線形代数学入門演習書

横田 壽

目 次

第1章　ベクトル空間

1.1　幾何ベクトルとベクトル空間

1.1.1　演習問題 1-2

1. ベクトル $\mathbf{A} = (2, -1, 3)$ とベクトル $\mathbf{B} = (-1, 1, 4)$ について, 次の値を求めよ.
(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (b) $3\mathbf{B}$ (c) $\|\mathbf{A}\|$ (d) $3\mathbf{B} - 2\mathbf{A}$
2. ベクトル $\mathbf{A} = (-2, -1, 3)$ とベクトル $\mathbf{B} = (3, 0, 1)$ について, 次のベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を用いて表せ.
(a) $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ (b) $3\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (c) $3\mathbf{B} - 2\mathbf{A}$ (d) $\dfrac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2}$
3. 1.1 で定義した幾何ベクトルの和は性質 1 から 5 を満たすことを示せ.
4. 1.1 で定義したスカラー倍は性質 6 から 9 を満たすことを示せ.
5. 1.1 で定義した空間のベクトルの和およびスカラー倍は性質 1 から 9 を満たすことを示せ.
6. ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の始点が同じとき, $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の作る角を二等分するベクトル $\mathbf{C}$ を求めよ.
7. $x(1, 1, 1) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 0) = (2, -3, 4)$ を解き, x, y, z を求めよ.

1.2　内積空間

演習問題 1-4

1. $\mathbf{A} = (-1, 3, 1), \mathbf{B} = (2, 4, -3)$ について, 次の値を求めよ.
(a) $\|\mathbf{B}\|$ (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (c) $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角 (d) $\mathbf{A}$ 方向の単位ベクトル
2. 次の集合のうち直交系はどれか. また直交系は対応する正規直交系を求めよ.
(a) $\{(1, 3), (6, -2)\}$
(b) $\{(1, 2, 2), (-2, 2, -1), (2, 1, -2)\}$
(c) $\{\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, 2\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}, 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}\}$
3. 点 $(5, -1, 3)$ を通り, 法ベクトルが $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ - $\mathbf{k}$ である平面の方程式を求めよ.
4. $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ を空間のベクトルとするとき, 次の不等式を証明せよ.

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|.$$

この結果は Cauchy-Schwarz の不等式とよばれる.

5. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ を空間のベクトルとするとき, 次の不等式を証明せよ.

$$\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}-\mathbf{C}\| + \|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|.$$

6. $f(x), g(x)$ を $PC[a,b]$ の関数とするとき, 次の不等式を証明せよ.

$$|(f,g)| \leq \|f\|\|g\|.$$

この結果は Schwarz の不等式とよばれる.

7. $PC[0,2]$ において, 次の関数のノームを求めよ.
(a) $f(x)=x$ (b) $f(x)=\sin\pi x$ (c) $f(x)=\cos\pi x$.

8. 次にあげる 3 個の多項式は Legendre の多項式とよばれるものです.

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}$$

これらは $PC[-1,1]$ で直交系をなすことを示せ.

1.3　1 次独立と 1 次従属

演習問題 1-6

1. $\mathbf{A}=(1,2,-3), \mathbf{B}=(2,-1,1), \mathbf{C}=(4,2,2)$ について,
(a) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ (b) $\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ (c) $\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ を求めよ.

2. 点 (1,0,1) を通り, $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ と $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ によって作られる平面に平行な平面を求めよ.

3. 2 点 $(2,0,-1)$, $(3,2,1)$ を通り平面 $x-2y+3z-4=0$ に垂直な平面の方程式を求めよ.

4. $\mathbf{A}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{B}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ を 2 辺とする三角形の面積を求めよ.

5. $\mathbf{F}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ のとき, 点 $(2,-1,1)$ のまわりの力 $\mathbf{F}$ のモーメントベクトルを求めよ.

6. 剛体が直線 $x=y=z$ のまわりを角速度ベクトル $\mathbf{\Omega}=(1,-2,3)$ で回転しているとき, 剛体内の点 $P(1,2,2)$ の速度を求めよ.

7. 3 つのベクトル $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ の作る平行六面体の体積は, スカラー三重積

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

の絶対値に等しいことを示せ.

8. $\mathbf{A}=2\mathbf{e}_1+5\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3, \mathbf{B}=\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2-4\mathbf{e}_3$ で $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\mathbf{i}-\mathbf{j}, \mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3=\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\mathbf{i}+\mathbf{k}$ のとき, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ を求めよ.

9. $\{4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}, 10\mathbf{i}-3\mathbf{j}, 2\mathbf{i}-6\mathbf{j}+3\mathbf{k}\}$ は 1 次独立か 1 次従属か調べよ.

10. 次の関数はどの区間 (a,b) でも 1 次独立であることを示せ.
(a) $\{1,x,x^2\}$ (b) $\{\sin x,\cos x\}$

11. 幾何ベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ が 1 次独立であるための必要十分条件は $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\neq\mathbf{0}$ であることを示せ.

1.4　部分空間と次元

演習問題 1-8

1. $W=\{(x,y,1):x,y$ 実数 $\}$ は R^3 の部分空間か調べよ．
2. $W=\{(x,y,-3x+2y):x,y$ 実数 $\}$ は R^3 の部分空間であることを証明せよ．
3. $W=\{(x,y,-3x+2y):x,y$ 実数 $\}$ の基底を求めよ．また W は何次元か．
4. 次のベクトルの組は 3 次元ベクトル空間 R^3 の基底をなすことを示せ．

$$\{\mathbf{i}+\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{i}+\mathbf{k}\}$$

5. 次の関数で生成される部分空間の次元を求めよ．

$$\{3,x-2,x+3,x^2+1\}$$

6. $\mathbf{x}_1=(1,1,1),\mathbf{x}_2=(0,1,1),\mathbf{x}_3=(0,0,1)$ から正規直交系を作れ．
7. U,W をベクトル空間 V の部分空間とするとき, 次元公式が成り立つことを示せ．

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W).$$

8. 4 個以上の 3 次元空間のベクトルの組は 1 次従属であることを示せ．

第2章　行列と行列式

2.1　行列

演習問題 2-2

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の式を計算せよ.
(a) $A+B$ (b) $2A-3B$ (c) AB, BA

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, AB, BA を求めよ.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $A^2 - 5A + 6I$ を計算せよ.

4. A と B が n 次の対称行列のとき, $A+B$ は対称行列であることを示せ.

5. A と B が n 次の対称行列のとき, AB はいつも対称行列か調べ, AB がいつも対称行列になるための必要十分条件を求めよ.

6. A が交代行列ならば, A^2 は対称行列であることを示せ.

7. 行列 $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$ との積が交換可能な行列をすべて求めよ．ただし, a_1, a_2, a_3 は相異なる実数とする.

8. 正方行列 A は, 対称行列と交代行列の和として一意的に表せることを証明せよ.

9. $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$, $B = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$ の積を求めよ.

2.2　行列の基本変形

演習問題 2-4

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ と行対等な被約階段行列を求めよ.

2. 次の行列の階数を求めよ．

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -2 \\ -3 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に次のような行基本変形 $(I), (II), (III), (IV)$ を施した．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{II} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{III} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(I), (II), (III), (IV)$ の基本行列を求め, 単位行列 I_2 を A と基本行列の積で表せ．

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ は行についての基本変形だけで単位行列に変形できる．$PA = I$ を満たす行列の積 P を求めよ．

5. 次のベクトルで張られる部分空間の次元を求めよ．

$$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 1, 3), \mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0, 1), \mathbf{v}_3 = (4, -1, 3, 11), \mathbf{v}_4 = (-2, 3, 1, 1)$$

2.3 連立 1 次方程式と逆行列

演習問題 2-6

1. 次の連立 1 次方程式をガウスの消去法を用いて解け．

(a) $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 3x - 5y = 7 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 6 \end{cases}$

2. 次の連立 1 次方程式が解をもつように, 定数 k の値を定めよ．また, そのときの解を求めよ．

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 3x + 2y + 5z = 9 \\ 5x + 2y + 7z = k \end{cases}$$

3. 次の行列の正則性を判定し, 正則ならば逆行列を求めよ.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & a \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ が正則行列となるのは a がどのようなときか調べよ.

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則行列であることを示し, A を基本行列の積で表せ.

6. 正方行列のひとつの行の成分がすべて 0 ならば, A は正則でないことを証明せよ.

7. A, B がともに n 次正則行列ならば, 積 AB も正則で,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

となることを証明せよ.

2.4　行列式

演習問題 2-8

1. 次の行列式の値を求めよ.

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -4 & -4 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2. 次の行列式を因数分解せよ.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ a & c+a & c \\ a & b & a+b \end{vmatrix}$

3. 次の方程式を解け. $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 1 \\ 2 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$

4. 平面上の 2 点 $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ を通る直線の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ.

5. 空間上の 3 点 $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$ を通る平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ.

6. 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ となる基本解をもてば, $|A| = 0$ であることを示せ.

7. 次の連立 1 次方程式をクラメールの公式をもちいて解け.

(a) $\left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y & = & 5 \\ 3x - 5y & = & 7 \end{array} \right.$

(b) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 3 \\ x + 2y + 2z & = & 5 \\ x + 2y + 3z & = & 6 \end{array} \right.$

第 3 章　線形写像

3.1　線形写像

演習問題 3-2

1. 次の写像のうち線形写像はどちらか.

$$T_1 : \mathcal{R}^3 \longrightarrow \mathcal{R}^2,\ T_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

$$T_2 : \mathcal{R}^3 \longrightarrow \mathcal{R}^2,\ T_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

2. V は n 次元ベクトル空間, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ を V の基底とする. $T : V \longrightarrow \mathcal{R}^n$ を $T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n$ と定義すると, T は線形写像になることを示せ.

3. 線形写像 $T : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$ について, 次の条件は同値であることを証明せよ.

(a) T は同型写像である.

(b) $T \circ S = 1$ を満たす線形写像 $S : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$ が存在する.

4. $T : V \longrightarrow W$ が線形写像のとき, $\ker(T), Im(T)$ は V, W の部分空間であることを示せ.

5. $T : \mathcal{R}^3 \longrightarrow \mathcal{R}^3$ が $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ のとき, 標準基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ に関する T の行列表現 $[T]$ と基底 $\{\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ に関する行列表現 $[T]_{\mathbf{w}}$ を求めよ.
また $\dim\ker(T)$ を求めよ.

6. $T : \mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}^3$ が, $T(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をみたすとき, T の行列表現を求めよ.

3.2　行列の変換と固有値

演習問題 3-4

1. $\mathcal{R}^2$ の基底 $\{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ から一般の基底 $\{\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ への変換行列 P を求めよ.

2. R^n の基底 $\{\mathbf{v}_i\}$ から $\{\mathbf{w}_i\}$ への変換行列 P は n 次の正則行列であることを示せ.

3. 次の行列の固有値と固有空間を求めよ.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

4. $A^2 = A$ を満たす n 次の正方行列 A の固有値を求めよ.

5. 行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とすると, A^m の固有値は $\lambda_1^m, \lambda_2^m, .., \lambda_n^m$ であることを証明せよ.

6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, ケイリー・ハミルトンの定理をもちいて A^4, A^{-1} を求めよ.

7. X を 2 次の行列とするとき, $X^2 - 3X + 2I = 0$ を満たす X をすべて求めよ.

第4章　行列の対角化

4.1　行列の対角化

演習問題 4-2

1. 次の行列は対角化可能か．可能ならば適当な正則行列 P を求めて対角化せよ．もし不可能ならば三角化を行なえ．

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. U, W がベクトル空間 V の部分空間であるとき, $U + W$ が直和であるための必要十分条件は $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ であることを証明せよ．

3. U, W が有限次元のとき,

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$$

が成り立つことを証明せよ．

4. 3 次元ベクトル空間 $\mathcal{R}^3$ において

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, W = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = x_3\}$$

とすると, $\mathcal{R}^3 = U \oplus W$ であることを証明せよ．

5. 直交行列の固有値 λ の絶対値はつねに 1 であることを証明せよ．

6. 正方行列 U の列ベクトルが正規直交基底をなすとき, U はユニタリ行列であることを証明せよ．

4.2　正規行列

演習問題 4-4

1. 次の行列をユニタリ行列により対角行列に変換せよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列を直交行列により対角行列に変換せよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$ がユニタリ行列により対角行列に変換される条件を求めよ.

4. 次の 2 次形式を直交行列による変換により標準化せよ.

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2$$

5. 次のエルミート行列をユニタリ行列による変換により標準化せよ.

$$x_1\bar{x_1} + (1-i)x_1\bar{x_2} + (1+i)x_2\bar{x_1} + 2x_2\bar{x_2}$$

第5章　Jordan標準形

5.1　ベキ零行列の標準形

演習問題 5-2

1. 次のベキ零行列の標準形と変換行列 P を求めよう.

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (b)\quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列の Jordan 標準形と変換行列 P を求めよう.

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

付 録A　問題解答

第 1 章

演習問題 1.2.1

1.

(a) 対応する成分どうしを加える:

$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(2,-1,3)+(-1,1,4)=(2-1,-1+1,3+4)=(1,0,7)$.

(b) それぞれの成分のスカラー倍:

$3\mathbf{B}=3(-1,1,4)=(-3,3,12)$.

(c) $\|\mathbf{A}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ より

$\|\mathbf{A}\|=\|(2,-1,3)\|=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14}$.

(d) 最初にスカラー倍その後ベクトル和:

$3\mathbf{B}-2\mathbf{A}=3(-1,1,4)-2(2,-1,3)=(-3,3,12)-(4,-2,6)=(-7,5,6)$.

2.

(a) $\mathbf{B}-\mathbf{A}=(3,0,1)-(-2,-1,3)=(5,1,-2)=5\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.

(b) $3\mathbf{A}+\mathbf{B}=3(-2,-1,3)+(3,0,1)=(-6,-3,9)+(3,0,1)=(-3,-3,10)$

$=-3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+10\mathbf{k}$.

(c) $3\mathbf{B}-2\mathbf{A}=3(3,0,1)-2(-2,-1,3)=(9,0,3)+(4,2,-6)=13\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

(d) $\dfrac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{2}=\dfrac{(-2,-1,3)+(3,0,1)}{2}=\dfrac{(1,-1,4)}{2}=\dfrac{\mathbf{i}}{2}-\dfrac{\mathbf{j}}{2}+2\mathbf{k}$.

3. 幾何ベクトルは空間のベクトルと同一視できるので演習問題 1-2-1.5 を参照.

4. 幾何ベクトルは空間のベクトルと同一視できるので演習問題 1-2-1.5 を参照.

5. $\mathbf{A}=(a_1,a_2,a_3),\ \mathbf{B}=(b_1,b_2,b_3),\ \mathbf{C}=(c_1,c_2,c_3)\in R^3$ とすると,

(1)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}+\mathbf{B} &= (a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)\\ &= (a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)\in R^3.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}+\mathbf{B} &= (a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)\\ &= (b_1+a_1,b_2+a_2,b_3+a_3)\\ &= \mathbf{B}+\mathbf{A}.\end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} &= (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)+(c_1,c_2,c_3) \\
&= ((a_1+b_1)+c_1, (a_2+b_2)+c_2, (a_3+b_3)+c_3) \\
&= (a_1+(b_1+c_1), a_2+(b_2+c_2), a_3+(b_3+c_3)) \\
&= (a_1,a_2,a_3)+(b_1+c_1, b_2+c_2, b_3+c_3) \\
&= \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}).
\end{aligned}
$$

(4)

$$\mathbf{0} \;=\; (0,0,0) \text{ とすると } \mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}.$$

(5)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^* &= (-a_1,-a_2,-a_3) \text{ とすると} \\
\mathbf{A}+\mathbf{A}^* &= (a_1+(-a_1), a_2+(-a_2), a_3+(-a_3)) \\
&= (0,0,0)=\mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

(6)

$$\alpha\mathbf{A} \;=\; (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) \in R^3.$$

(7)

$$
\begin{aligned}
\alpha(\beta\mathbf{A}) &= \alpha(\beta a_1, \beta a_2, \beta a_3) \\
&= (\alpha\beta a_1, \alpha\beta a_2, \alpha\beta a_3) \\
&= \alpha\beta(a_1,a_2,a_3) \\
&= \alpha\beta(\mathbf{A}).
\end{aligned}
$$

(8)

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\mathbf{A} &= (\alpha+\beta)(a_1,a_2,a_3) \\
&= ((\alpha+\beta)a_1, (\alpha+\beta)a_2, (\alpha+\beta)a_3) \\
&= (\alpha a_1+\beta a_1, \alpha a_2+\beta a_2, \alpha a_3+\beta a_3) \\
&= (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)+(\beta a_1, \beta a_2, \beta a_3) \\
&= \alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B}.
\end{aligned}
$$

(9)

$$\begin{aligned}
1\mathbf{A} &= 1(a_1, a_2, a_3) \\
&= (1a_1, 1a_2, 1a_3) = (a_1, a_2, a_3) = \mathbf{A}, \\
0\mathbf{A} &= 0(a_1, a_2, a_3) \\
&= (0a_1, 0a_2, 0a_3) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}, \\
\alpha\mathbf{0} &= \alpha(0, 0, 0) \\
&= (\alpha 0, \alpha 0, \alpha 0) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

6. $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{B}\|$ のとき $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を 2 辺とするひし形の対角線ベクトル．よって $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の作る角を 2 等分するベクトル．$\|\mathbf{A}\| \neq \|\mathbf{B}\|$ のときは, $\mathbf{B}$ をスカラー倍して, $\|\mathbf{A}\| = \|\alpha\mathbf{B}\|$ とすると, $\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$ は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の作る角を 2 等分するベクトルとなる．**7.**

$$\begin{aligned}
x(1, 1, 1) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 0) &= (x, x, x) + (y, y, 0) + (z, 0, 0) \\
&= (x + y + z, x + y, x) = (2, -2, 4)
\end{aligned}$$

より $x + y + z = 2,\ x + y = -2, x = 4$．この式を後ろから順に解くと $x = 4, y = -7, z = 5$.

演習問題 1.4.1

1.

(a) $\|\mathbf{B}\| = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})^{1/2} = (2^2 + 4^2 + (-3)^2)^{1/2} = \sqrt{29}$.

(b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (-1, 3, 1) \cdot (2, 4, -3) = -2 + 12 - 3 = 7$.

(c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| \cos\theta$ より

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|} = \frac{7}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1}\sqrt{2^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{11}\sqrt{29}}.$$

よって $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{309}}\right)$.

(d) 単位ベクトルはそれ自身をその大きさで割ることで得られるから

$$\frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|} = \frac{(-1, 3, 1)}{\sqrt{11}}.$$

2. 直交系とは互いのベクトルが直交している集合.

正規直交系とはそれぞれが単位ベクトルで直交系をなしているもの.

(a) $(1, 3) \cdot (6, -2) = 6 - 6 = 0$ より $(1, 3) \perp (6, -2)$.

また正規直交系に直すと $\{\frac{(1,3)}{\sqrt{10}}, \frac{(6,-2)}{2\sqrt{10}}\}$.

(b)

$$(1, 2, 2) \cdot (-2, 2, -1) = -2 + 4 - 2 = 0,$$

$$(1, 2, 2) \cdot (2, 1, -2) = 2 + 2 - 4 = 0,$$

$$(-2, 2, -1) \cdot (2, 1, -2) = -4 + 2 + 2 = 0.$$

よって $(1,2,2) \perp (-2,2,-1)$, $(1,2,2) \perp (2,1,-2)$, $(-2,2-1) \perp (2,1,-2)$. また正規直交系に直すと $\{\frac{(1,2,2)}{3}, \frac{(-2,2,-1)}{3}, \frac{(2,1,-2)}{3}\}$.
(c) $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \cdot 2\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k} = 2 + 1 - 1 \neq 0$ より 直交系でない.
3. 平面上に任意の点 (x,y,z) をとり, 点 $(5,-1,3)$ を始点とし点 (x,y,z) を終点とするベクトルを考える. このベクトル $(x-5, y+1, z-3)$ は求める平面上にあるので, 法ベクトル $(2,1,-1)$ と直交する. よってその内積は零である. これより

$$\begin{aligned}(x-5,y+1,z-3)\cdot(2,1,-1) &= 2(x-5)+y+1-(z-3)\\ &= 2x+y-z-6=0.\end{aligned}$$

4. すべての θ において, $|\cos\theta| \leq 1$ より

$$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| = \|\mathbf{A}\|\ \|\mathbf{B}\||\cos\theta| \leq \|\mathbf{A}\|\ \|\mathbf{B}\|.$$

5.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|^2 &= \|\mathbf{A}-\mathbf{C}+\mathbf{C}-\mathbf{B}\|^2\\ &= (\mathbf{A}-\mathbf{C}+\mathbf{C}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{C}+\mathbf{C}-\mathbf{B})\\ &= (\mathbf{A}-\mathbf{C})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{C})+2(\mathbf{A}-\mathbf{C})\cdot(\mathbf{C}-\mathbf{B})\\ &+ (\mathbf{C}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}-\mathbf{B})\\ &= \|\mathbf{A}-\mathbf{C}\|^2+2\|\mathbf{A}-\mathbf{C}\|\ \|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|\cos\theta+\|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|^2\\ &\underbrace{\leq}_{\mathbf{4}\text{ より}} \|\mathbf{A}-\mathbf{C}\|^2+2\|\mathbf{A}-\mathbf{C}\|\ \|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|+\|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|^2\\ &= (\|\mathbf{A}-\mathbf{C}\|+\|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|)^2.\end{aligned}$$

よって

$$\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}-\mathbf{C}\|+\|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|.$$

6.

$$\begin{aligned}0 \leq \|(f-\lambda g)\|^2 &= (f-\lambda g, f-\lambda g)\\ &= \|f\|^2-2\lambda(f,g)+\lambda^2\|g\|^2.\end{aligned}$$

これは λ についての 2 次式で 0 より大きいので, その判別式 Δ は 0 以下になる. よって

$$\Delta = |(f,g)|^2 - \|f\|^2\ \|g\|^2 \leq 0.$$

これより

$$|(f,g)| \leq \|f\|\ \|g\|.$$

7. (a) $\|f\| = \{\int_0^2 x^2dx\}^{1/2} = \{\frac{x^3}{3}|_0^2\}^{1/2} = \sqrt{\frac{8}{3}}$.
(b)

$$\begin{aligned}\|f\| &= \{\int_0^2 [\sin\pi x]^2 dx\}^{1/2} = \{\int_0^2 \frac{1-\cos 2\pi x}{2}dx\}^{1/2}\\ &= \{\frac{x}{2}-\frac{\sin 2\pi x}{4\pi}|_0^2\}^{1/2} = 1.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\|f\| &= \{\int_0^2 [\cos\pi x]^2 dx\}^{1/2} = \{\int_0^2 \frac{1+\cos 2\pi x}{2} dx\}^{1/2} \\ &= \{\frac{x}{2} + \frac{\sin 2\pi x}{4\pi} |_0^2\}^{1/2} = 1.\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}(P_0, P_1) &= \int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \ |_{-1}^1 = 0. \\ (P_0, P_2) &= \int_{-1}^1 \frac{3x^2-1}{2} dx = \frac{x^3-x}{2} \ |_{-1}^1 = 0. \\ (P_1, P_2) &= \int_{-1}^1 x\frac{3x^2-1}{2} dx = \frac{3x^4}{8} - \frac{x^2}{4} \ |_{-1}^1 = 0.\end{aligned}$$

演習問題 1.6.1

1.

(a)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (1,2,-3)\times(2,-1,1) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{rrrr} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \\ &= (2-3, -6-1, -1-4) = (-1,-7,-5).\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= (4,2,2)\times(-1,-7,-5) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 2 & 2 \\ -1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{rrrr} 2 & 2 & 4 & 2 \\ -7 & -5 & -1 & -7 \end{array} \\ &= (-10+14, -2+20, -28+2) = (4,18,-26).\end{aligned}$$

(c) $\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (4,2,2)\cdot(-1,-7,-5) = -4-14-10 = -28.$
または

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= (4,2,2)\cdot((1,2,-3)\times(2,-1,1)) \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -28.\end{aligned}$$

2. $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ と $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ によって作られる平面を Γ とすると, Γ の法ベクトル $\mathbf{n}_\Gamma$ は $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ と $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ に直交する．よって

$$\mathbf{n}_\Gamma = (1,1,-1)\times(2,3,2) = \begin{array}{rrrr} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{array} = (5,-4,1).$$

次に, 求める平面は Γ に平行なので $\mathbf{n}_\Gamma$ は求める平面に対しても法ベクトルとなる．そこで求める平面上に任意の点 (x, y, z) をとると $(x-1, y, z-1)$ は $\mathbf{n}_\Gamma$ と直交する．よって求める平面の方程式は

$$\mathbf{n}_\Gamma \cdot (x-1, y, z-1) = (5, -4, 1) \cdot (x-1, y, z-1) = 5x - 4y + z - 6 = 0.$$

3. 求める平面 Γ は平面 $x - 2y + 3z - 4 = 0$ に垂直であるから平面 $x - 2y + 3z - 4 = 0$ の法ベクトル $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$ は求める平面上にあると考えることができる．また求める平面は 2 点 $(2, 0, -1), (3, 2, 1)$ を通るのでこの 2 点を結ぶベクトルを作ると $(3-2, 2-0, 1+1) = (1, 2, 2)$ となり, このベクトルも求める平面上にあることが分かる．そこでこのふたつのベクトルの外積をとると求める平面 Γ の法ベクトル

$$\mathbf{n}_\Gamma = (1, -2, 3) \times (1, 2, 2) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-10, 1, 4)$$

が得られる．ここで平面 Γ 上に任意の点 (x, y, z) をとり $(2, 0, -1)$ と結ぶと $(x-2, y, z+1)$ は $\mathbf{n}_\Gamma$ と直交する．よって求める平面の方程式は

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\Gamma \cdot (x-2, y, z+1) &= (-10, 1, 4) \cdot (x-2, y, z+1) \\ &= -10x + y + 4z + 24 = 0. \end{aligned}$$

4. 三角形の面積は $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ を 2 辺とする平行四辺形の半分であるから,

$$\frac{1}{2}\|(1, 3, -1) \times (2, 1, 1)\| = \frac{1}{2}\|(4, -3, -5)\| = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 9 + 25} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

5. $m = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (-2, 1, -1) \times (1, 3, 1) = (4, 1, -7)$.

6. $\mathbf{v} = (1, 2, 2) \times (1, -2, 3) = (10, -1, -4)$.

7. $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ の作る面の面積は $\|\mathbf{B} \times \mathbf{C}\|$．また $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ と $\mathbf{A}$ の間の角を θ とすると, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ の作る平行六面体の高さは $\|\mathbf{A}\| \cos\theta$．よって $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ の作る平行六面体の面積は

$$\|\mathbf{B} \times \mathbf{C}\| \; \|\mathbf{A}\| \cos\theta = \|\mathbf{A}\| \cos\theta \; \|\mathbf{B} \times \mathbf{C}\| = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}).$$

8. それ自身の外積は $\mathbf{0}$, かける順序を変えると符号が反対になることに注意.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \times (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3) \\ &= (2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_1 - (2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \times 2\mathbf{e}_2 \\ &- 4(2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_3 \\ &= 5(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) - (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) - 4(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) + 2(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2) \\ &- 8(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) - 20(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \\ &= 5(\mathbf{j} - \mathbf{i}) + \mathbf{j} + \mathbf{k} - (\mathbf{i} - \mathbf{j}) - 2(\mathbf{i} + \mathbf{k}) - 8(\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 20(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \\ &= -36\mathbf{i} - \mathbf{j} - 29\mathbf{k}. \end{aligned}$$

9. スカラー 3 重積を用いて調べる．

$$\begin{aligned} (4, -3, 1) \cdot ((10, -3, 0) \times (2, -6, 3)) &= \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 10 & -3 & 0 \\ 2 & -6 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 4(-9) + 3(30) + (-54) = 0. \end{aligned}$$

よって定理**??**より 1 次従属.

10. (a) $c_1 + c_2x + c_3x^2 = 0$ とおき, x について 2 回微分すると

$$c_2 + 2c_3x = 0,\ 2c_3 = 0$$

となる．これより $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ を得るので $\{1, x, x^2\}$ は 1 次独立.

(b) $c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0$ とおき, x について 1 回微分すると

$$c_1 \cos x - c_2 \sin x = 0.$$

この連立方程式を解くと, $c_1 = 0, c_2 = 0$ となるので 1 次独立.

11. $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が 1 次独立ならば, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ を示す．(対偶を用いて $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ のとき $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が 1 次従属であることを示す．)

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ とすると $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は平行．つまり $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{B}$ となるある $\lambda \neq 0$ が存在．書き直すと

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B} = 0$$

となり $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ は 1 次従属.

次に $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ ならば, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が 1 次独立を示す．(対偶を用いて $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が 1 次従属のとき, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ を示す．)

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が 1 次従属ならば, 0 でない c_1 または c_2 に対して,

$$c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

となり $\mathbf{A} = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{B}$．つまり $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は平行．したがって, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

演習問題 1.8.1

1. w_1, w_2 を W の元とすると, $w_1 = (x_1, y_1, 1), w_2 = (x_2, y_2, 1)$ と表せる．部分空間になるためには和とスカラー倍が閉じていれば良いのでまず和を調べてみる．$w_1 + w_2 = (x_1, y_1, 1) + (x_2, y_2, 1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2)$ となり z 成分が 1 でないので $w_1 + w_2$ は W の元でない．よって R^3 の部分空間でない

2. $w_1, w_2 \in W$ とすると,

$$w_1 = (x_1, y_1, -3x_1 + 2y_1), w_2 = (x_2, y_2, -3x_2 + 2y_2)$$

とあらわせる．よって

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= (x_1, y_1, -3x_1 + 2y_1) + (x_2, y_2, -3x_2 + 2y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, -3(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2)) \in W. \end{aligned}$$

また

$$\alpha w_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1, -3\alpha x_1 + 2\alpha y_1) \in W.$$

したがって, W は R^3 の部分空間である.

3. W の任意のベクトルを w とすると, $w=(x,y,-3x+2y)$. w を $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ を用いて表すと,

$$\begin{aligned} w=(x,y,-3x+2y) &= x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(-3x+2y)\mathbf{k} \\ &= x\mathbf{i}-3x\mathbf{k}+y\mathbf{j}+2y\mathbf{k} \\ &= x(\mathbf{i}-3\mathbf{k})+y(\mathbf{j}+2\mathbf{k}) \end{aligned}$$

よって W に含まれるすべてのベクトルは, $\mathbf{i}$ - $3\mathbf{k}$ と $\mathbf{j}$ + $2\mathbf{k}$ の 1 次結合．また $\mathbf{i}$ - $3\mathbf{k}$ と $\mathbf{j}$ + $2\mathbf{k}$ は互いに 1 次独立なので, $\mathbf{i}$ - $3\mathbf{k}$ と $\mathbf{j}$ + $2\mathbf{k}$ は W の基底となる．よって $\dim W=2$.

4. $c_1(\mathbf{i}+\mathbf{j})+c_2\mathbf{k}+c_3(\mathbf{i}+\mathbf{k})=\mathbf{0}$ とおくと,

$$(c_1+c_3)\mathbf{i}+c_1\mathbf{j}+(c_2+c_3)\mathbf{k}=\mathbf{0}.$$

よって $c_1=c_2=c_3=0$．つまり 1 次独立.

次に $(a_1,a_2,a_3)\in R^3$ のとき

$$(a_1,a_2,a_3)=a_2(\mathbf{i}+\mathbf{j})+(a_3+a_2-a_1)\mathbf{k}+(a_1-a_2)(\mathbf{i}+\mathbf{k})$$

より $\langle \mathbf{i}+\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{i}+\mathbf{k}\rangle=R^3$.

5. $\{3,x-2,x+3,x^2+1\}$ で生成される部分空間を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \langle 3,x-2,x+3,x^2+1\rangle \\ &= \{3c_1+c_2(x-2)+c_3(x+3)+c_4(x^2+1) : c_i \text{ 実数 }\} \end{aligned}$$

ここで V の元を v とすると

$$\begin{aligned} v &= 3c_1+c_2(x-2)+c_3(x+3)+c_4(x^2+1) \\ &= (3c_1-2c_2+3c_3+c_4)+(c_2+c_3)x+c_4x^2. \end{aligned}$$

演習問題 1.3 で $\{1,x,x^2\}$ は 1 次独立であることを示したので, $\{1,x,x^2\}$ は V の基底となる．よって $\dim V=3$.

6.

$$\mathbf{v}_1=\frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}.$$

次に

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2-(\mathbf{x}_2,\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 &= (0,1,1)-((0,1,1)\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}})\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} \\ &= (0,1,1)-\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}) \\ &= \frac{1}{3}(-2,1,1) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \frac{\mathbf{x}_2-(\mathbf{x}_2,\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{x}_2-(\mathbf{x}_2,\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1\|} \\ &= \frac{\frac{1}{3}(-2,1,1)}{\|\frac{1}{3}(-2,1,1)\|} \\ &= \frac{\frac{1}{3}(-2,1,1)}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1). \end{aligned}$$

最後に

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_3-(\mathbf{x}_3,\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1-(\mathbf{x}_3,\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 &= (0,0,1)-((0,0,1)\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}})\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} \\
&- ((0,0,1)\cdot\frac{(-2,1,1)}{\sqrt{6}})\frac{(-2,1,1)}{\sqrt{6}} \\
&= (0,0,1)-\frac{(1,1,1)}{3}-\frac{(-2,1,1)}{6} \\
&= (0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(0,-1,1)
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= \frac{\mathbf{x}_3-(\mathbf{x}_3,\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1-(\mathbf{x}_3,\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{x}_3-(\mathbf{x}_3,\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1-(\mathbf{x}_3,\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2\|} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(0,-1,1)}{\|\frac{1}{2}(0,-1,1)\|}=\frac{\frac{1}{2}(0,-1,1)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1).
\end{aligned}$$

よって求める正規直交系は

$$\{\mathbf{v}_1=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}},\mathbf{v}_2=\frac{(-2,1,1)}{\sqrt{6}},\mathbf{v}_3=\frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}\}.$$

7. $U+W, U\cap W$ は例題**??**より V の部分空間である．そこで,

$$\dim U=n,\dim W=m,\dim(U\cap W)=r \text{ とおき,}$$

$\{v_1,v_2,\dots,v_r\}$ を $U\cap W$ の基底,
$\{v_1,v_2,\dots,v_r,u_1,\dots,u_{n-r}\}$ を U の基底,
$\{v_1,v_2,\dots,v_r,w_1,\dots,w_{m-r}\}$ を W の基底とする．このとき,

$$\{v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_{n-r},w_1,\dots,w_{m-r}\}$$

が $U+W$ の基底をなすことを示せば

$$\dim(U+W)=r+n-r+m-r=n+m-r$$

となり,

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

となることがわかる．そこで

$c_1v_1+\cdots+c_rv_r+c_1^*u_1+\cdots+c_{n-r}^*u_{n-r}+c_1^{**}w_1+\cdots+c_{m-r}^{**}w_{m-r}=0$ とおくと,

$$c_1v_1+\cdots+c_rv_r+c_1^*u_1+\cdots+c_{n-r}^*u_{n-r}=-(c_1^{**}w_1+\cdots+c_{m-r}^{**}w_{m-r}).$$

ところが左辺は U の元であり, 右辺は W の元であることから共に $U\cap W$ に含まれる．よって $\{v_1,v_2,\dots,v_r\}$ の 1 次結合で表される．つまり

$$c_1^*u_1+\cdots+c_{n-r}^*u_{n-r}=d_1v_1+\ldots+d_rv_r$$

$$c_1^{**}w_1 + \cdots + c_{m-r}^{**}w_{m-r} = e_1v_1 + \ldots + e_rv_r$$

これより $c_1^* = \cdots = c_{n-r}^* = 0,\ c_1^{**} = \cdots = c_{m-r}^{**} = 0$ となり, $c_1 = \cdots = c_r = 0$ を得る．したがって,

$$\{v_1, v_2, \ldots, u_1, \ldots, u_{n-r}, w_1, \ldots, w_{m-r}\}$$

は 1 次独立．なお $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_{n-r}\}$ は U を張り,
$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{m-r}\}$ が W を張るので,

$$\{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_{n-r}, w_1, \ldots, w_{m-r}\}$$

が $U + W$ を張るのは明らかである．

8. $(a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33}), (a_{41}, a_{42}, a_{43})$ を 4 個の 3 次元空間のベクトルとする．線形結合をとり $\mathbf{0}$ とおくと

$$c_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}) + c_2(a_{21}, a_{22}, a_{23}) + c_3(a_{31}, a_{32}, a_{33}) + c_4(a_{41}, a_{42}, a_{43}) = \mathbf{0}$$

成分を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} c_1a_{11} + c_2a_{21} + c_3a_{31} + c_4a_{41} &= 0 \\ c_1a_{12} + c_2a_{22} + c_3a_{32} + c_4a_{42} &= 0 \\ c_1a_{13} + c_2a_{23} + c_3a_{33} + c_4a_{43} &= 0 \end{aligned}$$

この方程式は 3 つの式に 4 つの未知数をもっているので, 解 c_1, c_2, c_3, c_4 はすべて 0 の必要はない．つまり

$$\{(a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33}), (a_{41}, a_{42}, a_{43})\}$$

は 1 次従属.

第 2 章

演習問題 2.2.1

1.

(a) 行列の和は対応する成分の和:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -3+2 \\ 4+3 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) スカラー倍はそれぞれの成分のスカラー倍:

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+3 & -6-6 \\ 8-9 & 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) 行列の積は対応する行と列の内積:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-9 & 4-0 \\ -4+6 & 8+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$
$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3(2)+1(3)+7(4) & 3(-3)+1(6)+7(1) \\ 5(2)+2(3)-4(4) & 5(-3)+2(6)-4(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 4 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}. \\ BA &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(3)-3(5) & 2(1)-3(2) & 2(7)-3(-4) \\ 3(3)+6(5) & 3(1)+6(2) & 3(7)+6(-4) \\ 4(3)+1(5) & 4(1)+1(2) & 4(7)+1(-4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9 & -4 & 26 \\ 39 & 15 & -3 \\ 17 & 6 & 24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} & A^2 - 5A + 6I = (A-2I)(A-3I) \\ = & \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) \\ = & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. A と B が対称行列ということは, $A^t = A, B^t = B$ が成り立つということである．また, $A+B$ が対称行列であることを示すには $(A+B)^t = A+B$ が成り立つことを示せばよい．

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B.$$

5. n 次の対称行列 A, B において $(AB)^t = B^t A^t = BA$ はいつも成り立つ．そこで AB が対称行列になるためには $AB = BA$ でなければならないことが分かる．また, 一般に行列の積には交換法則が成り立たないので AB は必ずしも BA と等しくない．そこで AB はいつも対称行列かという質問に対する答はたぶん No であろう．実際, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと A, B ともに

対称行列であるが,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

より, $(AB)^t \neq AB$. つまり AB は対称行列でない.

次に AB がいつも対称行列になるための必要十分条件を求める.

n 次の対称行列 A, B において $(AB)^t = B^t A^t = BA$ がいつも成り立つので, AB が対称行列になるための必要十分条件は $AB = BA$ であることを示す. まず AB を対称行列とすると $(AB)^t = AB$ より $AB = BA$ が成り立つ.

次に $AB = BA$ とすると, $(AB)^t = B^t A^t = BA$ より $(AB)^t = AB$. よって AB は対称行列.

6. $(A^2)^t = (A\ A)^t = A^t\ A^t = (-A)(-A) = A^2$.

7. 行列 $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$ との積が交換可能な行列をB $= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ とおくと, $AB = BA$ より

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & a_1b_{13} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & a_2b_{23} \\ a_3b_{31} & a_3b_{32} & a_3b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & a_3b_{13} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & a_3b_{23} \\ a_1b_{31} & a_2b_{32} & a_3b_{33} \end{pmatrix}.$$

これより対応する成分は等しいので

$$a_1b_{12} = a_2b_{12}, a_1b_{13} = a_3b_{13},$$

$$a_2b_{21} = a_1b_{21}, a_2b_{23} = a_3b_{23},$$

$$a_3b_{31} = a_1b_{31}, a_3b_{32} = a_2b_{32}$$

となる. ここで $a_1, a_2.a_3$ は異なる実数であることに注意すると

$$b_{12} = b_{13} = b_{21} = b_{23} = b_{31} = b_{32} = 0$$

を得る. よって求める行列 B は

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

となり対角行列である.

8. $(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$. よって $A - A^t$ は交代行列である. また $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$. よって $A + A^t$ は対称行列である. ここで

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

とおくと A は対称行列と交代行列の和であることが分かる．つぎに B が対称行列, C が交代行列で $A=B+C$ が成り立つとすると

$$A^t = B^t + C^t = B - C.$$

よって $A+A^t=2B,\ A-A^t=2C$ となり

$$B = \frac{A+A^t}{2},\ C = \frac{A-A^t}{2}.$$

9.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix}$$

より

$$AB = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

演習問題 2.4.1

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3R_1+R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 6 & -7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 6 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-6R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{4}{3}R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.

(a)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -2 \\ -3 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\frac{1}{2}\times R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -3 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{3R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -7 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{2}{7}\times R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって rank $= 2$.

(b)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{-2\times R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 9 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3\times R_1+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & -10 & 18 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{5}\times R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} \\ 0 & -10 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}\times R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって rank $= 2$.

(c) 演習問題 2-4-1.1 より rank $= 3$.

3. 基本行列は基本変形を単位行列に施すことにより求まる.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{-R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{-1\times R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = II, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{-3\times R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = III, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{-R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = IV.\end{aligned}$$

次に, 単位行列を行列 A と基本行列の積で表すには, 行列 A に基本行列 I, II, III, IV を左から順にかければよい. よって,

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4. $PA = I$ を満たす行列の積 P は次のようにして求めることができる.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-2R_1+R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-3R_1+R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{-1}{7} \times R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \overset{4R_2+R_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{-4}{7} & \frac{-13}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{4} \times R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{-13}{28} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \overset{R_3+R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{7} & \frac{-5}{28} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{-13}{28} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\overset{3R_3+R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{-3}{7} & \frac{-11}{28} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{7} & \frac{-5}{28} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{-13}{28} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \overset{-2R_2+R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{-1}{28} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{7} & \frac{-5}{28} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{-13}{28} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

これより

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{1}{28} & \frac{1}{4} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{5}{28} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{13}{28} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -8 & -5 & 7 \\ -4 & -13 & 7 \end{pmatrix}.$$

5. 定理**??**より行空間の次元はその行列の階数と等しいので, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ を行ベクトルとする行列の階数を求めればよい.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-1 \times R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2R_1+R_2 \\ -4R_1+R_3 \\ 2R_1+R_4}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-3R_2+R_3 \\ -2R_2+R_4}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって $\dim = 3$.

演習問題 2.6.1

1.

(a)

$$[A:\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3\times R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}\times R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\times R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$[A:\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-R_3+R_2 \\ -R_3+R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$[A:\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-2R_3+R_2 \\ -R_3+R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで rank(A) = rank$([A:\mathbf{b}])$ なので方程式は解をもつ．また $[A:\mathbf{b}]_R$ を方程式に書き直すと

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = & 1 \\ x_2 - 3x_4 = & -1 \\ x_3 + 3x_4 = & 1 \end{cases}$$

ここで自由度 = 4 - 3 = 1 より $x_4 = \alpha$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつための必要十分条件は rank(A) = rank$([A:\mathbf{b}])$.

$$\begin{aligned} [A:\mathbf{b}] &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 9 \\ 5 & 2 & 7 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[-5R_1+R_3]{-3R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -4 & -12 \\ 0 & -8 & -8 & k-35 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{4}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -8 & k-35 \end{pmatrix} \xrightarrow{8R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k-11 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{-2R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k-11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここで rank$(A) = 2$ より rank$([A:\mathbf{b}])$ も 2 でなければならない．言い換えると $k-11$ が 0 でなければこの連立方程式は解をもたない．よって $k = 11$．さらに $k = 11$ のとき，$x_1 + x_3 = 1, x_2 + x_3 = 3$ であるから，$x_3 = \alpha$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. A が n 次の正則行列 $\Leftrightarrow$ rank$(A) = n \Leftrightarrow A_R = I_n$.

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ R_1+R_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{-1R_2 \\ 3R_2+R_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{-2R_3+R_2 \\ -3R_3+R_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -9 & 16 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって A は正則で $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 \\ -7 & 12 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

(b)

$$\begin{aligned} [A : I] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{\substack{R_1 \leftrightarrow R_4 \\ R_2 \leftrightarrow R_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって A は正則で $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. A は n 次の正則行列 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=n$．よってこの場合 $\mathrm{rank}(A)=3$ となるように a を定めればよい．

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & a \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{2}R_1 \\ R_2 \leftrightarrow R_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{-5R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & \frac{23}{2} \\ 0 & -1 & a+\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{23}{6} \\ 0 & -1 & a+\frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{23}{6} \\ 0 & 0 & a+\frac{32}{6} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ここで $\mathrm{rank}(A)=3$ となるには $a+\dfrac{32}{6}\neq 0$ とならなければならない．よって $a\neq -\dfrac{16}{3}$.

5. A を基本行列の積で表すには, 単位行列から始めて基本変形を繰り返しながら A を作る．このとき用いた基本変形から生まれる基本行列を単位行列に左側から順にかけていけば, 基本行列の積で A を表せる．

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{-3R_1+R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{-3}{2}R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\frac{5}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{-2}{5}R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

よって A は正則行列．次に, いま行なった基本変形を逆に戻し, その基本変形から生まれる基本行列を順にかけていくと

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

6. $A = \begin{pmatrix} * & & * \\ & * & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ とすると, すべての行列 X に対して,

$$AX = \begin{pmatrix} * & & * \\ & * & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ & \ddots & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & & * \\ & * & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \neq I_n$$

となり A は正則でない.

別解 A を n 次の正方行列とする. A のひとつの行の成分がすべて 0 ならば, A_R の少なくともひとつの行の成分はすべて 0 である. よって $\mathrm{rank}(A) \neq n$ となり定理**??**より A は正則でない.

7.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

より AB は正則. また $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ となる.

演習問題 2.8.1

1.

(a) 第 2 行についての余因子展開を行なうと,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{2+3}(2) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -(-3+1) - 2(-2+3) = 0. \end{aligned}$$

(b) 第 1 行についての余因子展開を行なうと,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & -4 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & -4 \end{vmatrix} + 0$$

$$+(-5) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 2\underbrace{\{(3) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 0 + (-4) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\}}_{\text{第 3 列についての余因子展開}}$$

$$+(-4)\underbrace{\{(3) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\}}_{\text{第 3 列についての余因子展開}}$$

$$+(-5)\{\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{第 1 行についての余因子展開}}\}$$

$= 2\{3(-17) - 4(-4)\} + -4\{3(-13) - 4(4)\}$

$+(-5)\{-17 + 2(-13) - (-3)\}$

$= 2(-35) - 4(-55) - 5(-40) = 350.$

(c)

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = \quad & sgn(4,2,5,1,3)1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = -sgn(1,2,5,4,3) = sgn(1,2,3,4,5) = +1 \end{aligned}$$

2.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & b^2-a^2 & (c+a)^2-(b+c)^2 \\ 0 & c^2-a^2 & (a+b)^2-(b+c)^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & (b+a)(b-a) & (a-b)(a+b+2c) \\ 0 & (c-a)(c+a) & (a-c)(a+2b+c) \end{vmatrix}$

$\overset{\text{定理??}}{=} (a-b)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & -(a+b) & (a+b+2c) \\ 0 & c+a & -(a+2b+c) \end{vmatrix}$

$\overset{R_2+R_3}{=} (a-b)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & -(a+b) & (a+b+2c) \\ 0 & c-b & c-b \end{vmatrix}$

$= (a-b)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & -(a+b) & (a+b+2c) \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\overset{R_2\leftrightarrow R_3}{=} -(a-b)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -(a+b) & (a+b+2c) \end{vmatrix}$

$\overset{(a+b)R_2+R_3}{=} (a-b)(c-a)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(a+b+c) \end{vmatrix}$

$= 2(a-b)(c-a)(b-c)(a+b+c).$

(b)

列を用いた因数分解を行なう.

$$\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ a & c+a & c \\ a & b & a+b \end{vmatrix} \overset{-L_2+L_1}{=} \begin{vmatrix} c & b & c \\ -c & c+a & c \\ a-b & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$\overset{-L_3+L_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ -2c & c+a & c \\ -2b & b & a+b \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ c & c+a & c \\ b & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$\overset{-L_1+L_3}{=} -2 \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ c & c+a & 0 \\ b & b & a \end{vmatrix} = -2\{-b(ca)+c(cb-bc)\} = 4abc.$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 1 \\ 2 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2+R_1 \\ R_3+R_1}}{=} \begin{vmatrix} 5-x & 5-x & 5-x \\ 2 & 2-x & 1 \\ 2 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{2.14}{=} (5-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2-x & 1 \\ 2 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ -2R_1+R_3}}{=} (5-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & -1 \\ 0 & -1 & -x \end{vmatrix}$$

$$= (5-x)(x^2-1) = 0$$

よって, $x = -1, 1, 5$.

4. ベクトル $(x-a_1, y-a_2)$ と (b_1-a_1, b_2-a_2) は平行. したがって, その外積は 0.

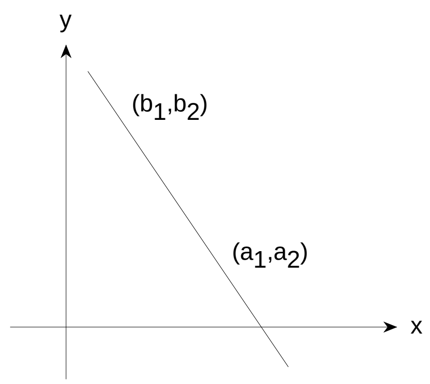

図 A.1: 2 点を通る直線

つまり

$$(x-a_1, y-a_2) \times (b_1-a_1, b_2-a_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x-a_1 & y-a_2 & 0 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

また

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x-a_1 & y-a_2 & 0 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

より

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. 法線ベクトル $\mathbf{N} = (b_1-a_1, b_2-a_2.b_3-a_3) \times (c_1-a_1, c_2-a_2.c_3-a_3)$ と平面上のベクトル $(x-a_1, y-a_2, z-a_3)$ は直交するのでその内積は 0. よってスカラー 3 重積

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 & 0 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6. $|A| \neq 0$ とすると逆行列 A^{-1} が存在し, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ より

$$A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{0} \Rightarrow (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = 0.$$

よって $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

7.

(a)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{4} = -2.$$

(b)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1.$$

第 3 章

演習問題 3.2.1

1. $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in R^3$ のとき,

$$\begin{aligned} &T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}), \\ &T(\alpha \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

が成り立つか調べる.

$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in R^3$ とすると, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ と表せる．ここで

$$\begin{aligned} T_1[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}] &= T_1 \begin{pmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ x_3 + x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + x_3' \\ x_1 + x_1' + x_2 + x_2' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3' \\ x_1' + x_2' \end{pmatrix} \\ &= T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + T_1 \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また

$$
\begin{aligned}
T_1(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) &= T_1 \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_3 \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \alpha T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

したがって, T_1 は線形写像.

次に T_2 について調べる．$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$$
T_2(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) = T_2 \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 1 \\ 2\alpha + 3\alpha \end{pmatrix}.
$$

また

$$
\begin{aligned}
T_2(\alpha \mathbf{v}) + T_2(\beta \mathbf{w}) &= T_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} + T_2 \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha + 1 \\ 2\alpha + 3\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta + 1 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 2 \\ 2\alpha + 3\alpha \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

よって $T_2(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) \neq T_2(\alpha \mathbf{v}) + T_2(\beta \mathbf{w})$ となるので T_2 は線形写像ではない.

2. $\mathbf{v} \in V$ とすると, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ は V の基底より

$$
\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n
$$

と一意的に表せる．ここで $\mathbf{v}$ の T による像 $T(\mathbf{v})$ は R^n の元になるので

$$
T(\mathbf{v}) = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{e}_n
$$

とおくことができる．しかし, $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{e}_i$ より

$$
T(\mathbf{v}_i) = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_i.
$$

よって $i = 1, 2, \ldots, n$ において $\alpha_i = 0$ ならば $\beta_i = 0$. また $\alpha_i = 1$ ならば $\beta_i = 1$ となるので $\alpha_i = \beta_i$ となる．よって

$$
T(\mathbf{v}) = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n.
$$

次に T が線形写像であることを示す.

$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ とすると,

$$
\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n,
$$

$$\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{w}_n.$$

これより,

$$\begin{aligned}
T(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) &= T(\alpha\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha\alpha_n\mathbf{v}_n + \beta\beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta\beta_n\mathbf{v}_n) \\
&= T((\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)\mathbf{v}_n) \\
&= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)\mathbf{e}_n \\
&= (\alpha\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha\alpha_n\mathbf{e}_n) + (\beta\beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta\beta_n\mathbf{e}_n) \\
&= \alpha(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n) + \beta(\beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n) \\
&= \alpha T(\mathbf{v}) + \beta T(\mathbf{w}).
\end{aligned}$$

よって, T は線形写像となる.

3. $(a) \Rightarrow (b)$

T が同型写像なら定理**??**より同型写像 $S = T^{-1}$ が存在し, $T \circ S = 1$.

$(b) \Rightarrow (a)$

$T(S(x)) = T(S(y))$ とおくと $T \circ S = 1$ より $S(x) = S(y)$ となるので $x = y$．また $x = y$ より $S(x) = S(y)$．よって T は単射．次に T が 全射であることを示す．$T \circ S = 1$ より $y \in R^n$ に対して $z \in R^n$ が存在し $y = T(S(z))$．また S は R^n から R^n への写像よりある $x \in R^n$ に対して $x = S(z)$．よって $y = T(x)$.

4. $\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$ より $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \ker(T)$ とすると, $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}, T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$ となる．よって任意の実数 α, β に対して, $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 \in \ker(T)$ が成り立つことを示せばよい．つまり, $T(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$ を示せばよい．さて,

$$T(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \alpha T(\mathbf{v}_1) + \beta T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$$

となるので, $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 \in \ker(T)$ となり, $\ker(T)$ は部分空間である.

次に $Im(T) = \{\mathbf{w} \in W : \mathbf{w} = T(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in V\}$ より $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in Im(T)$ とすると, $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$ となる．よって任意の実数 α, β に対して, $\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 \in Im(T)$ となることを示せばよい．つまり $T(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2$ となるような $\mathbf{v} \in V$ が存在することを示せばよい．さて, V はベクトル空間なので, $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 \in V$．また

$$T(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \alpha T(\mathbf{v}_1) + \beta T(\mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2$$

となるので $\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 \in Im(T)$ となり, $Im(T)$ は部分空間である.

5. $m(T)$ を T の行列表現とすると,

$$m(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

また定理**??**より, $\dim R^3 = \dim\ker(T) + \dim Im(T)$ が成り立ち, $\dim Im(T) = \mathrm{rank}(T)$ より, $\dim\ker(T) = 3 - \mathrm{rank}(A) = 0$.

6.

標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ がどこに移るかを調べればよい．そこで，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ を用いて表すと，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

より，$\lambda = -4, \mu = 3$．同様に，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

より，$\lambda = 3, \mu = -2$ となる．これより，

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -4T \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3T \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

また，

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3T \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2T \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

したがって，T の行列表現は，$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$．

演習問題 3.4.1

1.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2, \\ \mathbf{w}_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

よって変換行列 P は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. $\mathbf{w}_j = p_{1j}\mathbf{v}_1 + \cdots + p_{nj}\mathbf{v}_n$ とおくと $P = (p_{ij})$ は $\{\mathbf{v}_i\}$ から $\{\mathbf{w}_j\}$ への変換行列．また $\mathbf{v}_j = q_{1j}\mathbf{w}_1 + \cdots + q_{nj}\mathbf{w}_n$ とおくと $Q = (q_{ij})$ は $\{\mathbf{w}_i\}$ から $\{\mathbf{v}_j\}$ への変換行列で

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11}q_{11} + \cdots + p_{1n}q_{n1} & \cdots & p_{11}q_{1n} + \cdots + p_{1n}q_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1}q_{11} + \cdots + p_{nn}q_{n1} & \cdots & p_{n1}q_{1n} + \cdots + p_{nn}q_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.

(a)

$$\Phi_A(t) = |A - tI| = \begin{vmatrix} 3-t & -1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 4 = 0.$$

よって A の固有値は $\lambda = 2$ である．

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので, 連立方程式を解くと

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (\alpha \neq 0).$$

これより固有空間は

$$V(2) = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

(b)

$$\Phi_A(t) = |A - tI| = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & -1 \\ 0 & 2 & 4-t \end{vmatrix} = (2-t)(t^2 - 5t + 6) = 0.$$

よって A の固有値は $\lambda = 2, 3$ である．

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので, 連立方程式を解くと

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\alpha \neq 0).$$

次に $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは $(A-3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので, 連立方程式を解くと

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ (\beta \neq 0).$$

これより固有空間は

$$V(2) = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}, V(3) = \{\beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

(c)

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= |A - tI| = \begin{vmatrix} 1-t & 4 & -4 \\ -1 & -3-t & 2 \\ 0 & 2 & -1-t \end{vmatrix} \\ &= (1-t)(t^2+4t-1) + (-4t+4) = (1-t)(t^2+4t+3) \\ &= (1-t)(t+1)(t+3). \end{aligned}$$

よって A の固有値は $\lambda = -3, -1, 1$ である．

$\lambda = -3$ に対する固有ベクトルは $(A+3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので, 連立方程式を解くと

$$A + 3I = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (\alpha \neq 0).$$

$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは $(A+I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので, 連立方程式を解くと

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\beta \neq 0).$$

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので, 連立方程式を解くと

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\gamma \neq 0).$$

これより固有空間は

$$V(-3) = \{\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, V(-1) = \{\beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, V(1) = \{\gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

4. λ を A の固有値とすると

$$\lambda\mathbf{x} = A\mathbf{x} = A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A(\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}.$$

よって $\lambda = \lambda^2$ が成り立ち, これより $\lambda = 0, 1$ となる．

5. A の固有値を λ_i とすると, $A\mathbf{x} = \lambda_i\mathbf{x}$ より,

$$A^m\mathbf{x} = A^{m-1}(A\mathbf{x}) = A^{m-1}(\lambda_i\mathbf{x}) = \cdots = \lambda_i^m\mathbf{x}.$$

6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\Phi_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 3 - t & 1 \\ -1 & 1 - t \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 4 = 0.$$

よってケイリー・ハミルトンの定理より

$$\Phi_A(A) = A^2 - 4A + 4I = 0.$$

ここで $A^4 = (A^2 - 4A + 4I)(A^2 + 4A + 12I) + 32A - 48I$ と表せるので,

$$\begin{aligned} A^4 &= 32A - 48I = 32\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 48\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 96 & 32 \\ -32 & 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 32 \\ -32 & -16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また, $A^2-4A+4I=0$ より $A-4I+4A^{-1}=0$. よって

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{4}(4I-A)=\frac{1}{4}(\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}) \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. まず, $X^2-3X+2I=0$ より $(X-I)(X-2I)=0$. よって $X=I$ または $X=2I$ はこの 2 次方程式を満たす. 次に $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると, ケイリー・ハミルトンの定理より $\Phi_X(X)=0$ となるので, 固有方程式が $\Phi_x(t)=t^2-3t+2=0$ となる X を求める.

$$\Phi_X(t)=\det(X-tI)=\begin{vmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{vmatrix}=t^2-(a+d)t+ad-bc.$$

よって求める X は $a+d=3, ad-bc=2$ を満たせばよい.

演習問題 4.2.1

1.

(a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ より

$$\Phi_A(t)=\begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 0 & -1-t \end{vmatrix}=t^2-1.$$

よって固有値は $\lambda=\pm 1$.

$\lambda=1$ に対する固有ベクトルは $(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので, 連立方程式を解くと

$$A-I=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって

$$\mathbf{x}=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ (\alpha\neq 0).$$

また $\lambda=-1$ に対する固有ベクトルは $(A+I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので, 連立方程式を解くと

$$A+I=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって

$$\mathbf{x}=\beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\ (\beta\neq 0).$$

これより固有空間は

$$V(1)=\{\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, V(-1)=\{\beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

よって固有値の数と同じ数の 1 次独立な固有ベクトルが存在するので定理**??**より対角化可能であり $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)(t^2-4t+3).$$

よって固有値 $\lambda = 1, 3$.

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので, 連立方程式を解くと

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

また $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは $(A-3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので, 連立方程式を解くと

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\gamma \neq 0).$$

これより固有空間は

$$V(1) = \{\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, V(3) = \{\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

よって固有値の数と同じ数の 1 次独立な固有ベクトルが存在するので定理**??**より対角化可能であり $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ より,

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 6 \\ -1 & 3-t & 6 \\ 1 & -1 & -1-t \end{vmatrix} \\ &= (1-t)(t^2-2t+3) - (t-5) + 6(t-2) \\ &= -t^3 + 3t^2 - 5t + 3 + 5t - 7 = -(t^3 - 3t^2 + 4) \\ &= -(t-2)(t+1)(t-2). \end{aligned}$$

よって固有値 $\lambda = -1, 2$.

$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは $(A+I)\mathbf{x} = 0$ を満たす 0 でない $\mathbf{x}$ なので, 連立方程式を解くと

$$\begin{aligned} A+I &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

また $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $(A-2I)\mathbf{x} = 0$ を満たす 0 でない $\mathbf{x}$ なので, 連立方程式を解くと

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\gamma \neq 0).$$

これより固有空間は

$$V(-1) = \{\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}, V(2) = \{\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

よって

$$\dim V(-1) + \dim V(2) = 2 < 3$$

となり, 定理**??**より対角化不可能である．そこで

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を用いて正規直交基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ を作ると,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって $U = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ とおくと, U はユニタリ行列で

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. まず, $U + W$ が直和ならば, $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ を示す．$\mathbf{a} \in U \cap W$ とおくと, $\mathbf{a} \in U, \mathbf{a} \in W$．よって $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a}$ と表せる．しかし $U + W$ が直和なので, その表し方は一意的である．よって $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ でなければならない．よって $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$．また逆に $\mathbf{a} \in U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ と仮定し, $\mathbf{a} \in U + W$ が

$$\mathbf{a} = u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \quad (u_1, u_2 \in U,\ w_1, w_2 \in W)$$

のように表されたとする．このとき

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{\mathbf{0}\}$$

より $u_1 = u_2 = w_1 = w_2$ となり, 上のような表し方は一通りなので $U + W$ は直和である．

3. 定理**??**より $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$. また $U+W$ が直和ならば, $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ となり, $\dim(U \cap W) = 0$. よって $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

4. まず, $U+W$ は直和であることを示す. 演習問題 4.1 より $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ を示せばよい. $(x_1, x_2, x_3) \in U \cap W$ とおくと,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 = x_2 = x_3.$$

よって $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ となり, $U \cap W = \{(0,0,0)\}$.

次に, $R^3 = U \oplus W$ を示す. まず, $U \subset R^3,\ W \subset R^3$ より, $U \oplus W \subset R^3$. また $\dim U = 2, \dim W = 1$ より,

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W = 2 + 1 = 3$$

よって $R^3 = U \oplus W$.

5. λ を直交行列 A の固有値とすると, $A = A^{-1}$ より,

$$\lambda \mathbf{x} = A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}.$$

よって $\lambda^2 = 1$.

6. $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ より

$$U^* = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{u}_1} \\ \overline{\mathbf{u}_2} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{u}_n} \end{pmatrix}$$

よって

$$U^*U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \overline{\mathbf{u}_1} & \mathbf{u}_1 \cdot \overline{\mathbf{u}_2} & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \overline{\mathbf{u}_n} \\ & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{u}_n \cdot \overline{\mathbf{u}_1} & \mathbf{u}_n \cdot \overline{\mathbf{u}_2} & \cdots & \mathbf{u}_n \cdot \overline{\mathbf{u}_n} \end{pmatrix} = I.$$

また $UU^* = (U^*U)^*$ より, $UU^* = I$.

演習問題 4.4.1

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$ とおくと, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$ より, $AA^* = A^*A$. よって A はユニタリ行列により対角化可能である.

$$\Phi_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 1-i \\ 1+i & 2-t \end{vmatrix} = t^2 - 3t + 2 - 2 = t(t-3)$$

より固有値 $\lambda = 0, 3$ である.

$\lambda = 0$ に対する固有空間は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2-i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって

$$V(0)=\{\alpha\begin{pmatrix}1-i\\-1\end{pmatrix}\}.$$

また $\lambda=3$ に対する固有空間は

$$\begin{pmatrix}-2 & 1-i\\1+i & -1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & \frac{1-i}{-2}\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

よって

$$V(3)=\{\beta\begin{pmatrix}1-i\\2\end{pmatrix}\}.$$

次に $V(0),V(3)$ のそれぞれの正規直交基底として

$$\{\begin{pmatrix}\frac{1-i}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1-i}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\}$$

をとると, これよりユニタリ行列

$$U=\begin{pmatrix}\frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

を得,

$$U^{-1}AU=U^*AU=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}.$$

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & -1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ より A は実対称行列. よって定理**??**より直交行列で対角化可能である.

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) &= \det(A-tI)=\begin{vmatrix}1-t & 0 & -1\\0 & -1-t & 0\\-1 & 0 & 1-t\end{vmatrix}\\&= -(1+t)(t^2-2t+1-1)=(1+t)(t)(t-2)\end{aligned}$$

より固有値は $\lambda=-1,0,2$ である.

$\lambda=-1$ に対する固有空間は

$$\begin{aligned}A+I &= \begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}\\&\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって

$$V(-1) = \{\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

$\lambda = 0$ に対する固有空間は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって

$$V(0) = \{\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

$\lambda = 2$ に対する固有空間は

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって

$$V(2) = \{\beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

次に $V(-1), V(0), V(2)$ のそれぞれの正規直交基底として

$$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\}$$

をとると,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

は直交行列となり,

$$P^{-1}AP = P^tAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$ がユニタリ行列により対角行列に変換されるための必要十分条件は, 定理**??**より A が正規行列. つまり $AA^* = A^*A$ である.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{a_2} \\ \bar{a_1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{a_2} \\ \bar{a_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} = A^*A$$

より

$$\begin{pmatrix} a_1\bar{a_1} & 0 \\ 0 & a_2\bar{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\bar{a_2} & 0 \\ 0 & a_1\bar{a_1} \end{pmatrix}$$

を得る．よって $|a_1| = |a_2|$.

4. $x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2$ を行列を用いて表すと

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

ここで, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ は実対称行列．よって定理??より直交行列で対角化可能.

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & -3-t \end{vmatrix} = (-3-t)(t^2 - 3t + 1)$$

より固有値 $\lambda = -3, \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$．よって

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \mathbf{y}^t(P^t AP)\mathbf{y} = -3y_1^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}y_2^2 + \frac{3+\sqrt{5}}{2}y_2^2.$$

5.

$x_1\bar{x_1} + (1-i)x_1\bar{x_2} + (1+i)x_2\bar{x_1} + 2x_2\bar{x_2}$ を行列を用いて表すと

$$(\bar{x_1}, \bar{x_2})\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ここで A はエルミート行列なので, 定理??よりユニタリ行列による直交化が可能である.

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1-i \\ 1+i & 2-t \end{vmatrix} = t(t-3)$$

より固有値 $\lambda = 0, 3$．よって

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \mathbf{y}^t(U^* AU)\mathbf{y} = 3\bar{y_2}y_2.$$

第 5 章

演習問題 5.2.1

1. (a)

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 18 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (a)

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$