}{2})$$

を得る．次に，X の確率密度関数は $f(x) = 2x\ (0 \le x < 1)$ で与えられていることに注意すると，Y の確率密度関数 $g(y)$ は，

$$g(y) = G'(y) = F'(\frac{y-3}{2})\frac{1}{2} = \frac{1}{2}f(\frac{y-3}{2}) = \frac{y-3}{2}$$

となる．

Y の期待値 $E(Y) = E(2X + 3) = 2E(X) + E(3) = 2E(X) + 3$ より $E(Y)$ を求めるには，$E(X)$ を求めればよいことが分かる．$E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx$ で与えられるので，

$$E(X) = \int_0^1 x(2x)dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3 \mid_0^1 = \frac{2}{3}$$

したがって，$E(Y) = E(2X+3) = 2E(X) + 3 = \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3}$

注：Y の確率密度関数を求めたので，直接 $E(Y)$ を $E(Y) = \int_0^1 \frac{y-3}{2} dy$ で求めることもできる．

最後に Y の分散を求める．ここで $V(2X+3) = V(2X), V(2X) = 2^2 V(X), V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ に注意すると $V(Y)$ を求めるには $E(X^2)$ を求めればよいことが分かる．

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2} x^4 \mid_0^1 = \frac{1}{2}$$

より

$$V(Y) = V(2X+3) = 4V(X) = 4[E(X^2) - (E(X))^2] = 4[\frac{1}{2} - (\frac{2}{3})^2] = \frac{2}{9}$$

(b)　Z の確率密度関数 $h(z)$ を求めるには Z の分布関数 $H(z)$ について調べ，$h(z) = H'(z)$ の関係を用いる．

X の分布関数 $F(x)$ は $F(x) = P(X \leq x)$，Z の分布関数 $H(z)$ は $H(z) = P(Z \leq z)$ で与えられるので，

$$H(z) = P(Z \leq z) = P(X^2 \leq z) = P(|X| \leq \sqrt{z}) = P(X \leq \sqrt{z}) - P(X \leq -\sqrt{z}) = F(\sqrt{z}) - F(-\sqrt{z})$$

を得る．これより Z の確率密度関数 $h(z)$ は，

$$h(z) = H'(z) = F'(\sqrt{z})(\sqrt{z})' - F'(-\sqrt{z})(-\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}(f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z}))$$

となる．ここで

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

より $f(\sqrt{z}) = 2\sqrt{z}, f(-\sqrt{z}) = 0$．したがって，$h(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} 2\sqrt{z} = 1$．

次に期待値を求める．

$E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx$ で与えられるので，

$$E(Z) = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2} x^4 \mid_0^1 = \frac{1}{2}$$

最後に Z の分散を求める．

$$V(Z) = V(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2} x^4 \mid_0^1 = \frac{1}{2}$$

より

$$V(Y) = V(2X+3) = 4V(X) = 4[E(X^2) - (E(X))^2] = 4[\frac{1}{2} - (\frac{2}{3})^2] = \frac{2}{9}$$

3.

(a)　$W = XY$ とおくと，X, Y は独立である．したがって，その期待値は

$$E(W) = E(XY) = E(X)E(Y)$$

で求まる．X は 1 つのさいころを投げたとき出る目の値であるから，その期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

同様に，$E(Y)=\frac{7}{2}$ となるので，求める期待値 $E(W)$ は $E(W)=(\frac{7}{2})^2$ となる．
(b) $W=XY$ とおくと，その分散は

$$V(W)=E(W^2)-(E(W))^2=E((XY)^2)-(\frac{7}{2})^4$$

となるので，$E((XY)^2)$ を求めればよい．ここで X,Y は独立であることに注意すると

$$E((XY)^2)=E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)$$

さらに

$$E(X^2)=1\cdot\frac{1}{6}+2^2\frac{1}{6}+3^2\frac{1}{6}+4^2\frac{1}{6}+5^2\frac{1}{6}+6^2\frac{1}{6}$$

ここで

$$1^2+2^2+3^2+\cdot+n^2=\frac{1}{6}(n(n+1)(2n+1)$$

を用いると

$$E(X^2)=\frac{1}{6}\frac{1}{6}(6(7)(13))=\frac{91}{6}$$

同様に $E(Y^2)=\frac{91}{6}$ となるので，求める $V(W)$ は

$$V(W)=E((XY)^2)-(\frac{7}{2})^4=(\frac{91}{6})^2-(\frac{7}{2})^4=\frac{11515}{144}$$

となる．

演習問題 4.1

1. $p_r=P(X=r)=\binom{8}{r}(0.4)^r(0.6)^{1-r}$ より

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P_r	0.0168	0.0896	0.209	0.2787	0.2322	0.1239	0.0413	0.0079	0.0007

$p_r=P(X=r)=\binom{8}{r}(0.2)^r(0.8)^{1-r}$ より

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P_r	0.1678	0.3355	0.2936	0.1468	0.0459	0.0092	0.0011	0.0001	2.56×10^{-6}

2. プラモデルを取り出す試行はベルヌーイ試行．X を部品がかけているプラモデルのセットの数とすると，$X\sim B(3,\frac{2}{25})$．よって，選んだ 3 セットが全て完全なセットである確率は

$$P(X=0)=\binom{3}{0}(\frac{2}{25})^0(1-\frac{2}{25})^3=0.7789$$

3. X を注射のあと一定期間生存できずに死亡するねずみの数とすると，$X\sim B(8,0.4)$ となり，I で求めた確率分布が使える．
(a) 8 匹全部が一定期間生存する確率は

$$P(X=0)=\binom{8}{0}(0.4)^0(0.6)^8=0.0168$$

(b) r を 95%以上の確率で生存できないねずみの数となるとすると，X の分布関数 $F(x)$ は

$$F(r) = P(X \leq r) \quad = \quad \sum_{k \leq r} r \binom{8}{k} (0.4)^k (0.6)^{8-k} \geq 0.95$$

を満たす．ここで，I の確率分布を用いると $P(X=0) = 0.168, P(X=1) = 0.0896$ より，$r = 1$ となり，95%で生存できるねずみの数は 7 匹以上となる．

演習問題 4.2

1. X を 1 日における交通事故の数とすると，交通事故という事象は，ポワソン過程である。よって，一日での事象の平均発生回数 λ は 0.8 となる。

(a) 死亡者 0 の日とは，$P_r(X=0)$ を求めることになる。よって，

$$P_r(X=0) = \frac{0.8^0}{0!} e^{-0.8} = 0.4493$$

死亡者 6 名以上の日とは，$P_r(X \geq 6)$ を求めることになる。よって，

$$P_r(X \geq 6) = 1 - P_r(X \leq 5)$$

$$\begin{aligned}
P_r(X=0) &= \frac{0.8^0}{0!} e^{-0.8} = 0.4493 \\
P_r(X=1) &= \frac{0.8^1}{1!} e^{-0.8} = 0.3595 \\
P_r(X=2) &= \frac{0.8^2}{2!} e^{-0.8} = 0.1438 \\
P_r(X=3) &= \frac{0.8^3}{3!} e^{-0.8} = 0.0383 \\
P_r(X=4) &= \frac{0.8^4}{4!} e^{-0.8} = 0.0077 \\
P_r(X=5) &= \frac{0.8^5}{5!} e^{-0.8} = 0.0012
\end{aligned}$$

これより，

$$P_r(X \geq 6) = 1 - 0.9998 = 0.0002$$

2. X を放射性物質から 1 秒間に放出される粒子の数とすると，粒子の放出はポワソン過程である。よって，一秒間での事象の平均発生回数 λ は 3 となる。これより，一秒間に 0 個の粒子が放出される確率は

$$P_r(X=0) = \frac{3^0}{0!} e^{-3} = 0.0498$$

同様に，

$$\begin{aligned} P_r(X=1) &= \frac{3^1}{1!}e^{-3} = 0.1494 \\ P_r(X=2) &= \frac{3^2}{2!}e^{-3} = 0.2240 \\ P_r(X=3) &= \frac{3^3}{3!}e^{-3} = 0.2240 \\ P_r(X=4) &= \frac{3^4}{4!}e^{-3} = 0.1680 \\ P_r(X=5) &= \frac{3^5}{5!}e^{-3} = 0.1008 \\ P_r(X=6) &= \frac{3^6}{6!}e^{-3} = 0.0504 \end{aligned}$$

最後に，1 秒間に少なくとも 1 個の粒子の放出は，$P_r(X \geq 1)$ で与えられ，

$$P_r(X \geq 1) = 1 - P_r(X < 1) = 1 - P_r(X = 0) = 1 - 0.4493 = 0.5407$$

3. X をテープの傷の数とおくと，300m 中の傷の数の平均は 6 となり $X \sim P_o 6$．よって 300m の長さのテープ一巻中に傷が全くない確率は

$$P_r(X=0) = e^{-6}\frac{6^0}{0!} = e^{-6} = 0.0025.$$

演習問題 4.3

1. $X \sim N(170, 10^2)$ より，$Z = \frac{X-170}{10}$ とおくと，$Z \sim N(0,1)$ となる。

(a)

$$\begin{aligned} P_r(X \leq 160) &= P_r(\frac{X-170}{10} \leq \frac{160-170}{10}) = P_r(Z \leq -1) \\ &= 0.5 - P_r(0 \leq Z \leq 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P_r(160 \leq X \leq 175) &= P_r(\frac{160-170}{10} \leq \frac{X-170}{10} \leq \frac{175-170}{10}) = P_r(-1 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P_r(-1 \leq Z \leq 0) + P_r(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.3413 + 0.1915 = 0.5328 \end{aligned}$$

2.

(a) $P_r(|Z| > \lambda) = 0.05$ を満たす λ を求める。標準正規分布表により，$P_r(0 \leq Z \leq z)$ の値が与えられている。そこで，

$$P_r(|Z| > \lambda) = 1 - P_r(|Z| \leq \lambda)$$

と書き直すと，

$$P_r(0 \leq Z \leq \lambda) = \frac{1}{2}(1 - P_r(|Z| > \lambda)) = 0.225$$

これより，$\lambda = 1.645$ を得る。

(b) $P_r(|Z| > \lambda) = 0.05$ を満たす λ を求める。標準正規分布表により，$P_r(0 \leq Z \leq z)$ の値が与えられている。そこで，

$$P_r(Z > \lambda) = 0.5 - P_r(0 \leq Z \leq \lambda)$$

と書き直すと，

$$P_r(0 \leq Z \leq \lambda) = 0.5 - P_r(Z > \lambda) = 0.45$$

これより，$\lambda = 0.595$ を得る。

3.

(a) 平均 168.9, 分散 5.6^2 より正規化すると，

$$Z = \frac{X - 168.9}{5.6}$$

次に，標準正規分布表より，

$$P_r(0 \leq Z \leq z) = 0.1,\ P_r(0 \leq Z \leq z) = 0.2, \ldots, P_r(0 \leq Z \leq z) = 0.5$$

を満たす z を求めると，

$$\begin{aligned}
P_r(0 \leq Z \leq 0.255) &= 0.1 \\
P_r(0 \leq Z \leq 0.525) &= 0.2 \\
P_r(0 \leq Z \leq 0.845) &= 0.3 \\
P_r(0 \leq Z \leq 1.281) &= 0.4 \\
P_r(0 \leq Z \leq 3.4) &= 0.5
\end{aligned}$$

となる。これより，総数を 10 等分するには，Z の値を次のように分ければよい。

$$-3.4 \sim -1.281 \sim -0.845 \sim -0.525 \sim -0.255 \sim 0 \sim 0.255 \sim 0.525 \sim 0.845 \sim 1.281 \sim 3.4$$

(b) 120 名の平均身長を $\bar{X}$ とすると，中心極限定理より

$$\bar{X} \sim N(168.9, \frac{5.6^2}{120})$$

ここで，身長の平均が 168.9cm より 1.3cm 以上かたよる確率は

$$P_r(|\bar{X} - 168.9| \geq 1.3) = 1 - 2P_r(0 \leq \bar{X} - 168.9 < 1.3)$$

で求まる。ここで，

$$P_r(0 \leq \bar{X} - 168.9 < 1.3) = P_r(0 \leq \frac{\bar{X} - 168.9}{5.6/\sqrt{120}} \leq \frac{1.3}{5.6/\sqrt{120}}) = P_r(0 \leq Z \leq 2.543) = 0.4945$$

より，

$$P_r(|\bar{X} - 168.9| \geq 1.3) = 1 - 2(0.4945) = 0.011$$

4.

(a) $X \sim B(100, 0.02)$ より，期待値 $E(X) = np = 2$ となり，ポワソン分布で近似できる。$X \sim P_o(\lambda)$, $\lambda = E(X) = 2$ より，

$$\begin{aligned} P_r(X \geq 2) &= 1 - P_r(X < 2) = 1 - P_r(X = 0) - P_r(X = 1) \\ &= 1 - P_o(0) - P_o(1) = 1 - \frac{2^0}{0!}e^{-2} - \frac{2^1}{1}e^{-2} = 0.594 \end{aligned}$$

(b) $X \sim B(100, 0.2)$ より，期待値 $E(X) = np = 20$ となり，正規分布で近似できる。$\mu = E(X) = np = 20, \sigma^2 = V(X) = np(1-p) = 16$ より，$X \sim N(20, 4^2)$。これより

$$\begin{aligned} P_r(X \geq 25) &= 1 - P_r(0 \leq X < 25) = 1 - P_r(0 \leq \frac{X-20}{4} < \frac{25-20}{4}) \\ &= 1 - P_r(0 \leq Z < 1.25) = 1 - 0.3944 = 0.6056 \end{aligned}$$

(c) X を 1 の目の出る回数とすると，$X \sim B(600, 1/6)$ の 2 項分布に従う。そこで，1 の目の出る回数 S が 90 回以上 100 回以下である確率を求めると

$$P_r(90 \leq X \leq 100) = P_r(X = 90) + P_r(X = 91) + \cdots + P_r(X = 100)$$

で求まるが，$\mu = E(X) = np = 100$, $\sigma^2 = V(X) = npq = 500/6$ より，$X \sim N(100, 500/6)$ の正規分布で近似できることが分かる。正規分布を用いると

$$\begin{aligned} P_r(90 \leq X \leq 100) &= P_r(\frac{90-100}{\sqrt{500/6}} \leq Z \leq 0) = P_r(0 \leq Z \leq \sqrt{1.2}) \\ &= P_r(0 \leq Z \leq 1.095) = 0.3621 \end{aligned}$$

(d) X を表の目の出る回数とすると，$X \sim B(100, 1/2)$ の 2 項分布に従う。そこで，表の出る回数が 40 以上 60 以下の確率を求めると

$$P_r(40 \leq Xleq60) = P_r(X = 40) + P_r(X = 41) + \cdots + P_r(X = 60)$$

で求まるが，$\mu = E(X) = np = 50$, $\sigma^2 = V(X) = npq = 25$ より，$X \sim N(50, 5^2)$ の正規分布で近似できることが分かる。正規分布を用いると

$$\begin{aligned} P_r(40 \leq X \leq 60) &= P_r(\frac{40-50}{5} \leq Z \leq \frac{60-50}{5}) = 2P_r(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 2(.4772) = 0.9544 \end{aligned}$$

演習問題 4.4

1.

(a)

$$\begin{aligned} \eta(t) &= E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k (1-p)^k p \end{aligned}$$

より，両辺を t について微分すると，

$$\eta'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1}(1-p)^k p$$

ここで，$t = 0$ とおくと

$$\eta'(0) = E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k p = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^k$$

ちょっと，難しいが $S = \sum_{k=1}^{\infty} kq^k$ とおき，$S - qS = S(1-q) = Sp$ を求めると，

$$\begin{aligned} Sp &= S - qS = \sum_{k=1}^{\infty} kq^k - \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q} = \frac{q}{p} \end{aligned}$$

となる。これより，$S = \frac{q}{p^2}$ となり，

$$E(X) = p\frac{q}{p^2} = \frac{q}{p}$$

(b) X をはじめて勝つ直前までの試合回数とおくと，$X \sim G_e(0.3)$．よってはじめて勝つまでの平均試合数は $E(X) + 1$ より

$$E(X) + 1 = \frac{q}{p} + 1 = \frac{0.7}{0.3} + 1 = 3.33.$$

演習問題 4.5

1. X を当たりくじの数とおくと，$X \sim H_g(10, 4, 3)$．よって 3 本くじを引いて，そのうち 2 本が当たる確率は

$$P_r(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$$

演習問題 4.6

I.

(a)　X を通話時間とおくと，$x \sim E_x(\lambda)$．また $E(X) = 1/\lambda$ より $\lambda = 1/3$ となるので $X \sim E_x(1/3)$．よって通話が 4 分以内に終わる確率は

$$P_r(0 \le X \le 4) = \int_0^4 \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^4 \frac{1}{3} e^{-x/3} dx = 1 - e^{4/3}.$$

(b) その人が通話をはじめてから 2 分が経過しているとき，その後 4 分以内に終わる確率は

$$\begin{aligned} P_r(2 \le X \le 6 | X \ge 2) &= \frac{P_r(2 \le X \le 6, X \ge 2)}{P_r(X \ge 2)} \\ = \quad & \frac{\int_2^6 \frac{1}{3} e^{-x/3} dx}{\int_2^{\infty} \frac{1}{3} e^{-x/3} dx} = \frac{e^{-2/3} - e^{-2}}{e^{-2/3}} = 1 - e^{-4/3}. \end{aligned}$$

演習問題 4.7

I.　$f(x)$ が密度関数になるには，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

を満たす必要がある．
(a)

$$\begin{aligned}
\int_{\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{\infty} f(x)dx \\
&= 0 + \int_{1}^{3} ce^{-1}\{-(x-2)^2+2\}dx + \int_{3}^{\infty} ce^{-(x-2)}dx \\
&= ce^{-1}\left[-\frac{1}{3}(x-2)^3+2x\right]_1^3 - \left[ce^{-(x-2)}\right]_3^{\infty} \\
&= ce^{-1}(-\frac{1}{3}+6-(\frac{1}{3}+2)) - ce^{-1}(0-(-1)) \\
&= \frac{13}{3}ce^{-1}
\end{aligned}$$

したがって，$c = \frac{3e}{13}$.
(b) $P(2.5 \le X \le 3.5) = \int_{2.5}^{3.5} f(x)\,dx$
2. X_1 を A 型の人の数，X_2 を B 型の人の数，X_3 を AB 型の人の数，X_1 を O 型の人の数とすると，$\vec{X} = (X_1, X_2.X_3.X_4) \sim M(4, 0.35, 0.25, 0.1, 0.3)$．よって

$$P_r(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1) = \frac{4!}{1!1!1!1!}(0.35)(0.25)(0.1)(0.3) = 0.063.$$

3. X_1, X_2, X_3 を 3 人の通話時間とおくと，$X_1 \sim E_x(\lambda) = \Gamma(1, 1/\lambda), X_2 \sim E_x(\lambda) = \Gamma(1, 1/\lambda), X_3 \sim E_x(\lambda) = \Gamma(1, 1/\lambda)$．ここで $X = X_1 + X_2 + X_3$ とおくと X は 3 人の通話時間の合計を表わす．言い換えると待ち時間を表わし，$X \sim \Gamma(3, 1/\lambda)$．また $E(X_1) = 1/\lambda = 2$ より $X \sim \Gamma(3, 2)$．よって 10 分以上待たなければならない確率は

$$\begin{aligned}
P_r(X \ge 10) &= 1 - P_r(0 \le X \le 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(3)2^3} x^2 e^{-x/2} dx \\
&= 1 - \frac{1}{16}\int_0^{10} x^2 e^{-x/2} dx = 1 - [-2x^2 e^{-x/2}\ |_0^{10} + 4\int_0^{10} xe^{-x/2}dx] \\
&= 1 - \frac{1}{16}[-200e^{-5} + 4(-2xe^{-x/2}\ |_0^{10} + 2\int_0^{10} e^{-x/2}dx)] \\
&= 1 - \frac{1}{16}[-200e^{-5} - 80e^{-5} - 16e^{-x/2}\ |_0^{10}] \\
&= 1 - \frac{1}{16}[-296e^{-5} + 16] = \frac{296e^{-5}}{16} = 0.1246
\end{aligned}$$

演習問題 5.1

1. 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から無作為で抽出した標本 X_i は，母集団と同じ正規分布に従っていると考えられる。よって，$E(X_i) = \mu$ である。これより，

$$E(\bar{X}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu$$

したがって，$\bar{X}$ は母平均を推測するのに適当な統計量である。

次に，$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ と定義すると，$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2$ となる。

$$\begin{aligned}
E(S^2) &= E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-E(\bar{X}^2) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[V(X_i)+(E(X_i))^2]-[V(\bar{X})+(E(\bar{X}))^2 \\
&= \sigma^2+\mu^2-\frac{1}{n}\sigma^2-\mu^2 \\
&= \frac{n-1}{n}\sigma^2
\end{aligned}$$

より，S^2 は母分散を推測するのに適当な統計量ではない。

演習問題 5.2

1. $P_r(S^2\geq 1.5)$ を求める。$X_i\sim N(\mu,1)$ より，

$$Y=\sum_{i=1}^{20}(X_i-\bar{X})^2=19S^2$$

は自由度 19 の χ^2 分布に従う。したがって，

$$\begin{aligned}
P_r(S^2\geq 1.5) &= P_r(19S^2\geq 28.5) \\
&= P_r(\chi^2_{19}\geq 28.5)
\end{aligned}$$

ここで，χ^2 分布表を用いると，$P_r(\chi^2_{19}>27.20)=0.10$ で $P_r(\chi^2_{19}>30.14)=0.05$ より，

$$P_r(\chi^2_{19}\geq 28.5)=0.05+\frac{28.5-27.20}{30.14-27.20}(0.10-0.05)\approx 0.07$$