線形代数学入門

横田 壽

目 次

まえがき

世の中で起きている、またはこれから起きるかもしれない現象を、何とか定式化してその現象の本質を探ろうとするが科学である．ここ２，３百年の間に、多くの現象が定式化され、その式を解くことによって、いろいろなことが分かってきた．

また、ここ数十年コンピュータのハード並びにソフトの発達により、ほとんどの定式化された物理現象は、行列の固有値問題として扱うことができるようになった．このことから、大学で学ぶべきことは現象の定式化をいかに行うかということと、その式をいかに解くかということになる．

まず、定式化を行うには、物体の時間による変化や位置による変化と、基本となる法則が必要となる．基本となる法則とは、例えば、ニュートンの第２法則、別名、運動方程式などである．次に、その現象を再現するような実験が必要だったり、規模が大きくて再現ができないようなものは、コンピュータでのシミュレーションを行ったりしなければならない．そして、実験やシミュレーションで得たデータをもとに、定式化に磨きをかける．

さて、こうやってできた式は、多くの変数を含んでいる．これらの変数を１つのベクトルとして扱うことにより、生まれたのが線形代数学である．つまり、線形代数学を学ぶことは、これから学ぶいろいろな専門科目の基礎を作ることになる．

最後に本書が線形代数学への入門書としての役割を果たし，各専門分野での勉学の架け橋となることを願います.

2002 年 3 月　　著者

第1章　ベクトル空間

1.1　幾何ベクトルとベクトル空間

平面や空間での有向線分によって表されるベクトルにはすでに出会ったことがあるでしょう．ここでは，一般のベクトルと区別するため，有向線分で表されるベクトルを **幾何ベクトル (geometric vector)** とよびます．幾何ベクトルは，方向と大きさをもつ線分を表します．方向と大きさはまだ定義していないので，この初等的な幾何ベクトルの定義は完全ではありません．ただ，皆さんが日常使っているユークリッド幾何での方向と大きさと考えれば十分です．

これから先，幾何ベクトルはいつも有向線分で表されます．幾何ベクトルは，皆さんが今まで扱ってきた数と違い，同じ方向と大きさをもちさえすれば等しいということができます．つまり，どの有向線分もそれに平行で大きさが同じ有向線分で置き換えても等しく，このことから，有向線分は方向と大きさを変えないで自由に動かすことができます．

初めに，ふたつの初等的な演算，**加法 (vector addition)** および**スカラー乗法 (scalar multiplication)** を幾何ベクトルに対して定義します．ベクトルの和を作る操作を加法といい，ベクトルを定数倍することをスカラー乗法といいます．このふたつの演算とそこから派生する性質が，後にもっと完全なベクトルの定義へと導いてくれます．そして，この定義は後の多くの応用のための基礎概念となってくれます．

♠ 幾何ベクトルの和 ♠

ふたつの **幾何ベクトルの和 (vector sum)** は，一方の幾何ベクトルの尻尾 (始点) をもう一方の幾何ベクトルの頭 (終点) につけることにより定義されます．よって，ふたつの幾何ベクトルの和は最初の幾何ベクトルの尻尾から次の幾何ベクトルの頭を結んだ有向線分で表せます．ほかの見方をすると，ふたつの幾何ベクトル $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ の和 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ によって作られる平行四辺形の対角線として表せます．

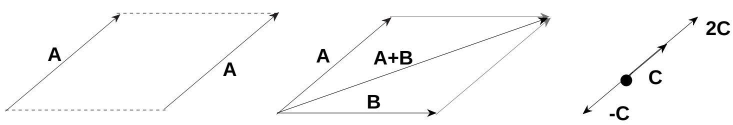

図 1.1: ベクトルの和とスカラー倍

幾何ベクトルの和は次のような性質をもっています．各自確かめておいて下さい．

1． ふたつの幾何ベクトルの和はまた幾何ベクトルである．(このことを和は閉じているといいます)

2． 任意の幾何ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ において，$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$ が成り立つ．(交換法則)

3． 任意の幾何ベクトル $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ において，$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ が成り立つ．(結合法則)

4． 任意の幾何ベクトル $\mathbf{A}$ に対して，$\mathbf{A}+\mathbf{0} = \mathbf{A}$ となる幾何ベクトル $\mathbf{0}$ が存在する．(零元の存在)

5． 任意の幾何ベクトル $\mathbf{A}$ に対して，$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{0}$ となる幾何ベクトル $\mathbf{B}$ が存在する．(逆元の存在)

♠ 幾何ベクトルのスカラー倍 ♠

幾何ベクトルの **スカラー倍 (scalar multiple)** $\alpha\ \mathbf{A}$ は幾何ベクトル $\mathbf{A}$ を実数 α の大きさ $|\alpha|$ 倍することで定義されます．ただし，α が負のときは方向が反対になります．幾何ベクトルのスカラー倍は次のような性質をもっています．各自確かめておいて下さい．

6． 幾何ベクトルのスカラー倍はまた幾何ベクトルである．

7． 任意の実数 α と β に対して，$\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$ が成り立つ．(結合法則)

8． 任意の実数 α と β に対して，$(\alpha+\beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$ が成り立ち，任意の幾何ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ に対して，$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$ が成り立つ．(分配法則)

9． $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$; $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$; $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ が成り立つ．

♠ 幾何ベクトル空間 ♠

平面や空間の幾何ベクトルにおいて上の 1 から 9 までの性質が成り立ちます．このとき，平面や空間の幾何ベクトルの集まりを **幾何ベクトル空間 (geometric vector space)** といいます．幾何ベクトル空間はしばしばユークリッド空間ともよばれ，これから学ぶもっと抽象的なベクトル空間の一例です．一般に，和およびスカラー倍が上の性質 1 から 9 を満たす物の集まりを **ベクトル空間 (vector space)** とよび，その集合の要素を **ベクトル (vector)** といいます．よって，これから登場してくるベクトルには，幾何ベクトルとは似ても似つかない物が沢山あります．

♠ 空間のベクトル ♠

平面上の幾何ベクトル $\mathbf{x}$ に対して、直交座標を用意し、始点が原点になるように平行移動したとき、終点の座標 (x_1, x_2) をこの幾何ベクトルとみなしてやります．つまり、$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ とします．すると、２つの幾何ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, y_1), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ の和の x 座標は、x_1 に y_1 を加えた値になり、また、y 座標は x_2 に y_2 を加えた値になることが分かります．そこで、

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

と定義することができます．

例題 1.1 $\mathbf{X} = (-1, 2), \mathbf{Y} = (0, -3)$ について，$\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ を求めよ．

解　$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=(-1,2)+(0,-3)=(-1,-1)$ ■

この考え方を一般化するため、3次元の空間の幾何ベクトルに直交座標を用意し、始点が原点 $(0,0,0)$ になるように平行移動したときの終点の座標を (a_1,a_2,a_3) とします.

空間のベクトル (space vector) は3個の実数の組 (a_1,a_2,a_3) で表され，a_1 を x-成分，a_2 を y-成分，a_3 を z-成分といいます．これらのベクトルの集まりを $\{(a_1,a_2,a_3):a_i$ 実数 $\}$ で表し，加法およびスカラー乗法を適宜決めることにより，ベクトル空間にすることができます．このベクトル空間を **3次元ベクトル空間 (three dimensional vector space)** といい R^3 で表します．R^3 では，ベクトルの和は対応する成分どうしの和によって定義します．つまり

$$(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3).$$

スカラー倍は実数のそれぞれの成分への積により定義します．つまり

$$\alpha(a_1,a_2,a_3)=(\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha a_3).$$

この定義より空間のベクトルの集合で，ベクトル空間となるための9個の性質が成り立つことを示すのは，それほど難しいことではないでしょう.

この空間の零元を **零ベクトル (zero vector)** といい (0,0,0) で表します．3個の実数の組 (a_1,a_2,a_3) 自身は方向も大きさももっていませんが，$(a_1,a_2,\ a_3)$ を直交座標上の点 (a_1,a_2,a_3) と考え，原点からこの点にのびる有向線分を表すものとします．この考え方により幾何ベクトルと空間のベクトルを同じものとして扱うことができます．よって，ベクトルの大きさ $\|(a_1,a_2,a_3)\|$ は，原点と点 (a_1,a_2,a_3) を結ぶ線分の距離となり，$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}$ で表せます.

例題 1.2　$\mathbf{A}=(-1,2,3),\mathbf{B}=(0,-3,2)$ について，次の値を求めよう.
(a) $2\mathbf{A}$　(b) $3\mathbf{B}-2\mathbf{A}$　(c) $\|\mathbf{A}\|$　(d) $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|$

解 (a)　$2\mathbf{A}=2(-1,2,3)=(-2,4,6)$.
(b)　$3\mathbf{B}-2\mathbf{A}=3(0,-3,2)-2(-1,2,3)=(2,-13,0)$.
(c)　$\|\mathbf{A}\|=((-1)^2+2^2+3^2)^{1/2}=\sqrt{14}$.
(d)　$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|=\|(-1,2,3)+(0,-3,2)\|=\|(-1,-1,5)\|=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$. ■

(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) という3つのベクトルはそれぞれ $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ で表されます．この記号を使うと，ベクトル $\mathbf{A}=(a_1,a_2,a_3)$ は $a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ と表せます (どうやって?)．またベクトル $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ のように大きさが1のベクトルを **単位ベクトル (unit vector)** といいます.

4個の実数の組，5個の実数の組，または n 個の実数の組 (n-tuples) についても，3個の組のときと同じ様に扱うことができます．ただ，紙面の都合上，たとえば，5個の実数の組は (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)

と表す代わりに，$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$ と表すこともあります．その和およびスカラー倍は次のように定義します．

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \\ a_4 + b_4 \\ a_5 + b_5 \end{pmatrix},$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \\ \alpha a_4 \\ \alpha a_5 \end{pmatrix}.$$

同様にして， n 個の実数の組についても和およびスカラー倍が定義できます．そしてこの和とスカラー倍はベクトル空間の性質 1 から 9 を満たします．

定理 1.1 $R^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in R\}$ はベクトル空間をなす。

1.1.1　演習問題

1. ベクトル $\mathbf{A} = (2, -1, 3)$ とベクトル $\mathbf{B} = (-1, 1, 4)$ について，次の値を求めよ．
(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (b) $3\mathbf{B}$ (c) $\|\mathbf{A}\|$ (d) $3\mathbf{B} - 2\mathbf{A}$
2. ベクトル $\mathbf{A} = (-2, -1, 3)$ とベクトル $\mathbf{B} = (3, 0, 1)$ について，次のベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を用いて表せ．
(a) $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ (b) $3\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (c) $3\mathbf{B} - 2\mathbf{A}$ (d) $\dfrac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2}$
3. 1.1 で定義した幾何ベクトルの和は性質 1 から 5 を満たすことを示せ．
4. 1.1 で定義したスカラー倍は性質 6 から 9 を満たすことを示せ．
5. 1.1 で定義した空間のベクトルの和およびスカラー倍は性質 1 から 9 を満たすことを示せ．
6. ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の始点が同じとき，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の作る角を二等分するベクトル $\mathbf{C}$ を求めよ．
7. $x(1,1,1) + y(1,1,0) + z(1,0,0) = (2, -3, 4)$ を解き， x, y, z を求めよ．

1.2　内積空間

♠ 区分的に連続な関数 ♠
　ここでは幾何ベクトル空間には似ても似つかないベクトル空間を紹介します．まず区間 (a,b) で連続な関数の集まりを $C(a,b)$ で表し，区間 (a,b) で**区分的に連続な関数 (piecewise continuous function)** の集まりを $PC(a,b)$ で表します。 関数 $f(t)$ が区間 I で区分的に連続とは、

1. $f(t)$ は区間 I で有限個の点を除いて連続である．

2. $f(t)$ の不連続点 t_0 では，左側および右側極限値が存在する．

を満たすことをいいます。

ここで、$C(a,b)$ と $PC(a,b)$ の $f(x)$ と $g(x)$ に対して，和およびスカラー倍を次のように定義します.

1. $f+g$ は点 x で $f(x)+g(x)$ の値をとる関数.
2. αf は点 x で $\alpha f(x)$ の値をとる関数.

例題 1.3 $f(x)=x, g(x)=x^2$ のとき，$f+g, \frac{1}{2}f, 2g$ を求めよう．

解 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+x^2$,
$(\frac{1}{2}f)(x)=\frac{1}{2}f(x)=\frac{x}{2}$,
$(2g)(x)=2g(x)=2x^2$. ■

この和とスカラー倍によって，ベクトル空間になるための 9 個の性質が
$C(a,b)$ と $PC(a,b)$ において成り立ちます.

定理 1.2 $C(a,b)$ と $PC(a,b)$ はベクトル空間をなす。

これより，ベクトル空間に含まれる $f(x)$ や $g(x)$ をベクトルとよぶことができます．幾何ベクトルと姿や形が違いますが立派なベクトルです．ベクトル空間の中には大きさや方向を考える必要のないものもありますが，大きさを与えることのできるベクトル空間を **計量ベクトル空間 (normed vector space)** といいます．ここでは内積が定義できる計量ベクトル空間について考えます.

♠ 内積 ♠

幾何ベクトルにおいて次の 3 つのことは基本です．(1) 和，(2) スカラー倍，(3) 内積 (スカラー積).

和とスカラー倍については、すでに学んだので、ここでは幾何ベクトルの内積について紹介します。

$\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ とそれらのなす角を $\theta(0 \leq \theta \leq \pi)$ とします．このとき，実数 $\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|\cos\theta$ を $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の**内積 (dot product)** または**スカラー積**といい $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ と表します．つまり

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|\cos\theta$$

$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ のうち少なくとも一方が $\mathbf{0}$ のときは，$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$ と定めます.

これまでに私たちは和およびスカラー倍の一般化を行いました．そこでここでは内積の一般化に挑戦します.

定義 1.1 ふたつのベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ に対して，実数 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ または $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2$ が定まり，次の性質をもつとき，$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ または $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2$ を $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ の **内積 (inner product)** という.
あるベクトル空間のすべてのベクトル $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ とすべての実数 α, β に対して,

1． $(\alpha\mathbf{v}_1+\beta\mathbf{v}_2)\cdot(\mathbf{v}_3)=\alpha(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3)+\beta(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3)$ (線形性)

2. $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_1$ (対称性)

3. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\geq 0, \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=0$ と $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ は同値．(正定値性) が成り立つ.

例題 1.4 幾何ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の間では，スカラー積 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ は次のように与えられます．

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta.$$

ここで $|\mathbf{A}|$ と $|\mathbf{B}|$ は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の長さを表し， θ はベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が作る小さいほうの角度を表します．このスカラー積は内積の性質 1 から 3 を満たしていることを示してみよう．

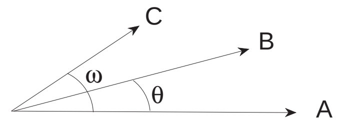

図 1.2: スカラー積

解 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角を θ， $\mathbf{A}$ と $\mathbf{A+B}$ のなす角を γ,$\mathbf{A}$ と $\mathbf{C}$ のなす角を ω とすると，
1.

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|\cos\gamma = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|\cos\theta,$$

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|\sin\gamma = |\mathbf{B}|\sin\theta.$$

よって

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} &= |\mathbf{A}+\mathbf{B}||\mathbf{C}|\cos(\omega-\gamma)\\ &= |\mathbf{A}+\mathbf{B}||\mathbf{C}|(\cos\omega\cos\gamma+\sin\omega\sin\gamma)\\ &= |\mathbf{A}||\mathbf{C}|\cos\omega + |\mathbf{B}||\mathbf{C}|\cos(\theta-\omega)\\ &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}.\end{aligned}$$

また $\alpha \neq 0$ のとき，

$$\alpha(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \alpha|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta = (\alpha\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}.$$

これより，1 の線形性が示せた．
2.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta = |\mathbf{B}||\mathbf{A}|\cos\theta = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}.$$

3. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$，よって， $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = 0$ と $\mathbf{A} = 0$ は同値． ■

例題 1.5 *3* 次元ベクトル空間 R^3 に内積を定義してみよう．

解 $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$ を R^3 の任意の元とすると，

$$(a_1, a_2, a_3)\cdot(b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

で定義された積は内積であることが示せる．つまり
$\mathbf{v}_1 = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{v}_2 = (b_1, b_2, b_3), \mathbf{v}_3 = (c_1, c_2, c_3) \in R^3, \alpha, \beta \in R$ とすると
1.

$$\begin{aligned}(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{v}_3 &= (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \alpha a_3 + \beta b_3)\cdot(c_1, c_2, c_3)\\ &= (\alpha a_1 + \beta b_1)c_1 + (\alpha a_2 + \beta b_2)c_2 + (\alpha a_3 + \beta b_3)c_3\\ &= \alpha(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + \beta(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)\\ &= \alpha(a_1, a_2, a_3)\cdot(c_1.c_2, c_3) + \beta(b_1, b_2, b_3)\cdot(c_1, c_2, c_3)\\ &= \alpha\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3 + \beta\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 &= (a_1, a_2, a_3)\cdot(b_1, b_2, b_3)\\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\\ &= b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3\\ &= (b_1, b_2, b_3)\cdot(a_1, a_2, a_3)\\ &= \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_1.\end{aligned}$$

3.

$$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 = 0 &\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0\\ &\Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0. \blacksquare\end{aligned}$$

定義 1.2 $f(x), g(x)$ を $PC[a,b]$ の元とすると，内積 (f,g) は次の式で与えられる．

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

(注) これは内積の性質 1, 2, 3 を満たしています．

例題 1.6 $f(x) = x, g(x) = x^2$ が $PC[0,2]$ に属しているとき，内積 (f,g) を計算しよう．

解

$$(f,g) = \int_0^2 (x)(x^2)dx = \frac{x^4}{4}\mid_0^2 = 4. \blacksquare$$

ベクトル空間上に内積が定義されると，ノーム (ベクトルの大きさ) が定義されます．

定義 1.3 ベクトル $\mathbf{v}$ の l_2 **ノーム (norm)** は $\|\mathbf{v}\|_2$ で表され，次の式で与えられる．

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}.$$

よって、内積の性質より、l_2 ノームは次の性質を持っている．
すべてのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$ とすべての実数 α に対して，

1. $\|\mathbf{x}\|_2 \geq 0,\ \|\mathbf{x}\|_2 = 0$ と $\mathbf{x} = 0$ は同値

2. $\|\alpha\mathbf{x}\|_2 = |\alpha|\|\mathbf{x}\|_2$

3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2$

例えば、幾何ベクトル空間では，$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = |\mathbf{A}|$ となるので $\mathbf{A}$ の長さと同じです．3 次元ベクトル空間では

$$\|(a_1, a_2, a_3)\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

となるので，原点から点 (a_1, a_2, a_3) までの最短距離と考えられます． **関数空間 (function space)** $PC[a,b]$ では，

$$\|f\|_2 = \{\int_a^b [f(x)]^2 dx\}^{1/2}.$$

となります．

この l_2 ノームの他にも、$\mathcal{R}^n$ でよく用いられるものに、l_∞ ノームがあります．

定義 1.4 ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の l_∞ **ノーム (norm)** は $\|\mathbf{x}\|_\infty$ で表され，次の式で与えられる．

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

例題 1.7 ベクトル $\mathbf{x} = (-1, 1, -2)$ の l_2 ノームと l_∞ ノームを求めよう．

解

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_2 &= \sqrt{(-1,1,-2)\cdot(-1,1,-2)} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \\
\|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq 3} |x_i| = \max\{1,1,2\} = 2
\end{aligned}$$

l_∞ ノームも l_2 ノームと同様に次の性質を持っています。
すべてのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$ とすべての実数 α に対して，

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0,\ \|\mathbf{x}\| = 0$ と $\mathbf{x} = 0$ は同値

2. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$

3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

♠ 直交 ♠

2 つの幾何ベクトルが直交すると、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$ で $\cos\theta = 0$ となるので、内積は零。また、$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が零ベクトルでなく、内積が零ならば、$\cos\theta = 0$ となり、$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は直交していることが分かります。

このように、ベクトル空間に内積が定義されると，ノームだけでなく垂直という概念の一般化として直交を定義できます．

定義 1.5 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ のとき，ベクトル $\mathbf{v}_1$ とベクトル $\mathbf{v}_2$ は **直交 (orthogonal)** しているという．また異なるベクトルがみな直交しているベクトルの集合を **直交系 (orthogonal system)** という．

幾何ベクトル空間では，有向線分 $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ の内積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ は例題 1.4 より $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta$ で与えられるので，もし $\mathbf{0}$ でない有向線分 $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ に対して，内積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ ならば $\theta = 90°$．つまり，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は垂直となります.

3 次元ベクトル空間でベクトル $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$ の内積は例題 1.5 より，$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$，また 3 次元ベクトルを幾何ベクトルと考えると，

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = \|(a_1, a_2, a_3)\|\|(b_1, b_2, b_3)\| \cos\theta.$$

このことから

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\|(a_1, a_2, a_3)\|\|(b_1, b_2, b_3)\|}$$

となり，ふたつのベクトルのなす角の余弦は内積より求めることができます.

例題 1.8 $\mathbf{A} = (1, 1, 2)$ と $\mathbf{B} = (-1, 2, 1)$ のなす角を求めよう.

解

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\|(a_1, a_2, a_3)\|\|(b_1, b_2, b_3)\|} = \frac{-1 + 2 + 2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

これを満たす θ を $[0, \frac{\pi}{2}]$ で捜すと $\theta = \frac{\pi}{3}$ となる． ■

♠ 平面の方程式 ♠

図 1.3: 平面の方程式

空間の中に直交座標系を取り，平面を考えます．平面とはある点を通り，その法ベクトルが一定な面と考えることができます．ここで，**法ベクトル (normal vector)** とは，面に接するベクトルに直交するベクトルのことです．内積を使うと簡単にこの平面の方程式が求まります．まず点 (a_1, a_2, a_3) を求める平面上の点とします．そして $\mathbf{N} = (A, B, C)$ をその平面の法ベクトルとします．$\mathbf{r}_0$ を原点

と点 (a_1, a_2, a_3) を結ぶ位置ベクトル，$\mathbf{r}$ を原点と点 (a_1, a_2, a_3) 以外の平面上の点を結ぶ位置ベクトルとします．すると $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ は平面上のベクトルとなるので， $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ と $\mathbf{N}$ の間の角は $90°$．よって $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N} = 0$ となり，これが求める平面の方程式です．

例題 1.9 点 $(3, -1, 4)$ を通り，法ベクトル $(-1, 1, 2)$ をもつ平面の方程式を求めよう．

解 位置ベクトル $\mathbf{r}$ を (x, y, z) とすると，平面の方程式は

$$(x-3, y+1, z-4) \cdot (-1, 1, 2) = 0.$$

よって

$$-(x-3) + (y+1) + 2(z-4) = 0$$

または

$$-x + y + 2z = 4. \ \blacksquare$$

例題 1.10 $\sin x$ と $\cos x$ は $[-\pi, \pi]$ で直交するが $[0, \frac{\pi}{4}]$ では直交しないことを示そう．

解 $[-\pi, \pi]$ で

$$(\sin x, \cos x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} \ |_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin^2 \pi - \sin^2(-\pi)}{2} = 0.$$

$[0, \frac{\pi}{4}]$ で

$$(\sin x, \cos x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} \ |_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{4}. \ \blacksquare$$

関数空間での直交は直角に交わるということではありませんので注意して下さい．

$\mathbf{0}$ でない幾何ベクトル $\mathbf{A}$ をその大きさで割り，単位ベクトル $\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ を求めることがよくあります．もっと一般的な場合にもベクトル $\mathbf{v}$ をそのノームで割り，単位ベクトル $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ を求めることがあります．このようにして大きさが 1 のベクトルを求めることを，**正規化 (normalize)** するといいます．また，直交系のすべてのベクトルを正規化してできた集合を **正規直交系 (orthonormal system)** といいます．正規直交系の例として 3 次元ベクトル空間での $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ があげられます．なぜこれが大事なのか次の節ではっきりするでしょう．

例題 1.11 関数列 $\{\cos mx\}_{m=0}^{\infty}$ は $[0, \pi]$ で直交系をなすことを示し，対応する正規直交系を求めよう．

解 $m \neq n$ のとき，

$$\begin{aligned}(\cos mx, \cos nx) &= \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx \\ &= \frac{1}{2}[\frac{\sin(m+n)x}{(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{(m-n)}] \ |_0^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

$m=0$ のとき，$\cos mx = \cos 0 = 1$ より

$$\|1\| = [\int_0^{\pi} (1)^2 \ dx]^{1/2} = \sqrt{\pi}.$$

$m \neq 0$ のとき，

$$\|\cos mx\| = [\int_0^{\pi} \cos^2 mx \ dx]^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

よって求める正規直交系は

$$\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cos x, \cdots, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cos mx, \cdots\}. \ \blacksquare$$

♠ フーリエ級数 ♠

　この正規直交系を用いると，区分的に連続な関数 $f(x) \in [0, L]$ は，次の式で表現することができます.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

ただし，

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^{\infty} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

このとき，最初の式の右辺を $f(x)$ の**フーリエ級数 (Fourier series)** といい，a_n を**フーリエ係数 (Fourier coefficient)** といいます.

例題 1.12 ノームはベクトル空間上の任意のベクトル $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ に対して，三角不等式

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|$$

を満たすことをしめそう.

解

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 &= (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\cdot(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ & \quad \|\mathbf{v}_1\|^2 + 2\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 \end{aligned}$$

ここで，Cauchy-Schwarz の不等式 (演習問題 1.2.1 参照) を用いると

$$2\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 \leq 2\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\|$$

よって，

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\| \ \blacksquare$$

これよりベクトル間の **距離 (distance)** は次の式を満たします.

$$\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3\| + \|\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2\|.$$

これにより，l_2 ノームは私たちが普段使っている距離とほぼ同じ働きをすることが分かります.

例題 1.13 $PC[0,2]$ において，x と x^2 の距離を求めよう．

解

$$\|x-x^2\| = [\int_0^2 (x-x^2)^2\ dx]^{1/2} = \frac{4}{\sqrt{15}}.\ \blacksquare$$

1.2.1　演習問題

1. $\mathbf{A}=(-1,3,1), \mathbf{B}=(2,4,-3)$ について，次の値を求めよ．
(a) $\|\mathbf{B}\|$ (b) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ (c) $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角 (d) $\mathbf{A}$ 方向の単位ベクトル

2. 次の集合のうち直交系はどれか．また直交系は対応する正規直交系を求めよ．
(a) $\{(1,3),(6,-2)\}$
(b) $\{(1,2,2),(-2,2,-1),(2,1,-2)\}$
(c) $\{\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}, 2\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}-\frac{1}{3}\mathbf{k}, 3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}\}$

3. 点 $(5,-1,3)$ を通り，法ベクトルが $2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ - $\mathbf{k}$ である平面の方程式を求めよ．

4. $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ を空間のベクトルとするとき，次の不等式を証明せよ．

$$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|.$$

この結果は Cauchy-Schwarz の不等式とよばれる．

5. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ を空間のベクトルとするとき，次の不等式を証明せよ．

$$\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}-\mathbf{C}\| + \|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|.$$

6. $f(x), g(x)$ を $PC[a,b]$ の関数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$|(f,g)| \leq \|f\|\|g\|.$$

この結果は Schwarz の不等式とよばれる．

7. $PC[0,2]$ において，次の関数のノームを求めよ．
(a) $f(x)=x$ (b) $f(x)=\sin\pi x$ (c) $f(x)=\cos\pi x$.

8. 次にあげる 3 個の多項式は Legendre の多項式とよばれるものです．

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}$$

これらは $PC[-1,1]$ で直交系をなすことを示せ．

1.3　1 次独立と 1 次従属

♠ 外積 ♠

ふたつのベクトルの外積を考えるために幾何ベクトルに戻ります．外積の定義は内積ほど簡単ではありませんが応用数学には欠かせないものです．ここでは外積の応用を 3 次元空間に限ります．他の空間には外積のやさしい一般化がないのです．

図 1.4: 外積

定義 1.6 ふたつの幾何ベクトル $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ において，大きさは $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ によって作られる平行四辺形の面積 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$ と等しく，方向は，$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ の両方に垂直で，$\mathbf{A}$ を 180° 以内回転して $\mathbf{B}$ の方向に重ねるとき右ねじの進む方向として定まるベクトルを，$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ の **外積 (cross product)** といい $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ で表す．$\mathbf{A}=\mathbf{0},\mathbf{B}=\mathbf{0},\theta=0$ のとき，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ に垂直な方向が定まらないが，$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$ と定義する．

3 次元空間では (a_1,a_2,a_3) と (b_1,b_2,b_3) の外積は次の式で定義される．

$$(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3)=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1).$$

右辺は後で学ぶ行列式を用いると次のように表せます．

$$(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

例題 1.14 $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ を内積を用いて表そう．

解

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2 &= |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2\sin^2\theta\\ &= |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2(1-\cos^2\theta)\\ &= |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2-|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2\cos^2\theta\\ &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2.\end{aligned}$$

よって，$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=\sqrt{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2}$．■

力学で点 O のまわりの力 $\mathbf{F}$ の **モーメント (moment)**m は，O から力 $\mathbf{F}$ の作用線までの距離を d とするとき，$m=|\mathbf{F}|d$ で与えられます．$\mathbf{r}$ を力の作用線上の任意の点 P と O を結ぶベクトルだとすると，$d=|\mathbf{r}|\sin\theta$．よって

図 1.5: 点 O のまわりの力 $\mathbf{F}$ のモーメント

$$m = |\mathbf{F}||\mathbf{r}|\sin\theta = |\mathbf{F} \times \mathbf{r}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}|$$

このとき，$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ を点 O のまわりの力 $\mathbf{F}$ の **モーメントベクトル (moment vector)** といいます.

ある軸のまわりの剛体の回転は，次のようにして，**角速度ベクトル (angular velocity)** $\boldsymbol{\Omega}$ により一意的に表せます．ここで角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ とは剛体を右ねじが回転する方向に回すとき，ねじの進む方向が $\boldsymbol{\Omega}$ であり，$\boldsymbol{\Omega}$ の大きさが回転の角速度となるベクトルのことです．剛体内の点 P の速度ベクトル $\mathbf{v}$ は，回転軸上の任意の点と P を結ぶベクトルを $\mathbf{r}$ とすると，次の式で表せます.

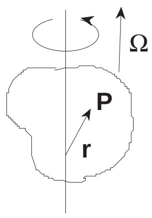

図 1.6: 角速度ベクトル

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

3 つのベクトル $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ に対して，$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ は実数となるので**スカラー三重積 (scalar triple product)** といい，$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ はベクトルになるので，**ベクトル三重積 (vector triple product)** といいます.

ベクトル三重積 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ は $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ が作る平面上のベクトルです．よって，$\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ が平行でなければ，$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ は次の式で表されます.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}.$$

♠1 次結合 ♠

ベクトル空間では和とスカラー倍は基本です．和はふたつのベクトル間の演算ですが，ベクトル空間では結合法則が成り立つので，3 つ，4 つとベクトルを加えることができます．このようにして作ったものをベクトルの 1 次結合といいます．

定義 1.7 ベクトル空間 V のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$ と実数 $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ に対して，

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

の形のベクトルを **1 次結合 (linear combination)** という．

ここで注意しておきたいことは，ベクトル空間 V のどんなベクトルによる 1 次結合も，また V のベクトルになるということです．

次に，連続関数 $\{1, \cos^2 x, \sin^2 x\}$ の 1 次結合をいくつか考えてみましょう．

$$\begin{array}{llll} (a) & 1 + \cos^2 x + \sin^2 x & (b) & 1 - 2\cos^2 x + 3\sin^2 x \\ (c) & -1 + \cos^2 x + \sin^2 x & (d) & 4\sin^2 x \end{array}$$

1 次結合はすべての c_i が 0 のとき，$\mathbf{0}$ ベクトルになりますがその他のときも，$\mathbf{0}$ ベクトルになることがあるでしょうか．上の例 (c) を見て下さい．$-1 + \cos^2 x + \sin^2 x$ は 0 です．このように，0 でない c_i を使って作った 1 次結合が 0 と等しくなるとき，ベクトルの組 $\{1, \cos^2 x, \sin^2 x\}$ は 1 次従属であるといいます．またそういう c_i が存在しないとき，ベクトルの組は 1 次独立であるといいます．

定義 1.8

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

から $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$ がいえれば，$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$ は **1 次独立 (linearly independent)** であるといい，それ以外のとき，$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$ は **1 次従属 (linearly dependent)** であるという．

例題 1.15 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ は *1* 次独立であることを証明しよう．

解 $c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) = (0,0,0)$ より $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となるので，$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ は 1 次独立である．■

例題 1.16 $\{3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \mathbf{i} + 5\mathbf{k}, 6\mathbf{i} + \mathbf{j}\}$ は *1* 次独立であることを証明しよう．

解 $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \mathbf{i} + 5\mathbf{k}, 6\mathbf{i} + \mathbf{j}$ の 1 次結合は $c_1(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + c_2(\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) + c_3(6\mathbf{i} + \mathbf{j})$．これを書き直して $\mathbf{0}$ とおくと，

$$(3c_1 + c_2 + 6c_3)\mathbf{i} + (2c_1 + c_3)\mathbf{j} + 5c_2\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ は 1 次独立なので，$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ の係数はすべて 0．つまり

$$\left(\begin{array}{llll} 3c_1 & +c_2 & +6c_3 & = 0 \\ 2c_1 & & +c_3 & = 0 \\ & 5c_2 & & = 0. \end{array}\right.$$

この連立方程式を解くと $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ である．したがってこのベクトルは 1 次独立である．■

例題 1.17 $\{\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}, \mathbf{i}+2\mathbf{k}, \mathbf{i}-2\mathbf{j}\}$ は *1* 次従属か *1* 次独立か調べよう.

解 $\{\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}, \mathbf{i}+2\mathbf{k}, \mathbf{i}-2\mathbf{j}\}$ の 1 次結合を $\mathbf{0}$ とおくと,

$$c_1(\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k})+c_2(\mathbf{i}+2\mathbf{k})+c_3(\mathbf{i}-2\mathbf{j})=\mathbf{0}.$$

これより連立方程式

$$c_1+c_2+c_3=0,\ c_1-2c_3=0,\ 3c_1+2c_2=0$$

が得られる．この方程式は $c_1=2, c_2=-3, c_3=1$ のように 0 以外の解をもっている．よって, $\{\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}, \mathbf{i}+2\mathbf{k}, \mathbf{i}-2\mathbf{j}\}$ は 1 次従属である． ■

上の例題をもう少し注意深くみると, $\mathbf{i}-2\mathbf{j}=-2(\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k})+3(\mathbf{i}+2\mathbf{k})$ と表せることがかわります．一般に次のことがいえます.

定理 1.3 ベクトル $\mathbf{w}$ がベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ の *1* 次結合で表されるならば, $\mathbf{w}$ と $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ は互いに *1* 次従属である.
逆に, 数個のベクトルが互いに *1* 次従属ならば, そのうちの 1 個は残りのベクトルの *1* 次結合で表される.

証明

$$\mathbf{w}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$$

と表されたとすると,

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_n\mathbf{v}_n-1\mathbf{w}=\mathbf{0}$$

であるから, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}$ は互いに 1 次従属である.

逆に, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ が 1 次従属ならば, 関係式

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$$

が成り立ち係数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ のうちには 0 でないものが少なくとも一つはある．そのうちの一つを $c_n \neq 0$ とすれば $\mathbf{v}_n$ は

$$\mathbf{v}_n=-\frac{1}{c_n}(c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1})$$

となり, $\mathbf{v}_n$ は $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ の 1 次結合で表される． ■

幾何ベクトルが 1 次独立かでないかを調べるとき, スカラー三重積を使うと簡単に調べられます. つまり

定理 1.4 幾何ベクトル $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ が *1* 次独立になるための必要十分条件は, スカラー三重積 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\neq 0$ である.

証明 演習問題 1.3 よりスカラー三重積は平行六面体の体積と考えられる．したがって, $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=0$ は $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ が同一平面上にあることと同値である．また, 定理 1.1 よりこれは $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ が 1 次従属であるのと同値である． ■

例題 1.18 $\mathbf{A}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{B}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{C}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ は *1* 次独立であることを証明しよう.

解 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{i}-7\mathbf{j}+5\mathbf{k})=-20$．よって 1 次独立である．■

1.3.1 演習問題

1. $\mathbf{A}=(1,2,-3),\mathbf{B}=(2,-1,1),\mathbf{C}=(4,2,2)$ について，
(a) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ (b) $\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ (c) $\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ を求めよ．
2. 点 (1,0,1) を通り， $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ と $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ によって作られる平面に平行な平面を求めよ．
3. 2 点 $(2,0,-1)$, $(3,2,1)$ を通り平面 $x-2y+3z-4=0$ に垂直な平面の方程式を求めよ．
4. $\mathbf{A}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k},\mathbf{B}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ を 2 辺とする三角形の面積を求めよ．
5. $\mathbf{F}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ のとき，点 $(2,-1,1)$ のまわりの力 $\mathbf{F}$ のモーメントベクトルを求めよ．
6. 剛体が直線 $x=y=z$ のまわりを角速度ベクトル $\mathbf{\Omega}=(1,-2,3)$ で回転しているとき，剛体内の点 $P(1,2,2)$ の速度を求めよ．
7. 3 つのベクトル $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ の作る平行六面体の体積は，スカラー三重積

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

の絶対値に等しいことを示せ．
8. $\mathbf{A}=2\mathbf{e}_1+5\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3,\mathbf{B}=\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2-4\mathbf{e}_3$ で $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\mathbf{i}-\mathbf{j},\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3=\mathbf{j}+\mathbf{k},\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\mathbf{i}+\mathbf{k}$ のとき， $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ を求めよ．
9. $\{4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k},10\mathbf{i}-3\mathbf{j},2\mathbf{i}-6\mathbf{j}+3\mathbf{k}\}$ は 1 次独立か 1 次従属か調べよ．
10. 次の関数はどの区間 (a,b) でも 1 次独立であることを示せ．
(a) $\{1,x,x^2\}$ (b) $\{\sin x,\cos x\}$
11. 幾何ベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ が 1 次独立であるための必要十分条件は $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\neq\mathbf{0}$ であることを示せ．

1.4 部分空間と次元

ベクトルの和とスカラー倍がベクトル空間の部分集合に用いられると，新しいベクトル空間を作り出すことがあります．こうしてできたベクトル空間を部分空間といいます．つまり

定義 1.9 ベクトル空間 V と空でない部分集合 W が次の性質をもつとき， W は V の **部分空間 (subspace)** であるという．
(a) $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ が W に含まれるならば，和 $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2$ も Wに含まれる．
(b) $\mathbf{w}$ が Wに含まれるならば，スカラー倍 $\alpha\mathbf{w}$ も Wに含まれる．

部分空間はそれ自身ベクトル空間です．つまりベクトル空間になるための 1 から 9 までの性質を満たしています．では，なぜ性質 1 と 6 しか調べなくてもベクトル空間になれるのかといいますと，他の性質は親から受け継ぐので親がベクトル空間なら満たしているのです．部分空間を手っ取り早く作る方法に次のものがあります．

ベクトル $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\dots,\mathbf{v}_n$ の 1 次結合全体の集合を $\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\dots,\mathbf{v}_n\rangle$ で表し， $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\dots,\mathbf{v}_n$ で**張られた部分空間 (linear span)** といいます．名前の通りこれは部分空間です．

例題 1.19 $\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\dots,\mathbf{v}_n\rangle$ はベクトル空間 Vの部分空間であることを証明しよう．

解 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ を $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ の元とすると，

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n, \\ \mathbf{w} &= d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + d_3\mathbf{v}_3 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n. \end{aligned}$$

これより，

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n + d_n)\mathbf{v}_n,$$

$$\alpha\mathbf{v} = (\alpha c_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha c_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\alpha c_n)\mathbf{v}_n.$$

よって，$\mathbf{v} + \mathbf{w}$,$\alpha\mathbf{v}$ ともに $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ に含まれる． ■

例題 1.20 $C[a,b]$ は $PC[a,b]$ の部分空間であることを示そう．

解 $f(x), g(x) \in C[a,b]$ ならば，$f(x) + g(x) \in C[a,b]$, $\alpha f(x) \in C[a,b]$ である．なぜなら連続な関数の和はまた連続．連続な関数の定数倍もまた連続． ■

例題 1.21 U, W をベクトル空間 V の部分空間とするとき，その共通部分 $U \cap W$ と和集合 $U + W$ は，ともに V の部分空間になることを示そう．ただし

$$U \cap W = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \in U \text{ かつ } \mathbf{v} \in W\},$$

$$U + W = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} : \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}.$$

解 $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in U \cap W$ とすると，$\mathbf{u}, \mathbf{w} \in U$ かつ $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in W$．これより

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} \in U \cap W.$$

また $\alpha\mathbf{u} \in U$ かつ $\alpha\mathbf{u} \in W$ より

$$\alpha\mathbf{u} \in U \cap W.$$

したがって，$U \cap W$ は V の部分空間である．

また $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in U + W$ とすると，$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1, \mathbf{w} = \mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2$．これより

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \in U + W,$$

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) = \alpha\mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{w}_1 \in U + W.$$

よって，$U + W$ は V の部分空間である． ■

$U + W$ において，とくに $U + W$ の任意の元 $\mathbf{w}$ が，$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ $(\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W)$ の形に一意的に表されるとき，$U + W$ は U と W の **直和 (direct sum)** といい，$U \bigoplus W$ で表します．

♠ 基底 ♠

定義 1.10 ベクトルの組 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ が次の性質をもつとき，ベクトル空間 V の **基底 (basis)** であるという．

(a) $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ が互いに *1* 次独立である．

(b) V のベクトル $\mathbf{v}$ が $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ の *1* 次結合で表せる．つまり $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$．このことを，ベクトル $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ は空間を張っているという．

明らかに 1 次独立なベクトルの組がみな基底になれるわけではありません．たとえば，3 次元ベクトル空間でのベクトルの組 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ を考えてみましょう．$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ は 1 次独立ですがどんな実数 c_1, c_2 を用いても $\mathbf{k} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}$ は不可能です．

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ の中で互いに 1 次独立であるものの最大個数を r とします．また，それらを $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ とすると，残りのベクトル $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ はそれぞれ

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$$

と 1 次従属です．よって，定理 1.3 より $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ の 1 次結合で表せます．したがって次のことがいえます．

♠ 次元 ♠

定理 1.5 $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ において，$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ の中から互いに 1 次独立なベクトル $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ をえらんで

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$$

とすることができる．このとき $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ はこの部分空間の基底のひとつであり，この部分空間の **次元 (dimension)** は r であるといい，$\dim V = r$ と表す．

例題 1.22 S を平面 $x + y + z = 0$ 上のベクトルの集まりとする．つまり，

$$S = \{(x, y, -x - y) : x, y \in R\}.$$

このとき，S の基底と次元を求めよう．

解 まず $S = \{(x, y, -x - y) : x, y \in R\}$ は R^3 の部分空間であることを示す．$\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ を S の元とすると，$\mathbf{s}_1 = (x_1, y_1, -x_1 - y_1), \mathbf{s}_2 = (x_2, y_2, -x_2 - y_2)$ と表せるので，

$$\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, -(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)),$$

$$\alpha\mathbf{s}_1 = \alpha(x_1, y_1, (-x_1 - y_1)) = (\alpha x_1, \alpha y_1, -\alpha x_1 - \alpha y_1).$$

よって，S は R^3 の部分空間となる．次に，$\mathbf{s}$ を S の任意のベクトルとすると，$\mathbf{s} = (x, y, -x - y)$. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を用いて $\mathbf{s}$ を表すと，

$$\mathbf{s} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - (x + y)\mathbf{k} = x(\mathbf{i} - \mathbf{k}) + y(\mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

したがって，S に含まれるすべてのベクトルは，$\mathbf{i} - \mathbf{k}$ と $\mathbf{j} - \mathbf{k}$ の 1 次結合で表せる．また $\mathbf{i} - \mathbf{k}$ と $\mathbf{j} - \mathbf{k}$ は互いに 1 次独立なので，$\mathbf{i} - \mathbf{k}$ と $\mathbf{j} - \mathbf{k}$ は S の基底になる．よって $\dim S = 2$. ■

次の節にうつる前に，和空間と共通部分の次元について述べた次元公式とよばれる定理を学びましょう．証明は演習問題 1.4 を参照して下さい．

定理 1.6 U, W をベクトル空間 V の部分空間とするとき，次の公式が成り立つ．

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

♠Gram-Schmidt の直交化法 ♠

1.2 節で直交系から正規直交系を作り出すことを学びました．ここでは 1 次独立なベクトルから正規直交系を作り出すことを学びます．まず m 個のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ に対して

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{array} \right. = \delta_{ij}$$

が成り立つとき， m 個のベクトルは正規直交系をなすといいます．ここで δ_{ij} は **クロネッカーのデルタ (Kronecker delta)** とよばれるものです．正規直交系の例を 1.2 節でいくつか見ましたがよく観察するとそれらはすべて 1 次独立です．これから次のような定理が生まれました．

定理 1.7 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ が正規直交系をなすとき，これらは *1* 次独立である．

証明 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ とし， $\mathbf{v}_1$ との内積を作ると

$$\begin{aligned} 0 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{0}) &= (\mathbf{v}_1, c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m) \\ &= (\mathbf{v}_1, c_1 v_1) + (\mathbf{v}_1, c_2\mathbf{v}_2) + \cdots + (\mathbf{v}_1, c_m\mathbf{v}_m) \\ &= c_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) \\ &= c_1. \end{aligned}$$

他の c_i も同様にして 0 になるので $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ は 1 次独立である． ■

この定理の逆，つまり，1 次独立なベクトルから正規直交系を作ることができるのか考えてみます．まず，$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ が 1 次独立だとします．当然すべてのベクトル $\mathbf{x}_i \neq 0$ (なぜ?)．そこで $\dfrac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \mathbf{v}_1$ とすると， $\mathbf{v}_1$ は単位ベクトルになります．次に $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{x}_2$ の 1 次結合の中から $\mathbf{v}_1$ と直交するものを選び出します．幾何ベクトルでいえば， $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{x}_2$ の決定する平面の中に $\mathbf{v}_1$ と直交するベクトルを見つけることになります．そこで $\mathbf{w}_2 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ を $\mathbf{v}_1$ と直交するベクトルとすると，

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1) &= (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1) \\ &= c_1 + c_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって $c_1 = -c_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1)$．したがって，

$$\mathbf{w}_2 = c_2(\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1)$$

となります．$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は 1 次独立なので $\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$．そこで

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1\|}$$

とおくと $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2, \|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = 1$ となります．

次に $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ に直交する単位ベクトル $\mathbf{v}_3$ を求めます．まず $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ と $\mathbf{x}_3$ の 1 次結合 $\mathbf{w}_3 = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + d_3\mathbf{x}_3$ を考えます．

$$(\mathbf{w}_3, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{w}_3, \mathbf{v}_2) = 0$$

から

$$d_1 + d_3(\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1) = 0,\ d_2 + d_3(\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2) = 0.$$

ゆえに

$$\mathbf{w}_3 = d_3(\mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2).$$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ はもともと 1 次独立なので

$$\mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}.$$

そこで

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} = \frac{\mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2\|}$$

とおけば $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ に直交する単位ベクトルが得られます．以下同様にして,

$$\mathbf{v}_j = \frac{\mathbf{w}_j}{\|\mathbf{w}_j\|} = \frac{\mathbf{x}_j - \sum_{i=1}^{j-1}(\mathbf{x}_j, \mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{x}_j - \sum_{i=1}^{j-1}(\mathbf{x}_j, \mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i\|},\ 2 \leq j \leq m$$

とすれば $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ は正規直交系をなします．これを **グラム・シュミットの直交化法 (Gram-Schmidt orthogonalization)** といいます.

例題 1.23

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から正規直交系を作ろう.

解

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

次に,

$$\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\|\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1\| = \sqrt{1 + (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

より

$$\mathbf{v}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

最後に

$$\mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

$$\|\mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2\| = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

より

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{-\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

このようにして作った $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は正規直交系をなします．■

1.4.1　演習問題

1. $W = \{(x, y, 1) : x, y$ 実数 $\}$ は R^3 の部分空間か調べよ．

2. $W = \{(x, y, -3x + 2y) : x, y$ 実数 $\}$ は R^3 の部分空間であることを証明せよ．

3. $W = \{(x, y, -3x + 2y) : x, y$ 実数 $\}$ の基底を求めよ．また W は何次元か．

4. 次のベクトルの組は 3 次元ベクトル空間 R^3 の基底をなすことを示せ．

$$\{\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i} + \mathbf{k}\}$$

5. 次の関数で生成される部分空間の次元を求めよ．

$$\{3, x - 2, x + 3, x^2 + 1\}$$

6. $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{x}_2 = (0, 1, 1), \mathbf{x}_3 = (0, 0, 1)$ から正規直交系を作れ．

7. U, W をベクトル空間 V の部分空間とするとき，次元公式が成り立つことを示せ．

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

8. 4 個以上の 3 次元空間のベクトルの組は 1 次従属であることを示せ．

第2章　行列と行列式

2.1　行列

♠(m,n) 行列 ♠

あるものの集まりをベクトル空間としてとらえることができる例として，第 1 章で幾何ベクトルの集まり，空間のベクトルの集まり，連続関数の集まり，区分的に連続な関数の集まりを取り上げました．その他にもたくさんベクトル空間となるものがあります．

第 2 章では，その中から行列とよばれている実数の配列を考えます．数を横に並べたのを行といい，縦に並べたのを列といいます．たとえば，3 行 4 列の行列は次のような形で与えられます．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

ここで a_{ij} は行列の成分とよばれ， i は行の番号， j は列の番号を表しています．とくに， a_{ii} を対角成分とよびます．m 行 n 列の行列を $m \times n$ 型の行列といいます．また，成分 a_{ij} で構成される行列を A や (a_{ij}) で表すこともあります．

行列は自然科学や社会科学の諸分野においてよく用いられています．それらの中には単なる記述法として用いられている場合もありますが，もっと幅広い利用の仕方を考えるために，ベクトル空間としてとらえる必要がでてきました．そこでまず 1 章で学んだように和とスカラー倍を行列に定義します．

定義 2.1 ふたつの同じ型の行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ は，対応する成分がすべて等しいとき，すなわち，すべての i, j において， $a_{ij} = b_{ij}$ が成り立つとき，等しいといい， $A = B$ で表す．

♠ 行列の和 ♠

行列の和はそれぞれ対応する成分どうしの和によって定義します．つまり

定義 2.2 同じ型の行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ の和は $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ で定義する．

例題 2.1 行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & -7 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ について， $A + B$ を求めよう．

解 $A+B=\begin{pmatrix} 7+4 & 3+2 & 4-1 \\ -1+3 & 2-1 & 0+7 \\ 2+2 & -4+0 & 4+8 \\ 3+6 & 0+3 & -7-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & -4 & 12 \\ 9 & 3 & -11 \end{pmatrix}$. ■

$m\times n$ 型の行列はベクトル空間の性質 1 から 5 を満たしています．各自確かめて下さい．

♠ 行列のスカラー倍 ♠

行列のスカラー倍もそれぞれの成分のスカラー倍によって定義されます．つまり

定義 2.3 行列 $A=(a_{ij})$ の実数 α によるスカラー倍 $A\alpha=\alpha A$ は

$$\alpha A=(\alpha a_{ij})$$

で定義する．

例題 2.2 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ について， $3A$ を求めよう．

解 $3A=\begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 5 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 4 & 3\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 15 & 9 \\ -3 & 12 & 6 \end{pmatrix}$. ■

スカラー倍はベクトル空間の性質 6 から 9 を満たしています．各自確かめてください．このことから $m\times n$ 型の行列の集合をベクトル空間と考えることができます．とくに実数だけを考えているので，このベクトル空間を **実ベクトル空間 (real vector space)** ともいいます．しかし $m\times n$ 型の行列をベクトルとよぶことはありません．例外として， $m\times 1$ 型または $1\times n$ 型の行列をそれぞれ m **項行ベクトル (m-component row vector)**，n **項列ベクトル (n-component column vector)** といいます．

♠ 行列の積 ♠

和とスカラー倍に加えて行列の積も可能です．3 章で勉強しますが，行列の積は行列を写像ととらえたとき写像の合成を表します．

定義 2.4 $A=(a_{ik}), B=(b_{kj})$ をそれぞれ $m\times n$ 型， $n\times r$ 型とする．**行列の積 (matrix multiplication)**AB は $m\times r$ 型の行列 C であり，次のように表せる．

$$C=(c_{ij})=(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}).$$

他のいい方をすると，行列 C の ij 成分は行列 A の i 行と行列 B の j 列の内積をとったものです．このことから行列 A の列の大きさと行列 B の行の大きさが等しくないと，行列の積は定義できません．

例題 2.3 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ と $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ の積を求めよう．

解 A,B の積は 2×2 型の行列でその成分は,

$$\begin{aligned} c_{11} &= (1)(5) + (2)(6) + (-3)(-2) = 23, \\ c_{12} &= (1)(2) + (2)(3) + (-3)(0) = 8, \\ c_{21} &= (2)(5) + (7)(6) + (1)(-2) = 50, \\ c_{22} &= (2)(2) + (7)(3) + (1)(0) = 25. \end{aligned}$$

よって,

$$AB = \begin{pmatrix} 23 & 8 \\ 50 & 25 \end{pmatrix}.$$

ついでに BA を計算すると,

$$BA = \begin{pmatrix} 9 & 24 & -13 \\ 12 & 33 & -15 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

この例題が示すように，行列の積は交換法則が成り立たないことがあります．それどころか， A の列の数と B の行の数が違うと AB は存在すらしません．

例題 2.4 $A \neq 0,\ B \neq 0$ のとき，$AB = 0$ となる行列 A, B を求めよう．

解 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

♠ 行列の分割 ♠

行列を扱う場合，行列をいくつかの縦線と横線で分割して考えると便利なことがあります．例えば，次のような行列の積を考えてみましょう．

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right),\ B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & 8 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ \hline 2 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

このとき，縦線と横線で分けられた各ブロックを**小行列 (sub-matrix)** といいます．ここで,

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 8 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, A22 = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$$

これより行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

と表すことができます.

行列 B を同じ方法で分割すると，行列 A, B の積は

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で表すことができます.

♠ 正方行列 ♠

行の数と列の数が同じ行列を **正方行列 (square matrix)** といい，この行の数を行列の **次数 (order)** といいます．つまり， $n \times n$ 型の行列は正方行列でその次数は n ということです．ここでこれから必要となる 4 種類の正方行列を紹介します．まず，正方行列の対角成分以外の成分がすべて 0 のとき，つまり， $a_{ij} = 0, i \neq j$ のとき， A は **対角行列 (diagonal matrix)** であるといいます．とくに，対角行列のうちすべての i で $a_{ii} = 1$ の行列を **単位行列 (identity matrix)** といい I で表します．たとえば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は 3×3 型の対角行列と 2×2 型の単位行列です．対角行列は和も積も対角行列となり次のような性質をもっています.

定理 2.1 A, B を n 次の対角行列とするとき，次のことが成り立つ.

1. $A + B$ は対角行列である.

2. AB, BA はともに対角行列で， $AB = BA$ である.

証明 1. $A = (a_{ii}), B = (b_{ii})$ より、$A + B = (a_{ii}) + (b_{jj}) = (a_{ii} + b_{ii})$. よって $A + B$ は対角行列である。

2. $AB = C$ とおくと、

$$C = (c_{ij}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}) = \begin{cases} a_{ii}b_{ii} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

したがって、AB, BA はともに対角行列で， $AB = BA$ である。

♠ 行列のトレースと転置行列 ♠

正方行列の対角成分の和を **トレース (trace)** とよび,

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

で表します．また行列 A の行と列の入れ替えによって得られる行列を **転置行列 (transposed matrix)** といい， A^t または ${}^tA$ で表します.

例題 2.5 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき， A^t を求めよう.

解 $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. ■

行列とその転置行列について，次の等式が成り立ちます.

定理 2.2 行列 A, B について，次のことが成り立つ.

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$
2. $(A^t)^t = A$
3. $(AB)^t = B^t A^t$

証明 1. $A = (a_{ij})_{n\times k}, B = (b_{ij})_{n\times k}$ とすると、$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n\times k}$ より、その転置行列は $(a_{ji} + b_{ji})_{k\times n}$ となる。ところで、$A^t = (a_{ji})_{k\times n}, B^t = (b_{ji})_{k\times n}$ より、$(A+B)^t = A^t + B^t$ が成り立つ。

2. $A = (a_{ij})_{n\times k}$ とすると、$A^t = (a_{ji})_{k\times n}$ より、$(A^t)^t = (a_{ij})_{n\times k} = A$.

3. A, B をそれぞれ $n\times k, k\times m$ 型の行列とすると， AB は $n\times m$ 型の行列となる．そして $(AB)^t$ は $m\times n$ 型の行列となる．転置行列の定義より， $(AB)^t$ の (i,j) 成分は AB の (j,i) 成分だから $a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jk}b_{ki}$ と表せる．また， B^t は $m\times k$, A^t は $k\times n$ 型の行列なので, B^tA^t は $m\times n$ 型の行列となる．そして B^tA^t の (i,j) 成分は B^t の i 行と A^t の j 列の内積となるので， $a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jk}b_{ki}$ と表せる．よって， $(AB)^t = B^tA^t$. ■

♠ 対称行列 ♠

正方行列 A とその転置行列 A^t が等しいとき A は **対称行列 (symmetric matrix)** であるといいます．また $A^t = -A$ のとき A は **交代行列 (skew symmetric matrix)** であるといいます.

例題 2.6 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ は対称行列か調べよう.

解 $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A$ より A は対称行列. ■

$n\times n$ 型の行列 A に対して

$$A^2 = AA, A^3 = A^2A, \ldots, A^n = A^{n-1}A$$

とその**ベキ (power)** を定義します.

$A^k = 0$ となる自然数 k が存在するとき，A を**ベキ零行列 (nilpotent)** といいます.

2.1.1 演習問題

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の式を計算せよ．
(a)　$A+B$ (b)　$2A-3B$ (c)　AB, BA

2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，AB, BA を求めよ．

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$A^2-5A+6I$ を計算せよ．

4. A と B が n 次の対称行列のとき，$A+B$ は対称行列であることを示せ．

5. A と B が n 次の対称行列のとき，AB はいつも対称行列か調べ，AB がいつも対称行列になるための必要十分条件を求めよ．

6. A が交代行列ならば，A^2 は対称行列であることを示せ．

7. 行列 $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$ との積が交換可能な行列をすべて求めよ．ただし，a_1, a_2, a_3 は相異なる実数とする．

8. 正方行列 A は，対称行列と交代行列の和として一意的に表せることを証明せよ．

9. $A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$ の積を求めよ．

2.2　行列の基本変形

連立 1 次方程式の解法は数学の計算の中でももっとも面倒なもののひとつです．しかし応用上大切なものなのでこの節では，未知数をひとつずつ消去して解く消去法について，行列を用いて考えてみましょう．

まず，連立 1 次方程式

$$(I)\qquad \left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -3y & +z & =1 \\ x & +2y & -3z & =4 \\ 3x & +2y & -z & =5 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

を解いてみます．(1) と (2) を入れ替えて

$$(II)\qquad \left\{\begin{array}{rrrl} x & +2y & -3z & =4 \\ 2x & -3y & +z & =1 \\ 3x & +2y & -z & =5 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c}(2)\\(1)\\(3)\end{array}$$

このとき上のふたつの連立方程式は同値であることに注意して下さい．

次に，(2) の -2 倍を (1) へ，(2) の -3 倍を (3) へ加えて

$$(III)\qquad \left\{\begin{array}{rrrl} x & +2y & -3z & =4 \\ & -7y & +7z & =-7 \\ & -4y & +8z & =-7 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c}(1')\\(2')\\(3')\end{array}$$

を得ます．今度は $(2')$ の両辺を $-\frac{1}{7}$ 倍して

$$(IV) \quad \begin{cases} x \quad +2y \quad -3z \quad = 4 & (1') \\ \qquad\quad y \quad -z \quad = 1 & (2'') \\ \quad -4y \quad +8z \quad = -7 & (3') \end{cases}$$

を得ます．最後に $(2'')$ の 4 倍を $(3')$ に加えると

$$(V) \quad \begin{cases} x \quad +2y \quad -3z \quad = 4 & (1') \\ \qquad\quad y \quad -z \quad = 1 & (2'') \\ \qquad\qquad\quad 4z \quad = -3 & (3'') \end{cases}$$

を得ます．ここで最後の式から逆に辿っていくと，

$$z = \frac{-3}{4},\ y = 1 + z = 1 + \frac{-3}{4} = \frac{1}{4},\ x = -2y + 3z + 4 = \frac{5}{4}.$$

この解法 (消去法) は，連立 1 次方程式に次の 3 つの操作を施して，簡単な連立 1 次方程式に変形していく方法で**ガウスの消去法 (Gaussian elimination)** とよばれています．

(1) 方程式の順番を並べ換える，

(2) ひとつの方程式にある数をかけて他の方程式に加える，

(3) ひとつの方程式に 0 でない数をかける．

ここで，連立方程式に行った 1 連の操作を行列に当てはめてみます．まず
(I) の連立方程式の係数から作られる行列を **係数行列 (coefficient matrix)**，係数と定数項から作られる行列を **拡大係数行列 (augmented matrix)** といいそれぞれ次のように表します．

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

この拡大係数行列に上の操作をあてはめると

$$(I) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\to} (II) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3}}{\to} \quad (III) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -4 & 8 & -7 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{7}R_2}{\to} (IV) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\overset{4R_2+R_3}{\to} \quad (V) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

となります．

上の行列の変形に用いられているものは,

L_1 :　ふたつの行を入れ替える.

L_2 :　ひとつの行にある数をかけて他の行に加える.

L_3 :　ひとつの行に 0 でない数をかける.

で一般に，行列 A に施す上の 3 つの変形を行列の **行基本変形 (fundamental row operation)** といいます.

例題 2.7 次の連立方程式を $Gauss$ の消去法を用いて解こう。

$$\begin{array}{lcrrrrcr} R_1 & : & x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & -8 \\ R_2 & : & 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -3x_4 & = & -20 \\ R_3 & : & x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & -2 \\ R_4 & : & x_1 & -x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 4 \end{array}$$

解拡大係数行列は

$$\tilde{A} = \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & \vdots & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \vdots & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、$-2R_2 + R_1, -R_1 + R_3, -R_1 + R_4$ と行基本変形を施すと

$$\tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \vdots & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \vdots & 12 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、**基軸要素 (Pivot element)**$a_{22}^{(2)} = 0$ より、$R_2 \leftrightarrow R_3$ を行うと、

$$\tilde{A}^{(2)'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \vdots & 12 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、x_2 はすでに R_3 から消去されているので、$\tilde{A}^{(2)'} = \tilde{A}^{(3)}$ となり、行基本変形を続けると $2R_3 + R_4$ より

$$\tilde{A}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

となり、後ろから代入すると

$$\begin{aligned} x_4 &= 2 \\ x_3 &= \frac{-4-(-1)x_4}{-1} = 2 \\ x_2 &= \frac{6-x_4-(-1)x_3}{2} = 3 \\ x_1 &= \frac{-8-(-1)x_4-2x_3-(-1)x_2}{1} = -7 \end{aligned}$$

となる。

章末に Gauss の消去法のアルゴリズムを載せているので、興味のある人はプログラムを書いてみよう。

行列 A に対し，有限回の行基本変形を施して行列 B を得るとき，行列 B は行列 A と**行対等 (row equivalent)** であるといい $A \sim B$ と表します．n 次の単位行列 I_n に対し， L_1, L_2 または L_3 の基本変形を 1 回だけ施して得られる行列を **基本行列 (fundamental matrix)** といいます．じつは行基本変形は基本行列を使って表すことができます．たとえば， (I) から (II) への行基本変形は $R_1 \leftrightarrow R_2$ で，これに対応する基本行列は単位行列 I_3 に 基本変形 $R_1 \leftrightarrow R_2$ を施せば求まります．つまり,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \stackrel{R_1 \leftrightarrow R_2}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1}$$

となります．そして，この基本行列を行列 (I) に左側からかけると

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}}_{(I)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}}_{(II)}$$

となり基本変形を施したのと同じになることが分ります．この基本行列をもう少し詳しく見ると，単位行列の 2 行目と 3 行目が入れ替わってますね．このことに気付くと，基本行列は比較的簡単に求めることができます．例えば,
$(II) \to (III)$ で行なった基本変形 $-2R_1 + R_2$ に対する基本行列は

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2}$$

となります．また，$(II) \to (III)$ で行なったもう一つの基本変形 $-3R_1 + R_3$ に対する基本行列は

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_3}$$

となります．同じ様にして，(III) から (IV)，(IV) から (V) を求めるのに用いた基本変形 E_4, E_5 も基本行列を使って表せます．つまり

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

となります．そして，これらを順に行列 A に左側からかけていくと

$$E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = B$$

となることが分ります．言い換えると，行列 B は行列 A と行対等であるということです．

基本変形を行列に施していくと，対角成分の下の成分がすべて 0 の行列を得ることができます．このような行列を **上三角行列 (upper triangular matrix)** といいます．また

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のように，階段状の下側の成分がすべて 0 であって，各段の高さが 1 であるような行列を **階段行列 (echelon matrix)** といいます．とくに，各行の 0 でない最初の数が 1 でかつその数以外の列の数がすべて 0 のとき，**被約階段行列 (row reduced echelon matrix)** といい A_R で表します．じつはすべての行列は，被約階段行列と行対等なのです．つまり

定理 2.3 任意の行列は，適当な行基本変形を何回か施して被約階段行列にすることができる．

証明 各自に任せる．

例題 2.8

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

と行対等な被約階段行列を求め，階段の段数を数えよう．

解

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow{-4R_3+R_4}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\substack{\frac{R_2}{2} \\ \frac{-3R_2}{2}+R_4}}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\substack{\frac{-R_4}{4} \\ R_3 \leftrightarrow R_4}}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow{-R_3+R_1}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

これより階段の数は 3. ■

上の例題で順番を変えて行基本変形を施しても，でてくる被約階段行列は同じになります．言い換えると

定理 2.4 行列 B と C が被約階段行列で行列 A と行対等ならば $B = C$ である．

証明 各自に任せる．

ここで大切なことは，行列 A に行対等な被約階段行列はただ一つしかないということです．

♠ 行列の階数 ♠

被約階段行列の階段の数は応用上大切な数です．この数のことを **行列の階数** (rank **of a matrix**) といい $\mathrm{rank}(A)$ と表します．たとえば，例題 2.8 の階数は 3 です．行列の階数と被約階段行列の関係について次の事がいえます．

定理 2.5 A が n 次の正方行列のとき，次の条件は同値である．
(1) $\mathrm{rank}(A) = n$
(2) $A_R = I_n$

証明 $A_R = I_n$ ならば A_R の階段の数は n．よって $\mathrm{rank}(A) = n$.

逆に， $\mathrm{rank}(A) = n$ ならば， A の被約階段行列の階段の段数は n．被約階段行列の定義より各行の 0 でない最初の数は 1．よって対角成分はすべて 1 となり $A_R = I_n$． ■

行列の階数は 1 章で学んだベクトル空間の概念を使って定義することもできます．どうやってやるのか理解するために次の例をみてみましょう．まず行列

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 15 & 8 \end{pmatrix}
$$

の行ベクトル $(1,-1,4,2),(0,1,3,2),(3,-2,15,8)$ は $\mathcal{R}^4$ のベクトルと考えられるので，その 1 次結合全体の集合

$$V = \langle(1,-1,4,2),(0,1,3,2),(3,-2,15,8)\rangle$$

は $\mathcal{R}^4$ の部分空間をなします (例題 1.19 参照)．この空間 V を A の行ベクトルで張られる部分空間または **行空間 (row space)** といいます．ここで $\mathbf{v} \in V$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= c_1(1,-1,4,2) + c_2(0,1,3,2) + c_3(3,-2,15,8) \\
&= c_1(1,-1,4,2) + c_2(0,1,3,2) + 3c_3(1,-1,4,2) + c_3(0,1,3,2) \\
&= (c_1 + c_3)(1,-1,4,2) + (c_2 + c_3)(0,1,3,2).
\end{aligned}$$

よって，この行空間のすべてのベクトルは $(1,-1,4,2),(0,1,3,2)$ の 1 次結合で表せます．また $(1,-1,4,2)$ と $(0,1,3,2)$ は 1 次独立なので，このふたつのベクトルは行空間の基底をなします．よって A の行空間の次元は 2 です．ここで A の被約階段行列を求めると，

$$A_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって， $\mathrm{rank}(A) = 2$ となり，この例では

$$\mathrm{rank}(A) = \text{行空間の次元}$$

となります．じつは同様なことが列ベクトルについても行なえ，列ベクトルで張られる**列空間 (column space)** を作り出します．そして $\mathrm{rank}(A) =$ 列空間の次元となります．ここで用いられた考え方はもっと一般的な場合にも使えて次のような定理を得ます．

定理 2.6 行列の階数はその行列の行空間の次元と等しい．

証明 $m \times n$ 型の行列 $A = (a_{ij})$ の行ベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ とする．行空間は

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$$

の 1 次結合全体の集合なので，行基本変形 L_1, L_3 は 1 次結合になんの影響も与えない．よって行空間の次元にもなんの影響も与えない．

次に， L_2 を使って被約階段行列を求める．このとき $\mathbf{a}_n$ が $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ の 1 次結合ならば，$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ と $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{a}_{n-1} \rangle$ は一致し，被約階段行列に零行ベクトルができるのと行ベクトル $\mathbf{a}_n$ を除くこととが対応している．これを繰り返すとやがて階段 1 段ずつに対応する行ベクトル $\mathbf{a}_i$ を見つけることができ，その行ベクトルは 1 次独立である．よって行ベクトルの次元は被約階段行列の階段の数と等しい． ■

行列の階数は次節にでてくる連立 1 次方程式の解法に大切な役割を果たします．そこで次の節に移る前にもうひとつ問題を解いてみましょう．

例題 2.9 行列 A の階数を求めよう．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{pmatrix} \overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & -9 & -7 \\ 0 & 14 & -18 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\frac{1}{7}\times R_2 \\ -2R_2+R_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-9}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{2R_2+R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{17}{7} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-9}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

これより A_R の階段の数は 2 となるので $\mathrm{rank}(A) = 2$. ついでに A_R の行ベクトル $(1, 0, \dfrac{17}{7}, 1)$ と $(0, 1, \dfrac{-9}{7}, -1)$ は A の行空間の基底をなしている．よって行空間の次元は 2 である． ■

2.2.1 演習問題

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ と行対等な被約階段行列を求めよ.

2. 次の行列の階数を求めよ.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -2 \\ -3 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に次のような行基本変形 $(I), (II), (III), (IV)$ を施した.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{I}{\to} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{II}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{III}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{IV}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(I), (II), (III), (IV)$ の基本行列を求め，単位行列 I_2 を A と基本行列の積で表せ.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ は行についての基本変形だけで単位行列に変形できる．$PA = I$ を満たす行列の積 P を求めよ.

5. 次のベクトルで張られる部分空間の次元を求めよ.

$$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 1, 3), \mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0, 1), \mathbf{v}_3 = (4, -1, 3, 11), \mathbf{v}_4 = (-2, 3, 1, 1)$$

2.3　連立 1 次方程式と逆行列

2.2 章の行列の基本変形で連立 1 次方程式の解法として，ガウスの消去法についてふれましが，ここでは連立 1 次方程式がいつ解をもつか詳しく調べます．まず，未知数の個数 (元の数) と方程式の数が必ずしも同じでない連立 1 次方程式を考えます．

$$\left\{\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right.$$

において，係数行列を $A = (a_{ij})$，拡大係数行列を $[A : \mathbf{b}]$，未知数の n 次元列ベクトルを $\mathbf{x} = (x_j)$，定数項の m 次元列ベクトルを $\mathbf{b} = (b_i)$ とすると，この連立 1 次方程式を

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{または} \quad [A : \mathbf{b}]$$

と表すことができます．この方程式に解が存在するとき解のおのおのの組をベクトル $\mathbf{x}$ と考えて，それを **解ベクトル (solution vector)** といいます．一般に

$$\text{rank}(A) \leq \text{rank}([A : \mathbf{b}]) \leq \text{rank}(A) + 1$$

ですが，次の定理が成り立ちます．

定理 2.7 連立 *1* 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつための必要十分条件は

$$\text{rank}(A) = \text{rank}([A : \mathbf{b}])$$

である．

証明 A を $m \times n$ 型の行列とし $\text{rank}(A) = \text{rank}([A : \mathbf{b}]) = r$ とすると， $[A : \mathbf{b}]$ の列空間の次元は r であり $r \leq n$．したがって $[A : \mathbf{b}]$ の $n+1$ 番目の列ベクトル，つまり $\mathbf{b}$) は，はじめの n 個の列ベクトル

$$\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$$

の 1 次結合である．つまり

$$\mathbf{a}_1 c_1 + \mathbf{a}_2 c_2 + \cdots + \mathbf{a}_n c_n = \mathbf{b}.$$

言い換えると

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

逆に，係数行列 A の各列を列ベクトル $\mathbf{a}_i$ と考えると，方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}$$

と表される．ここで，この方程式に解 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が存在すれば，この式は $\mathbf{b}$ が

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$$

の 1 次結合で表されることを示している．したがって， A の列空間と $[A : \mathbf{b}]$ の列空間は同じになる．よってこのふたつの列空間の次元は同じであるから $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A : \mathbf{b}])$． ■

例題 2.10 次の連立 *1* 次方程式が解をもつように，定数 k の値を定めよう．

$$\begin{cases} x + 2y &= 3 \\ 2x - z &= 2 \\ 4y + z &= k \end{cases}$$

解

$$\begin{aligned} [A : \mathbf{b}] \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & k \end{pmatrix} \overset{-2R_1+R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & k \end{pmatrix} \\ &\overset{\substack{R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_2 + R_3}}{\longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & k-4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

この方程式が解をもつための必要十分条件は $\mathrm{rank}([A : \mathbf{b}]) = \mathrm{rank}A = 2$．よって $k - 4$ は零でなければならないので $k = 4$． ■

♠ 連立方程式の一般解 ♠

次の定理は連立 1 次方程式を解くときに何を探せばよいか教えてくれます．

定理 2.8 連立 *1* 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の 1 組の解を $\mathbf{p}$ とすると， $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ のすべての解は $\mathbf{p} + \mathbf{c}$ で与えられる．ただし， $\mathbf{c}$ は $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解である．

証明 $\mathbf{w}$ を $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解とすると， $\mathbf{w} - \mathbf{p}$ は $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解である．なぜならば，

$$A(\mathbf{w} - \mathbf{p}) = A\mathbf{w} - A\mathbf{p} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

次に $\mathbf{c} = \mathbf{w} - \mathbf{p}$ とおけば， $\mathbf{c}$ は $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解になる．よって $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{c}$． ■

この定理より連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解くには，まず連立同次 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解く必要があることがかわりました．そこで $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ について考えてみましょう．まず $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A : \mathbf{0}])$ となるので，定理 2.7 より解が存在します．実際に $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ は 1 組の解です．これを **自明な解 (trivial solution)** といいます．次に連立同次 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の s 個の自明でない解ベクトルを

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{m1} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \mathbf{v}_s = \begin{pmatrix} v_{1s} \\ v_{2s} \\ \vdots \\ v_{ms} \end{pmatrix}$$

とすると

$$A\mathbf{v}_1 = \mathbf{0},\ A\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \dots, A\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

となります．さらにこれら自明でない解の任意の 1 次結合 $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_s\mathbf{v}_s$ も $A\mathbf{x} = c_1(A\mathbf{v}_1) + c_2(A\mathbf{v}_2) + \cdots + c_s(A\mathbf{v}_s) = 0$ となるので，$\langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s \rangle$ は部分空間となります．この部分空間を **解空間 (solution space)** といいます．この解空間の基底を連立同次 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の **基本解 (elementary solution)** といいます.

解空間の次元と行列の階数にはどんな関係があるのか興味のわくところです．じつはこのふたつの間には次のような関係があります.

定理 2.9 n 個の未知数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ について，連立同次 *1* 次方程式の係数行列 A の階数が r ならば，基本解は $n - r$ 個の解ベクトルで構成される.

証明 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A : \mathbf{0}]) = r$ より $[A : \mathbf{0}]$ は行基本変形を施して次のような行列に変形できる.

$$[A : \mathbf{0}]_R = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & d_{1r+1} & \cdots & d_{1n} & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & d_{rr+1} & \cdots & d_{rn} & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -d_{1r+1} \\ \vdots \\ -d_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -d_{1r+2} \\ \vdots \\ -d_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{x}_{n-r} = \begin{pmatrix} -d_{1n} \\ \vdots \\ -d_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-r}$ はもちろん解ベクトルである．また

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} = \mathbf{0}$$

とおくと，

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} = \begin{pmatrix} * & + \cdots + & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & + \cdots + & * \\ & c_1 & \\ & c_2 & \\ & \vdots & \\ & c_{n-r} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

これから $c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-r} = 0$ となり， $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{n-r}$ は 1 次独立である．よって解空間の次元は $n-r$. ■

♠ 自由度 ♠

基本解の個数 $n-r$ は基本解を表すのに必要な任意の定数の数を表し，この数のことを **自由度 (degree of freedom)** ともいいます.

例題 2.11 次の連立 *1* 次方程式を解こう.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 & = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 & = 1 \end{cases}$$

解 ガウスの消去法を用いる.

$$\begin{aligned} [A:\mathbf{b}] &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -10 & -6 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = [A:\mathbf{b}]_R. \end{aligned}$$

これから $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A:\mathbf{b}]) = 3$ となりこの連立 1 次方程式は解をもつ．また $[A:\mathbf{b}]_R$ を方程式に書き直すと

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 & = \frac{1}{2} \\ x_2 & = \frac{1}{2} \\ x_4 & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

となる．ここで $n = 4, r = 3$ より自由度は 1．よって $x_3 = \alpha$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2x_3 \\ \frac{1}{2} \\ x_3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる． ■

♠ 逆行列 ♠

前節で n 次の正方行列全体は加法，減法，乗法に関して，皆さんがよく知っている数の世界と似ていることを発見しましたが割り算はどうでしょうか．数の場合には a が 0 でない限り，$ax = xa = 1$ となる数 x がちょうどひとつ存在しました．行列の場合は事情はこれほど簡単ではありません．たとえば，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を見て下さい．A は零行列ではありません．しかし A に対し，$AX = XA = I$ となる行列 X は存在しません．つまり行列の場合は数の世界のように 0 でなければ必ず逆元が存在するとはいえないのです．そこで数の世界の性質を保つ行列を特別な名前でよんであげます．

♠ 正則行列 ♠

n 次の正方行列 A に対し，$XA = AX = I$ となる行列 X が存在するとき，A を **正則行列** **(regular matrix)** といいます．またこのような X を A の **逆行列** **(inverse matrix)** といいます．A の逆行列はいくつあるのでしょうか．たとえば $AX = XA = I, AZ = ZA = I$ とすると $X = XI = X(AZ) = (XA)Z = IZ = Z$ となり A の逆行列はひとつしかないことが分ります．そこで A の逆行列を A^{-1} と表します．

この考えを使ってもう 1 度連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解いてみましょう．A を正則行列とすると，$A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b}$ より $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ となります．したがって，連立 1 次方程式を解くためには逆行列 A^{-1} を求めて解く方法もあることが分りました．つまり $AX = I$ となる行列 X を求めれば良いわけです．この行列を簡単に求める方法があります．それを紹介する前に正則行列と行列の階数の関係を述べておきます．

定理 2.10 A が n 次の正方行列のとき，次の条件は同値である．
(1) $\mathrm{rank}(A) = n$
(2) A は正則行列である．

証明 定理 2.5 より $\mathrm{rank}(A) = n$ と $A_R = I$ は同値である．つまり $\mathrm{rank}(A) = n$ のとき，適当な基本行列の積 P を選んで $PA = I$ と表せる．言い換えると A は正則行列である．

逆に，A が正則行列のとき A_R を見てみると，適当な基本行列の積 P を用いて，$PA = A_R$ と表せる．ここで P は基本行列の積だから正則．よって P^{-1} が存在する．もし $A_R \neq I$ とすると A_R の最下行の成分はすべて 0 である．このような行列は正則行列ではない (演習問題 2.3) から，正則行列 A, P の積は正則行列でないことになって矛盾する (演習問題 2.3)．よって $\mathrm{rank}(A) = n$．■

ここで $AX = I$ から X を求める方法を紹介します．A は正則行列なので適当な基本行列の積 P に対して，$PA = I$ となります．そこでこの P を $AX = I$ に左からかけると $P(AX) = (PA)X = IX = X, PI = P$ より X を求めるのは P を求めるのと同じことだということが分ります．これは A にいくつかの適当な行基本変形を施して単位行列となるならば，それとまったく同じ変形を n 次の単位行列 I に施せばその結果が A^{-1} であることを示しています．

例題 2.12 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ の正則性を判定し，正則ならば逆行列を求めよう．

解

$$
\begin{aligned}
[A:I] &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = [I:A^{-1}].
\end{aligned}
$$

よって，A は正則で，$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ である．■

ここまでで学んだことをまとめると次のような定理を得ます.

定理 2.11 A が n 次の正方行列のとき，次の条件は同値である.
(1) A 正則行列
(2) $\mathrm{rank}(A) = n$
(3) $A_R = I$

証明 (2) $\Leftrightarrow$ (3) は定理 2.5，(1) $\Leftrightarrow$ (2) は 定理 2.10.

2.3.1 演習問題

1. 次の連立 1 次方程式をガウスの消去法を用いて解け.

(a) $\begin{cases} x - 3y &= 5 \\ 3x - 5y &= 7 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 5 \\ x + 2y + 3z &= 6 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 &= 6 \end{cases}$

2. 次の連立 1 次方程式が解をもつように，定数 k の値を定めよ．また，そのときの解を求めよ.

$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 7 \\ 3x + 2y + 5z &= 9 \\ 5x + 2y + 7z &= k \end{cases}$

3. 次の行列の正則性を判定し，正則ならば逆行列を求めよ.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & a \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ が正則行列となるのは a がどのようなときか調べよ.

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則行列であることを示し，A を基本行列の積で表せ.

6. 正方行列のひとつの行の成分がすべて 0 ならば，A は正則でないことを証明せよ.

7. A, B がともに n 次正則行列ならば，積 AB も正則で,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

となることを証明せよ.

2.4　行列式

♠ クラメールの公式 ♠

行列式を定義する前に 2 個の変数に関する連立 1 次方程式を考えてみましょう.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

を変数 x_1, x_2 について解きます．最初の式に a_{22} を, 後の式に $-a_{12}$ をかけたものを加えると,

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

を得ます．よって $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ のとき，解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

が得られます．同様にして,

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

が得られます．ここに表れた共通の分母を

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

で表して，これを方程式の係数の行列 (a_{ij}) の **行列式 (determinant)** といい $\det(a_{ij})$ または $|(a_{ij})|$ で表します．この表し方を使うと，

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

と書けます．これを **クラメールの公式 (Cramer's rule)** といいます．

♠ 余因子展開 ♠

定義 2.5 行列 $A = (a_{ij})$ を n 次の正方行列とする．
(a) $n = 1$ のとき， $\det(A) = a_{11}$
(b) $n = 2$ のとき， $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
(c) $n \geq 2$ のとき，行列 A の行 i と列 j を削除して作った $(n-1)$ 次の行列の行列式を M_{ij} で表し A の **小行列式 (minor)** という．さらに， a_{ij} の **余因子 (cofactor)** といわれるものを次のように定義する．

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

このとき， A の **行列式 (determinant)**$\det(A)$ を次のように定義する．

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

この行列式の求め方を第 i 行についての **余因子展開 (cofactor expansion)** といいます．同様にして，次のような行列式の求め方を第 j 列についての余因子展開といいます．

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

n 次の正方行列では行についての余因子展開が n 通り可能です．また列についても n 通り可能です．驚くことに，どの行または列についての余因子展開も同じ結果を与えます．このことより，私たちは行列 A の行列式を余因子展開で定義することができるのです．

定理 2.12 正方行列 A においてすべての行または列についての余因子展開は皆等しい．

例題 2.13 次の行列式を計算しよう．$\det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

解 第 1 行についての展開を行なう．

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + (-1)^{1+2}(-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 = -10. \blacksquare$$

行列式の定義としてよく用いられているものには次のようなものもあります．まず n 次の正方行列 A を考えます．この行列のそれぞれの行と列から成分をひとつずつ取り出しかけ合わせます．すると $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ の形をした組ができます．このとき， 成分の列の位置 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ を σ で表します．さて σ は全部で何個できるでしょうか．n 個の数を順に並べるので，最初の数は n 個の中からどれでも使えます．つぎの数は既にひとつ使ってしまったので残りの $n-1$ 個の中のどれでも使えます．こうやって数えていくと全部で $n!$ 個できることがわかります．次にこの形をした組に次のような規則で符号をつけてゆきます．$(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n)$ が $(1, 2, 3, \ldots, n)$ の順になるように，隣り合った 2 数を入れ換えていったとき，偶数回でできたら $+$ の符号をつけ奇数回でできたら $-$ の符号をつけます．この符号を $sgn(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ で表します．たとえば，同じ (1432) も

$$(1432) \longrightarrow (1423) \longrightarrow (1243) \longrightarrow (1234)$$

$$(1432) \longrightarrow (1234)$$

と (1234) に至るまでの回数は異なりますが，共に奇数回より $sgn(1432) = -$ となります．実際，

$$sgn(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \sum_{k=1}^{n-1} sgn \prod_{j=1}^{k} (i_k - i_j)$$

と表せるので， $sgn(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ の符号は一意的に定まります．これより

$$\det A = \sum_{\sigma} sgn(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

と定義します.

例題 2.14 $sgn(154632)$ を求めよう.

解

$$(154632) \longrightarrow (124635) \longrightarrow (123645) \longrightarrow (123465) \longrightarrow (123456)$$

より $sgn(154632) = +$. ■

♠ 行列式の性質 ♠

行列式は次のような性質をもっています.

定理 2.13 $B = A^t$ のとき， $\det B = \det A$.

証明 A^t の第 j 列についての余因子展開は， A の第 j 行についての余因子展開と同じである．よって $\det A = \det B$. ■

この定理によって，行列式の行について成り立つ性質は列についても成り立ちます．その逆もいえるので，今後，行列式に関する定理の証明は，行または列の一方だけについて行えば良いことになります.

定理 2.14 行列 B が行列 A の行の定数倍 α で得られたなら， $\det B = \alpha \det A$.

証明 A の第 k 行を α 倍したものを B とし，第 k 行について展開すると，

$$\det B = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}b_{ki}M_{ki}$$

となる．ただし， $b_{ki} = \alpha a_{ki}$．さらに， M_{ki} は B も A も同じなので，

$$\det B = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}\alpha a_{ki}M_{ki} = \alpha\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ki}M_{ki} = \alpha\det A. \blacksquare$$

定理 2.15 行列 B が行列 A の行または列の入れ替えで得られたなら，

$$\det B = -\det A.$$

証明 行列の次数に帰納法を用いる．
A を 2 次の行列とすると，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

行の入れ替えで B を得たなら，

$$B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}.$$

よって $\det B = -\det A$ となる．

つぎにこの定理が次数 $(n-1)$ の正方行列で成り立つと仮定し，次数 n の正方行列 A でも成り立つことを示す．行列 A の第 i 行と第 j 行との入れ替えで得たものを行列 B とする．このとき第 k 行について余因子展開を行なうと，

$$\det B = \sum_{s=1}^{n}a_{ks}B_{ks},\ \det A = \sum_{s=1}^{n}a_{ks}A_{ks}.$$

B_{ks} と A_{ks} は行列 A の小行列式を表しているので $(n-1)\times(n-1)$ の行列式，よって帰納法より，

$$B_{ks} = -A_{ks},\ (s = 1, 2, \ldots, n).$$

したがって， $\det B = -\det A$. $\blacksquare$

定理 2.16 行列 B が行列 A のひとつの行または列の α 倍を他の行または列に加えて得られたなら， $\det B = \det A$.

証明 行列 A の第 i 行の α 倍を第 j 行に加えたものを行列 B とする．つまり

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} + a_{j1} & \alpha a_{i2} + a_{j2} & \cdots & \alpha a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow j\ 行.$$

行列 B を第 j 行について展開すると，

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{k=1}^{n}(\alpha a_{ik}+a_{jk})A_{jk}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\alpha a_{ik}A_{jk}+\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{jk}.\end{aligned}$$

となる．ここで A_{jk} は B の第 j 行と第 k 列を削除して得られたものなので，

$$\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{jk}=\det A.$$

また $\sum_{k=1}^{n}\alpha a_{ik}A_{jk}$ は行列 A の第 j 行を第 i 行の α 倍して得られたものの行列式なので，第 j 行を $\dfrac{1}{\alpha}$ 倍するとふたつの行の対応する成分がみな等しい行列ができる．この行列の行列式は定理 2.18 より 0 となる．つまり $\sum_{k=1}^{n}\alpha a_{ik}A_{jk}=0$. よって， $\det B=\det A$. ■

上の 3 つの定理より，行列 A に行基本変形を施して作った行列 B の行列式は基本行列の行列式と行列 A の行列式の積になることがかわります，言い換えると

定理 2.17 $\det(EA)=\det(E)\det(A)$，ただし E は基本行列.

証明 3 つの行基本変形 L_1, L_2, L_3 (L_1 はふたつの行の入れ替え, L_2 はひとつの行にある数をかけて他の行に加える, L_3 はひとつの行に 0 でない数 α をかける) に対応する基本行列を E_1, E_2, E_3 とすると定理 2.14,2.15,2.16 より

$$|E_1|=-1,\ |E_2|=1,\ E_3A=\alpha.$$

ここで行列 E_iA は行列 A に対応する基本変形 L_i を施したものであるから，

$$|E_1A|=-|A|=|E_1||A|,\ |E_2A|=|A|=|E_2||A|,\ |E_3A|=\alpha|A|=|E_3||A|.$$

よっていずれの場合も， $\det(EA)=\det(E)\det(A)$. ■

定理 2.18 行列 B が次のいずれかの性質をもつとき， $\det B=0$ である.

(1) ひとつの行 (または列) のすべての成分が 0 である.

(2) 行列 A のふたつの行 (または列) の対応する成分が等しい.

(3) 行列 A のふたつの行 (または列) の対応する成分が比例している.

証明

(1)　定理 2.14 で $\alpha=0$ とおけばよい.

(2)　行列 B を行列 A の成分の等しい行 (または列) の入れ替えで得た行列とすると，定理 2.15 より $\det B=-\det A$. しかし行列 A と行列 B は同じものであるから， $\det B=\det A$. よって $\det A=0$.

(3)　行列 A の第 j 行が第 k 行の α 倍と等しいとする．$\alpha=0$ ならば $\det A=0$. よって $\alpha\neq 0$ とする．行列 A の第 j 行を $\dfrac{1}{\alpha}$ 倍して得た行列を B とすると，定理 2.14 より $\det B=\dfrac{1}{\alpha}\det A$. また定理 2.18(2) より $\det B=0$. よって $\det A=0$.

例題 2.15 次の行列式を計算しよう.

$$(a)\ \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (b)\ \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

解 (a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{2R_1+R_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 }2.18(2)}{=} 0.$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{2C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{定理 }2.18(2)}{=} 0.$

ここで $2C_1 + C_2$ は第 1 列の 2 倍を第 2 列にたすことを意味しています. ■

例題 2.16 次の行列の行列式を求めよう.

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad (b)\ B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

解 (a)

$$\begin{vmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{4R_1+R_2 \\ -2R_1+R_3}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 18 \\ 0 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\frac{R_2}{7} \\ R_2+R_3}}{=} -7\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{18}{7} \\ 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} = -7 \cdot 16 = -112.$$

(b) 行列 B は行列 A の第 1 行と第 3 行を入れ替えたものなので, 定理 2.15 より $\det B = 112$. ■

例題 2.17 上の定理を用いて次の行列式を因数分解しよう.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$

解

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}
&\overset{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}}{=}
\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{\frac{R_2}{b-a} \\ \frac{R_2}{c-a}}}{=} (b-a)(c-a)
\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & 1 & b^2+ba+a^2 \\ 0 & 1 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix} \\
&\overset{-R_2+R_3}{=} (b-a)(c-a)
\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & 1 & b^2+ba+a^2 \\ 0 & 0 & c^2+ca-b^2-ba \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c). \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

最後に行列式に関する定理の内もっとも重要と思われる 2 つの定理を記しておきます.

♠ 行列式の積 ♠

定理 2.19 $\det AB = \det A \det B$.

証明 行列 A は適当な基本行列 E_i を用いて $A = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A_R$ と表せる．よって定理 2.17 より

$$|A| = |E_k||E_{k-1}| \cdots |E_1||A_R|.$$

もし $|A| = 0$ なら $|A_R| = 0$. よって A_R の，ある行ベクトルは零ベクトル．つまり AB の，ある行ベクトルも零ベクトル．これより $|AB| = 0$. もし $|A| \neq 0$ なら $|A_R| \neq 0$ となるので定理 2.11 より $A_R = I$ となる．よって

$$|A| = |E_k||E_{k-1}| \cdots |E_1|,$$

$$AB = E_k E_{k-1} \cdots E_1 B.$$

これより

$$|AB| = |E_k E_{k-1} \cdots E_1 B| = |E_k||E_{k-1}| \cdots |E_1||B| = |A||B|. \ \blacksquare$$

定理 2.20 A が n 次の正方行列のとき, 次の条件は同値である.
1) A 正則行列
2) $|A| \neq 0$
3) A^{-1} が存在し, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^t$ で与えられる. ただし A_{ij} は A の余因子.
4) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ はただ 1 組の解をもち, その解は次の式で与えられる.

$$x_j = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{|[A_j : \mathbf{b}]|}{|A|}.$$

これをクラメールの公式という.
5) $\mathrm{rank}(A) = n$
6) $A_R = I$

証明に入る前にこの定理の中にでてきた転置行列 $\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^t$ は A の **余因子行列 (ajoint)** とよばれ $adjA$ と表します. また

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

は行列 A の j 列を $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ で置き換えたもので, $[A_j : \mathbf{b}]$ で表します.

証明 1)$\Rightarrow$ 2)
A が正則ならば, $AA^{-1} = I$ なので定理 2.19 より $|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I| = 1$. よって $|A| \neq 0$ である.
2)$\Rightarrow$ 3)

$|A| \neq 0$ なので $X = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^t$ とおくと

$$\begin{aligned} XA &= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = I. \end{aligned}$$

よって $XA = I$ となり $X = A^{-1}$.

3) $\Rightarrow$ 4)

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^t$ を $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に左側からかけると,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} &= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1A_{11} & +\cdots+ & b_nA_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1A_{1n} & +\cdots+ & b_nA_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る.

　右辺の成分 $b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}$ は，行列 A の第 j 列を $\mathbf{b}$ で置き換えた行列

$$[A_j : \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の第 j 列についての余因子展開である．したがって

$$x_j = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{|[A_j : \mathbf{b}]|}{|A|}.$$

　4) $\Rightarrow$ 5)

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ がただ 1 組の解 $\mathbf{p}$ をもつとする．このとき $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解を $\mathbf{C}$ とすると，定理 2.8 より $\mathbf{p} + \mathbf{C}$ も $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解となり，$\mathbf{p} = \mathbf{p} + \mathbf{C}$ より $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ となる．よって定理 2.9 より $0 = n - \mathrm{rank}(A)$ となり $\mathrm{rank}(A) = n$ を得る．

5) $\Rightarrow$ 6), 6) $\Rightarrow$ 1) は定理 2.11 である． ■

2.4.1 演習問題

1. 次の行列式の値を求めよ．

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -4 & -4 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2. 次の行列式を因数分解せよ．

(a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ a & c+a & c \\ a & b & a+b \end{vmatrix}$

3. 次の方程式を解け．$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 1 \\ 2 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$

4. 平面上の 2 点 $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ を通る直線の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ.

5. 空間上の 3 点 $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$ を通る平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ.

6. 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ となる基本解をもてば， $|A| = 0$ であることを示せ.

7. 次の連立 1 次方程式をクラメールの公式をもちいて解け.

(a) $\begin{cases} x - 3y &= 5 \\ 3x - 5y &= 7 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 5 \\ x + 2y + 3z &= 6 \end{cases}$

2.5 Gauss の消去法アルゴリズム

Gauss の消去法

n 次の連立 1 次方程式を解く。

$$\begin{array}{lll} R_1: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ R_2: & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &=& b_2 \\ \vdots & \vdots & & \\ R_n: & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &=& b_n \end{array}$$

INPUT　　未知数 n; 拡大係数行列 $A = (a_{ij})$.
OUTPUT　解 $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
$Step1$　For $i = 1, \ldots, n-1$do Steps$2-4$.
$Step2$　p は $a_{pi} \neq 0$ となる最小の値とする;
　　もしそのような p が見つからない場合
　　$then$OUTPUT($'nouniquesolution'$);
　　STOP.
$Step3$　If $p \neq i$then$(R_p) \leftrightarrow (R_i)$.
$Step4$　For $j = i_1, \ldots, n do\ Steps 5, 6$.
$Step5$　Set $m_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$.
$Step6$　　$-m_{ij}R_i + R_j$.
$Step7$　If $a_{nm} = 0$thenOUTPUT($'nouniquesolution'$);
　　STOP.
$Step8$　Set $x_n = a_{n,n+1}/a_{nm}$.
$Step9$　For $i = n-1, \ldots, 1$set$x_i = [a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j]/a_{ij}$.
$Step9$　OUTPUT$(x_1, \ldots, x_n)$;
　　STOP.

ここで、Gauss の消去法を用いて n 次の連立 1 次方程式を解くために必要な時間を求めてみる。一般に、掛け算、割り算は足し算、引き算に比べて時間がかかる。実際にどのくらい違うかは、使っているコンピュータによって異なる。そこで、ここでは、それぞれの演算回数を数える。四則演算が始まるのは、Step5 からである。Step5 では $(n-i)$ 回の割り算を必要とする。Step6 の行基本変形では乗数 m_{ij} を行 R_i の全ての成分に掛けるので、$(n-i)(n-i+1)$ 回の掛け算が必要である。このあと、R_j の全ての成分に $-m_{ij}R_i$ の成分を足すので、$(n-i)(n-i+1)$ 回の足し算が必要となる。さらに、代入による演算がある。Step8 では割り算が 1 回必要である。Step9 では x_i を求めるのに、$(n-i)$ 回の掛け算と $(n-i-1)$ 回の足し算と 1 回の引き算と 1 回の割り算が必要である。

よって、それぞれの $i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して

掛け算/割り算の回数

$$(n-i) + (n-i)(n-i+1) + (n-i) + 1 = (n-i)(n-i+3) + 1$$

足し算/引き算の回数

$$(n-i)(n-i+1) + 1 + (n-i-1) = (n-i)(n-i+2)$$

これより、合計の演算回数は

掛け算/割り算の合計回数

$$\begin{aligned}
1+\sum_{i=1}^{n-1}[(n-i)(n-i+3)+1] &= 1+\sum_{i=1}^{n-1}(n^2-2ni+i^2+3n-3i+1) \\
&= 1+(n^2+3n+1)\sum_{i=1}^{n-1}1-(2n+3)\sum_{i=1}^{n-1}i+\sum_{i=1}^{n-1}i^2 \\
&= 1+(n^2+3n-1)(n-1)-(2n+3)\frac{(n-1)n}{2} \\
&+ \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{2n^3+6n^2-3n}{6}
\end{aligned}$$

足し算/引き算の合計回数

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+2) &= \sum_{i=1}^{n-1}(n^2-2ni+i^2+2n-2i) \\
&= (n^2+2n)\sum_{i=1}^{n-1}1-(2n+2)\sum_{i=1}^{n-1}i+\sum_{i=1}^{n-1}i^2 \\
&= (n^2+2n)(n-1)-(2n+2)\frac{(n-1)n}{2}+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= \frac{2n^3+3n^2-5n}{6}
\end{aligned}$$

となる。これより、n が大きいときの乗除演算回数は約 $n^3/3$ で、加減演算回数も $n^3/3$ である。したがって、n 次の連立 1 次方程式を Gauss の消去法で解くには、$O(n^3)$ 回の演算が必要である。

もっと、素早く連立 1 次方程式を解く方法があるか、それについては数値解析入門で取り上げている。

第3章　線形写像

3.1　線形写像

♠ 写像 ♠

第 1 章，第 2 章でベクトル空間について学んできました．この章では写像を用いてふたつのベクトル空間の関係を調べます．そこで写像について簡単に復習をしておきます．

ふたつの集合 V と W を考えます．V の任意の要素 v に対して W のただひとつの要素 w を対応させるような規則 T があるとき，この対応関係 T を V から W への **写像 (mapping)** といい記号 $T : V \longrightarrow W$ で表します．この考え方を用いると $m \times n$ 型の行列は n 項列ベクトルを m 項列ベクトルに移す写像，言い換えると，$\mathcal{R}^n$ から $\mathcal{R}^m$ への写像ということになります．

♠ 線形写像 ♠

ベクトル空間には和とスカラー倍が定義されていました．そこで，ふたつのベクトル空間の関係を調べるのに使う写像は，和とスカラー倍を保つのが望ましいでしょう．そのような写像を線形写像といい次のように定義します．

定義 3.1 V, W がベクトル空間のとき，写像 $T : V \longrightarrow W$ で次の条件を満たすものを **線形写像 (linear mapping)** という．
1. $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}) \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V)$
2. $T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v}) \quad (\mathbf{v} \in V, \alpha \in R)$

とくに $V = W$ のとき，T を V の **線形変換 (linear transformation)** という．

線形写像は V から W への写像のうちベクトル空間の性質を保つ写像です．T により V の移る先全体を T の **像 (image)** といい，

$$Im(T) = T(V) = \{\mathbf{w} \in W : T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \text{ を満たす } \mathbf{v} \in V \text{ が存在する }\}$$

で表します．また T による像が $\mathbf{0}$ になるような V の要素の集まりを T の **核 (kernal)** といい，

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = 0\}$$

で表します．これらは線形写像の性質より，それぞれ W, V の部分空間になることがわかります (演習問題 3.1 参照).

例題 3.1 A を $m \times n$ 型の行列とする．

$$T : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^m$$

を $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定義すると T は線形写像になることを示そう．

解 行列どうしの積および実数との積の性質から， $\mathcal{R}^n$ の任意のベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ および任意の実数 α に対して，

$$T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1) + A(\mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2),$$

$$T(\alpha\mathbf{x}_1) = A(\alpha\mathbf{x}_1) = \alpha A(\mathbf{x}_1) = \alpha T(\mathbf{x}_1)$$

が成り立つ．よって T は線形写像である． ■

線形写像 $T : V \longrightarrow W$ が

$$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \text{ ならば } T(\mathbf{v}_1) \neq T(\mathbf{v}_2) \ (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V)$$

を満たすとき， T は **1 対 1(one-to-one)** であるといい，このような写像を **単射 (injective)** といいます．

線形写像 $T : V \longrightarrow W$ が $Im(T) = W$ を満たすとき， T を V から W の **上への (onto)** 線形写像といい，このような写像を **全射 (surjective)** といいます．

例題 3.2 $S : U \longrightarrow V, T : V \longrightarrow W$ がともに線形写像であるとき，合成写像 $T \circ S : U \longrightarrow W$ も線形写像であることを示そう．

解

$$\begin{aligned}(T \circ S)(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2) &= T(S(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2)) \\ &= T(\alpha S(\mathbf{u}_1) + \beta S(\mathbf{u}_2)) \\ &= \alpha(T \circ S)(\mathbf{u}_1) + \beta(T \circ S)(\mathbf{u}_2)\end{aligned}$$

より合成写像 $T \circ S : U \longrightarrow W$ も線形写像． ■

♠ 同型写像 ♠

ベクトル空間からベクトル空間の上への 1 対 1 の線形写像をとくに**同型写像 (isomorphism)** といいます．また， V から W への同型写像が存在するとき， V と W は **同型 (isomorphic)** であるといい， $V \sim W$ と表します．また $T : V \longrightarrow W$ が同型写像で， $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ のとき， $S(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$ と定めることにより， W から V への写像 S を得ます．このとき， S を T の **逆写像 (inverse mapping)** といい， $S = T^{-1}$ と表します．ここで同型写像について次のことが成り立ちます．

定理 3.1 線形写像 $T : V \longrightarrow \mathcal{R}^n$ について次の条件は同値である．
(1) $\dim V = n$
(2) T は同型写像である．つまり $V \sim \mathcal{R}^n$
(3) $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, $Im(T) = \mathcal{R}^n$
(4) 逆写像 $T^{-1} : \mathcal{R}^n \longrightarrow V$ は同型写像である．
(5) $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ が $\mathcal{R}^n$ の基底ならば， 逆写像 T^{-1} による像の集合 $\{T^{-1}(\mathbf{w}_1), T^{-1}(\mathbf{w}_2), \ldots, T^{-1}(\mathbf{w}_n)\}$ は V の基底となる．

証明 (1) $\Rightarrow$ (2)
V の 1 組の基底を $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n\}$ とし， $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ を $\mathcal{R}^n$ の基底とする．ここで $T : V \longrightarrow$

$\mathcal{R}^n$ を $T(\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n)=\alpha_1\mathbf{w}_1+\alpha_2\mathbf{w}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{w}_n$ と定義すると，T は線形写像となる (演習問題 3.1)．また $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ とすると，ある $c_1,c_2,\ldots,c_n,\ d_1,d_2,\ldots,d_n\in R$ で

$$\mathbf{a}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n,$$

$$\mathbf{b}=d_1\mathbf{v}_1+\cdots+d_n\mathbf{v}_n.$$

よって

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{a})=T(\mathbf{b}) &\implies T(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n)=T(d_1\mathbf{v}_1+\cdots+d_n\mathbf{v}_n)\\
&\implies c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_nT(\mathbf{v}_n)=d_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+d_nT(\mathbf{v}_n)\\
&\implies c_1\mathbf{w}_1+\cdots+c_n\mathbf{w}_n=d_1\mathbf{w}_1+\cdots+d_n\mathbf{w}_n\\
&\implies c_1=d_1,\ldots,c_n=d_n\\
&\implies \mathbf{a}=\mathbf{b}
\end{aligned}$$

となり T は単射．つぎに $\mathbf{y}\in\mathcal{R}^n$ とすると，$\mathbf{y}=c_1\mathbf{w}_1+\cdots+c_n\mathbf{w}_n$ と表され，これは $c_1\mathbf{v}_1+\ldots+c_n\mathbf{v}_n$ の T による像である．よって T は全射である．これより T は全単射な線形写像となり T は同型写像であることが示せた．

(2) $\Rightarrow$ (3)

$T(\mathbf{a})=\mathbf{0}$ とすると $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}=T(\mathbf{a})$ となるので，仮定より $\mathbf{a}=\mathbf{0}$．よって $\ker(T)=\{\mathbf{0}\}$．また T は全射であるから $Im(T)=\mathcal{R}^n$ となる．

(3) $\Rightarrow$ (4)

T が同型写像なので $\mathbf{w}_i,\mathbf{w}_j\in R^n$ に対して，$T(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i,T(\mathbf{v}_j)=\mathbf{w}_j$ となる $\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\in V$ が存在する．また T の線形性により

$$T(\alpha\mathbf{v}_i+\beta\mathbf{v}_j)=\alpha T(\mathbf{v}_i)+\beta T(\mathbf{v}_j)=\alpha\mathbf{w}_i+\beta\mathbf{w}_j.$$

よって

$$T^{-1}(\alpha\mathbf{w}_i+\beta\mathbf{w}_j)=\alpha\mathbf{v}_i+\beta\mathbf{v}_j.$$

次に T^{-1} が全単射であることを示す．まず $T^{-1}(\mathbf{w}_i)=T^{-1}(\mathbf{w}_j)$ より $\mathbf{w}_i=\mathbf{w}_j$ を示す．

$$\mathbf{w}_i-\mathbf{w}_j=T(\mathbf{v}_i)-T(\mathbf{v}_j)=T(\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_j)=T(\mathbf{0})=\mathbf{0}.$$

最後に $Im(T)=\mathcal{R}^n$ より

$$\mathbf{v}_i=T^{-1}(\mathbf{w}_i).$$

よって T^{-1} は同型写像.

(4) $\Rightarrow$ (5)

$\{T^{-1}(\mathbf{w}_1),T^{-1}(\mathbf{w}_2),\ldots,T^{-1}(\mathbf{w}_n)\}$ が V の基底であることを示すには，この組が 1 次独立でかつこの組のベクトルで張られる空間が V であることを示せばよい.

$$c_1T^{-1}(\mathbf{w}_1)+c_2T^{-1}(\mathbf{w}_2)+\cdots+c_nT^{-1}(\mathbf{w}_n)=\mathbf{0}$$

より

$$T^{-1}(c_1\mathbf{w}_1+c_2\mathbf{w}_2+\cdots+c_n\mathbf{w}_n)=\mathbf{0}.$$

ここで T^{-1} は同型写像なので

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

このとき，$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ は 1 次独立であるから $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ を得る．よって

$$\{T^{-1}(\mathbf{w}_1), T^{-1}(\mathbf{w}_2), \ldots, T^{-1}(\mathbf{w}_n)\}$$

は 1 次独立である．つぎに $\mathbf{v} \in V$ とすると，

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = c_1T^{-1}(\mathbf{w}_1) + \cdots + c_nT^{-1}(\mathbf{w}_n).$$

よって $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle = V$.
(5) $\Rightarrow$ (1)
$\{T^{-1}(\mathbf{w}_1), T^{-1}(\mathbf{w}_2), \ldots, T^{-1}(\mathbf{w}_n)\}$ は V の基底より $\dim V = n$. ■

このように n 次元のベクトル空間 V は $\mathcal{R}^n$ と同型となるので，V のベクトル間の関係は同型写像によって $\mathcal{R}^n$ のベクトル間の関係として扱うことができます．

♠ 行列表示 ♠

有限次元のベクトル空間の線形写像を調べるために，線形写像に行列を対応させることがあります．このとき，線形写像の性質は行列の性質として，より具体的に表されます．たとえば，xy 平面上の点 (x, y) を θ だけ回転して点 (X, Y) に対応させる線形変換 T を考えてみましょう．まず，R^2 の 1 組の基底 $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ を考えます．これより

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = T(\mathbf{x}) = T(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \\ &= xT(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + yT(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = x\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と行列を用いて表せます．一般に，線形写像 $T : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^m$ を考え，

$$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}, \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$$

をそれぞれ $\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^m$ の 1 組の基底とし，任意の $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ とその像 $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^m$ を

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_1x_1 + \mathbf{v}_2x_2 + \cdots + \mathbf{v}_nx_n,$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{w}_1y_1 + \mathbf{w}_2y_2 + \cdots + \mathbf{w}_my_m$$

と表すとき，写像 T の線形性により

$$\begin{aligned}\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) &= T(\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{v}_n x_n) \\ &= T(\mathbf{v}_1)x_1 + T(\mathbf{v}_2)x_2 + \cdots + T(\mathbf{v}_n)x_n\end{aligned}$$

となります．ここで $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ は $\mathcal{R}^m$ に含まれるので，

$$T(\mathbf{v}_i) = a_{1i}\mathbf{w}_1 + a_{2i}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mi}\mathbf{w}_m \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

と表せます．これより

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= (a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m)x_1 \\ &= (a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{w}_m)x_2 \\ &= \vdots \\ &= (a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_m)x_n\end{aligned}$$

となります．ここで $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ は $\mathcal{R}^m$ の基底をなしているので，対応する係数は等しいはずです．よって次のような関係式が得られます．

$$\left\{\begin{array}{ccr} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_m & = & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{array}\right.$$

これより右辺の係数行列 $A = (a_{ij})$ が定まります．この行列 A を基底

$$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}, \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$$

に関する T の **行列表示 (matrix representation)** といい $[T]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}}$ と表します．とくに $V = W$ の場合は，通常 $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ と $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ とを同一にとり T の行列表示を $[T]_{\mathbf{v}}$ と表します．また $T : R^n \longrightarrow R^n$ のとき，**標準基底 (usual basis)**

$$\{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

を用いて T の行列表示は $[T]_{\mathbf{e}}$ または $[T]$ で表します．

ここまでをまとめると $\mathcal{R}^n$ から $\mathcal{R}^m$ への線形写像 T は， $\mathcal{R}^n$ の基底の像を $\mathcal{R}^m$ の基底で表したとき， $m \times n$ 型の行列 A で表され，

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathbf{w}} = [T]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}}[\mathbf{x}]_{\mathbf{v}}$$

を満たします．

例題 3.3 $T:\mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}^2$ が $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-4y \\ x+5y \end{pmatrix}$ で与えられているとき，標準基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ に関する T の行列表示 $[T]$ と基底 $\{\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\}$ に関する T の行列表示 $[T]_{\mathbf{w}}$ を求めよ．また基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ に関する T の行列表示 $[T]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{w}}$ を求めよう．

解

$$T(\mathbf{e}_1) = T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$
$$T(\mathbf{e}_2) = T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = -4\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$$

より $[T] = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{w}_1) &= T(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -9 \\ 16 \end{pmatrix} = a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2, \\ T(\mathbf{w}_2) &= T(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -14 \\ 27 \end{pmatrix} = c\mathbf{w}_1 + d\mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

とおくと $a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 16 \end{pmatrix}, c\mathbf{w}_1 + d\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -14 \\ 27 \end{pmatrix}$ より $a = 77, b = -43, c = 124, d = -69$ を得る．よって $[T]_{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 77 & 124 \\ -43 & -69 \end{pmatrix}$.

また

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -13\mathbf{w}_1 + 8\mathbf{w}_2, \\ T(\mathbf{e}_2) &= T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = 30\mathbf{w}_1 - 17\mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

より $[T]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} -13 & 30 \\ 8 & -17 \end{pmatrix}$. ■

♠ 次元公式 ♠

線形写像の行列表示を用いて，もう一度線形写像の核と像について調べてみましょう．線形写像 T を $T:\mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^m$ とします．このとき $\ker(T)$ は T の像が $\mathbf{0}$ になる $\mathcal{R}^n$ の要素の集まりでした．つまり連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &=& 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &=& 0 \\ \vdots && \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &=& 0 \end{array} \right.$$

の解からつくられる解空間と同じになります．また定理 2.9 より，解空間の次元は

$$\dim \ker(T) = n - \mathrm{rank}(A)$$

となります．では $Im(T)$ はどうでしょうか．$Im(T)$ は $\mathcal{R}^n$ のすべての元の像の集まりなので $\dim Im(T) = \mathrm{rank}(A)$ となります．これから**次元公式**とよばれる次の定理を得ます．

定理 3.2 $T : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^m$ を線形写像とするとき，

$$\dim \mathcal{R}^n = \dim \ker(T) + \dim Im(T)$$

が成り立つ．

例題 3.4 $T : \mathcal{R}^3 \longrightarrow \mathcal{R}^3$ の行列表示を $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき， $\dim \ker(T)$ を求めよう．

解 $\dim \ker(T)$ は $\dim \mathcal{R}^3 - \dim Im(T)$ と等しく， $\dim Im(T) = \mathrm{rank}(A)$ より $\mathrm{rank}(A)$ を求めれば $\dim \ker(T)$ が求まる．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $\mathrm{rank}(A) = 1$．したがって $\dim \ker(T) = 3 - 1 = 2$． ■

ベクトル空間 ,$\mathcal{R}^l, \mathcal{R}^n, \mathcal{R}^m$ の間に線形写像

$$S : R^l \longrightarrow \mathcal{R}^n,\ T : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^m$$

が与えられたとき，その合成写像 $T \circ S : R^l \longrightarrow R^m$ も線形写像となりました (例題 3.2)．そこで各空間に基底をとり，それらに関する S, T の行列を A, B とすると $\mathbf{x} = (x_i), \mathbf{y} = (y_j), \mathbf{z} = (z_k)$ に対して

$$(y_i) = A(x_j),\ (z_k) = B(y_i) = BA(x_j)$$

となるので $T \circ S$ の行列表示は BA となります．

定理 3.3 線形変換 $T : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$ の基底 $\{\mathbf{v}_i\}$ に関する行列表示を A とするとき，次の条件は同値である．
(1) T は同型写像である．
(2) 行列 A は正則行列である．

証明 (1) $\Rightarrow$ (2)
$T : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$ の行列表示を A とする．T は同型写像より T^{-1} が存在する．T^{-1} の行列表示を B とすると， $BA = I$ が成り立つから， A は正則行列である．
(2) $\Rightarrow$ (1)

A が正則行列ならば $BA=I$ となる行列が存在し，この B に対する写像を S すると $T\circ S=1$．よって，演習問題 3.1 より T は同型写像． ■

3.1.1　演習問題

1. 次の写像のうち線形写像はどちらか.

$$T_1:\mathcal{R}^3\longrightarrow\mathcal{R}^2,\ T_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3\\x_1+x_2\end{pmatrix}.$$

$$T_2:\mathcal{R}^3\longrightarrow\mathcal{R}^2,\ T_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+1\\x_2+x_3\end{pmatrix}.$$

2. V は n 次元ベクトル空間，$\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ を V の基底とする．$T:V\longrightarrow\mathcal{R}^n$ を $T(\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n)=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{e}_n$ と定義すると，T は線形写像になることを示せ.

3. 線形写像 $T:\mathcal{R}^n\longrightarrow\mathcal{R}^n$ について，次の条件は同値であることを証明せよ.

(a) T は同型写像である.

(b) $T\circ S=1$ を満たす線形写像 $S:\mathcal{R}^n\longrightarrow\mathcal{R}^n$ が存在する.

4. $T:V\longrightarrow W$ が線形写像のとき，$\ker(T), Im(T)$ は V, W の部分空間であることを示せ.

5. $T:\mathcal{R}^3\longrightarrow\mathcal{R}^3$ が $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_2+2x_3\\2x_1+x_2+3x_3\\2x_1+2x_2+x_3\end{pmatrix}$ のとき，標準基底 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ に関する T の行列表示 $[T]$ と基底 $\{\mathbf{w}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\mathbf{w}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\mathbf{w}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\}$ に関する行列表示 $[T]_{\mathbf{w}}$ を求めよ.

また $\dim\ker(T)$ を求めよ.

3.2　行列の変換と固有値

♠ 基底変換の行列 ♠

線形写像 T が与えられたとき，$\mathcal{R}^n$ と $\mathcal{R}^m$ の基底の取り方によって T の行列表示が変わることを学びました．ここでは $\mathcal{R}^n$ の基底から $\mathcal{R}^m$ の基底に移す行列，**変換行列 (transition matrix)** と行列表示の関係について考えます.

例題 3.5 $T:\mathcal{R}^2\longrightarrow\mathcal{R}^2$ が $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-4y\\x+5y\end{pmatrix}$ で与えられているとき，R^2 の標準基底 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ から一般の基底 $\{\mathbf{w}_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\mathbf{w}_2=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\}$ への変換行列 P を求めよ．また $A=[T]_{\mathbf{e}}$ とするとき $P^{-1}AP$ を求めよう.

解 まず， $P\mathbf{e}_1 = \mathbf{w}_1, P\mathbf{e}_2 = \mathbf{w}_2$ となる行列を求める．

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$$

より変換行列 P は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

次に $P^{-1}AP$ を求める．例題 3.3 より $A = [T]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$．よって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 & 124 \\ -43 & -69 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

この例題をよく見ると， $P^{-1}[T]_{\mathbf{e}}P = [T]_{\mathbf{w}}$ が成り立っています．これは偶然でしょうか．行列表示と基底の変換行列の間ではこのようなことがいつも成り立っているのか考えてみましょう．

定理 3.4 線形変換 $T : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$ の基底 $\{\mathbf{v}_i\}$ に関する行列表示を A，基底 $\{\mathbf{w}_i\}$ に関する行列表示を B とする．$\{\mathbf{v}_i\}$ から $\{\mathbf{w}_i\}$ の基底の変換行列を P とすると， $B = P^{-1}AP$ が成り立つ．

証明 演習問題 3.2 より $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ から $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^n$ の基底の変換行列 P は n 次の正則行列で， $P = (p_{ij})$ は

$$\mathbf{w}_j = p_{1j}\mathbf{v}_1 + \cdots + p_{nj}\mathbf{v}_n,\ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

で与えられる．また $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ とすると，

$$T(\mathbf{v}_i) = a_{1i}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{mi}\mathbf{v}_m,\ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$T(\mathbf{w}_j) = b_{1j}\mathbf{w}_1 + \cdots + b_{mj}\mathbf{w}_m,\ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

より，

$$(T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)) = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)A,$$

$$(T(\mathbf{w}_1), \ldots, T(\mathbf{w}_n)) = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)B$$

となる．このとき，

$$\begin{aligned}
(T(\mathbf{w}_1), \ldots, T(\mathbf{w}_n)) &= (T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n))P \\
&= ((\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)A)P \\
&= (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)AP \\
&= ((\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)P^{-1})(AP) \\
&= (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)(P^{-1}AP)
\end{aligned}$$

となるから，

$$P^{-1}AP = B$$

が成り立つ．■

ふたつの n 次の正方行列 A, B に対して，$P^{-1}AP = B$ を満たす n 次の正則行列 P が存在するとき，A と B は **相似 (similar)** であるといい，$A \sim B$ と表します．

線形変換 $T : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$ の性質は行列表示と密接な関係をもっていますが，基底のとり方によっては $B = P^{-1}AP$ のほうが A よりも分りやすい行列になることがあります．こんなときには T の性質は A よりも B で調べた方がよいでしょう．そこで残りの章は，行列 A に対して，正則行列 P をうまく選んで，$P^{-1}AP$ を簡単な行列 (対角行列，三角行列など) に直す方法について学びます．この簡単な形を行列の **標準形 (canonical form)** とよんでいます．

♠ 固有値と固有ベクトル ♠

ここまで私たちは実数だけをスカラーとして用いてきましたが，そろそろ限界のようです．そこでこれからは，断りがない限り複素数もスカラーとして用いることにします．複素数全体は C で表し，n 個の複素数の組を $C^n = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n), c_i \in C\}$ で表します．

n 次の正方行列を A とし，$\lambda \in C$ に対して，

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\ (\mathbf{x} \in C^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0})$$

が成り立つとき，λ を A の **固有値 (eigenvalue)** といい，$\mathbf{x}$ を固有値 λ に対する**固有ベクトル (eigenvector)** といいます．では固有値と固有ベクトルは何なのか調べてみましょう．まず，幾何学的に考えてみます．たとえば平面上で直線 $y = x + 2$ を直線 $Y = X$ に移す線形変換を考えてみます．これは y 軸方向での平行移動なので $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ の形をしたベクトルは線形変換の後でも $\lambda\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ の形をしています．このように線形変換後にそれ自身のスカラー倍となって現れるベクトル，これが固有ベクトルです．またこのときのスカラー λ が固有値です．それでは固有値と固有ベクトルはどうやって求めるのでしょうか．

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ をかき直すと，

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となり，これは同次の連立 1 次方程式と考えられます．ここで固有ベクトル $\mathbf{x}$ が存在するための必要十分条件は，連立 1 次方程式が 0 でない解をもつことなので，定理 2.20 より

$$|A - \lambda I| = 0$$

となります．よって，固有値 λ は t を未知数とする方程式

$$|A - tI| = 0$$

の解として求まります．逆に，この方程式の解 λ は A の固有値であることが分ります．そこで t の n 次式

$$\Phi_A(t) = \det(A - tI) = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_n$$

を行列 A の **固有多項式 (characteristic polynomial)** といい，t の n 次方程式

$$\Phi_A(t) = \det(A - tI) = 0$$

を行列 A の **固有方程式 (characteristic equation)** といいます．これより固有値を求めるには固有方程式の解を求めればよいことが分ります．

例題 3.6 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよう．

解 $\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & -5 \\ 0 & 1 & -2-t \end{vmatrix} = (3-t)(t^2+1) = 0$．よって A の固有値は $\lambda = 3, \pm i$．■

この例題からもわかるように，行列の成分がすべて実数でも固有値に複素数が表れることがあります．

例題 3.7 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよう．

解 $\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{vmatrix} = -(t+1)^2(t-2)$．よって，$A$ の固有値は $\lambda = 2, -1$ である．次に A の固有ベクトルを求める．

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $(A-2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので，この連立方程式を解くと

$$\begin{aligned} A - 2I &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\;]{\substack{-R_1+R_2 \\ 2R_1+R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\;]{\substack{-\frac{R_2}{3} \\ R_2+R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これより自由度 1 となるので $x_3 = \alpha$ とおくと，

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 + 2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha \neq 0).$$

次に $\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは $(A-3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので，連立方程式を解くと

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\;]{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．これより自由度 2 となるので $x_2 = \beta \neq 0, x_3 = \gamma \neq 0$ とおくと，

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

♠ ケイリー・ハミルトンの定理 ♠

$\Phi_A(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_n$ のとき，

$$\Phi_A(A) = A^n + c_1 A^{n-1} + \cdots + c_n I$$

と定義すると次の定理を得ます．この定理は **ケイリー・ハミルトンの定理 (Cayley-Hamilton theorem)** とよばれています.

定理 3.5 (ケイリー・ハミルトンの定理) 任意の正方行列 A はその固有方程式 $\Phi_A(t)$ を満たす. つまり $\Phi_A(A) = \mathbf{0}$ である.

解 A を n 次の正方行列， $\Phi_A(t) = \det(A - tI) = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_n$ とする．$B(t)$ を $A - tI$ の余因子行列とすると， $B(t)$ の成分は $A - tI$ の余因子で，その多項式の次数は最高でも $n-1$ である．よって

$$B(t) = B_1 t^{n-1} + B_2 t^{n-2} + \cdots + B_n$$

と表せる．ただし， B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は n 次の正方行列．また余因子行列の性質より

$$(A - tI)B(t) = \Phi_A(t)I$$

または

$$(A - tI)(B_1 t^{n-1} + B_2 t^{n-2} + \cdots + B_n) = (t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_n)I.$$

これより

$$\begin{array}{rcl} -B_1 & = & I, \\ -B_2 + AB_1 & = & c_1 I, \\ \vdots & & \vdots \\ AB_n & = & c_n I \end{array}$$

を得る．両辺に上から順に $A^n, A^{n-1}, \ldots, I$ をかけて加えると

$$\mathbf{0} = A^n + c_1 A^{n-1} + \cdots + c_n I = \Phi_A(A). \blacksquare$$

♠ 固有空間 ♠

私たちの主題は正方行列 A を正則行列 P によって簡単な行列に変換すること，つまり A に相似な簡単な行列 $B = P^{-1}AP$ を見つけることでした．そのための準備として次のようなベクトル空間を考えます.

n 次の正方行列 A の固有値 λ に対する固有ベクトル全体と $\mathbf{0}$ ベクトルからなる集合

$$V(\lambda) = \{\mathbf{x} : (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

を， λ に対する**固有空間 (eigenspace)** といいます．これは $\mathbf{x}$ を未知ベクトルとする方程式

$$(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

の解ベクトルからつくられる解空間と同じです．よって定理 2.9 より

$$\dim V(\lambda)=n-\mathrm{rank}(A-\lambda I)$$

となります.

3.2.1 演習問題

1. $\mathcal{R}^2$ の基底 $\{\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$ から一般の基底 $\{\mathbf{w}_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\mathbf{w}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\}$ への変換行列 P を求めよ.
2. R^n の基底 $\{\mathbf{v}_i\}$ から $\{\mathbf{w}_i\}$ への変換行列 P は n 次の正則行列であることを示せ.
3. 次の行列の固有値と固有空間を求めよ.
(a) $\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}1&4&-4\\-1&-3&2\\0&2&-1\end{pmatrix}$
4. $A^2=A$ を満たす n 次の正方行列 A の固有値を求めよ.
5. 行列 A の固有値を $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ とすると， A^m の固有値は $\lambda_1^m,\lambda_2^m,..,\lambda_n^m$ であることを証明せよ.
6. $A=\begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix}$ とするとき，ケイリー・ハミルトンの定理をもちいて A^4,A^{-1} を求めよ.
7. X を 2 次の行列とするとき， $X^2-3X+2I=0$ を満たす X をすべて求めよ.

第4章　行列の対角化

4.1　行列の対角化

A に相似な行列 $P^{-1}AP$ の固有値はどうなっているのでしょう．

定理 4.1 相似な行列の固有多項式は同じであり，したがって固有値も同じである．

証明

$$\begin{aligned}\Phi_{P^{-1}AP}(t) &= |P^{-1}AP - tI| = |P^{-1}(A - tI)P| \\ &= |P^{-1}| \cdot |A - tI| \cdot |P| = |A - tI| = \Phi_A(t). \blacksquare\end{aligned}$$

第 2 章で対角行列について学びました．対角行列は対角成分以外の成分がすべて 0 の行列で，対角行列どうしの和も積も対角行列となり，非常に扱いやすい行列です．また明らかに対角行列の固有値は対角成分そのものなので，簡単に固有値を求めることができます．

もちろん私たちが扱う行列のほとんどは対角行列ではありません．しかし，$P^{-1}AP$ が対角行列になることがあります．このような P が存在するとき，A は **対角化可能 (diagonalizable)** であるといいます．そこで正方行列はどんなとき対角化が可能なのか調べてみました．

定理 4.2 n 次の正方行列 A について，次の条件は同値である．
(1) A は対角化可能である．
(2) A は n 個の *1* 次独立な固有ベクトルをもつ．
(3) A の相異なるすべての固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ とし，対応する固有空間を $V(\lambda_1)$, $V(\lambda_2), \ldots, V(\lambda_p)$ とすると，

$$n = \dim V(\lambda_1) + \dim V(\lambda_1) + \cdots + \dim V(\lambda_p)$$

である．

証明 (1) $\Rightarrow$ (2)
$P^{-1}AP$ が対角行列となるように適当な正則行列 P を選ぶと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる．このとき，$P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n)$ を左からかけると，

$$P(P^{-1}AP) = A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n) = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となり，

$$(A\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2, \ldots, A\mathbf{p}_n) = (\lambda_1\mathbf{p}_1, \lambda_2\mathbf{p}_2, \ldots, \lambda_n\mathbf{p}_n)$$

が得られる．両辺の各列ベクトルを比較することにより，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ は A の固有値であり，$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ はそれぞれ対応する固有ベクトルであることがわかる．また，P は正則であるから，定理 2.20 より $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ は 1 次独立である．

(2) ⇒ (3)

まず，$V(\lambda_1) + V(\lambda_2) + \cdots + V(\lambda_p)$ が直和であることを示す．そのためには

$$V(\lambda_i) \cap \{V(\lambda_1) + V(\lambda_2) + \cdots + V(\lambda_{i-1})\} = \{\mathbf{0}\} \ (i = 2, 3, \ldots, p)$$

であることを示せばよい (演習問題 4.1)．そこで，λ_j の固有ベクトルを

$$\mathbf{x}_j \quad (j = 1, 2, \ldots, i)$$

とおくと

$$\mathbf{x}_i \in V(\lambda_i) \cap \{V(\lambda_1) + V(\lambda_2) + \cdots + V(\lambda_{i-1})\}$$

より

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_{i-1}, \ \mathbf{x}_j \in V(\lambda_j) \ (j = 1, 2, \ldots, i)$$

となる．次に任意のスカラー λ, μ に対して，$(A - \lambda I) \cdot (A - \mu I) = (A - \mu I) \cdot (A - \lambda I)$ が成り立ち，また $(A - \lambda I)\mathbf{x}_j = A\mathbf{x}_j - \lambda\mathbf{x}_j = (\lambda_j - \lambda)\mathbf{x}_j$ であるから，

$$\begin{aligned} & (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_{i-1} I)\mathbf{x}_i \\ = \ & (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) \cdots (\lambda_i - \lambda_{i-1})\mathbf{x}_i = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

となり，$\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ が得られる．したがって，

$$V(\lambda_i) \cap \{V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_{i-1})\} = \{\mathbf{0}\}$$

である．

(3) ⇒ (1)

$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_q\}, \{\mathbf{p}_{q+1}, \mathbf{p}_{q+2}, \ldots, \mathbf{p}_r\}, \ldots, \{\mathbf{p}_{s+1}, \mathbf{p}_{s+2}, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ をそれぞれ

$$V(\lambda_1), V(\lambda_2), \ldots, V(\lambda_p)$$

内の 1 次独立なベクトルの組とするとき，

$$n = \dim V(\lambda_1) + \dim V(\lambda_2) + \cdots + \dim V(\lambda_p),$$

$$V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{\mathbf{0}\}\ (i \neq j).$$

よって

$$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_q, \mathbf{p}_{q+1}, \mathbf{p}_{q+2}, \ldots, \mathbf{p}_r, \ldots, \mathbf{p}_{s+1}, \mathbf{p}_{s+2}, \ldots, \mathbf{p}_n\}$$

は 1 次独立なベクトルの組である．そこで $P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n)$ とすると，

$$\begin{aligned} AP &= (A\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2, \ldots, A\mathbf{p}_n) = (\lambda\mathbf{p}_1, \lambda\mathbf{p}_2, \ldots, \lambda\mathbf{p}_n) \\ &= (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \vdots & \\ & \lambda_2 & & \vdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ & 0 & & \vdots & \lambda_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって $P^{-1}AP$ は対角行列になる． ■

この証明より A が対角化可能なら A の対角成分は A の固有値で構成され，その数は固有空間の次元に一致することがかわります.

例題 4.1 次の行列を対角化しよう.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解 例題 3.7 より， A の固有値は $\lambda = 2, -1$ であり，固有空間は

$$V(2) = \{\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\},\ V(-1) = \{\beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

よって固有ベクトルを列ベクトルにもつ行列を P とすると，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{となり},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を得る． ■

正方行列が対角化可能であるための必要十分条件は，それぞれの固有値に対する固有空間の次元と固有値の重複度が一致することでした．では一致しない場合はどんなことがいえるのでしょうか.

♠ 行列の三角化 ♠

正方行列 A に対して，適当な正則行列 P を選んで $P^{-1}AP$ が上三角行列となるとき， A は P によって**三角化 (triangular)** されるといいます.

n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ について， $A^* = (\bar{a_{ij}})^t = (\bar{a_{ji}})$ を A の **共役転置 (conjugate transpose)** といいます．また $A = A^*$ である行列を **エルミート行列 (Hermitian matrix)** といいます．なお， A が実行列のとき A^* は転置行列 A^t になり，エルミート行列と対称行列は同じものになります.

例題 4.2 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 1 \end{pmatrix}$ のとき，A^* を求めよう．

解 $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 1 \end{pmatrix}$．よって A はエルミート行列である．■

$U^*U=UU^*=I$ となる n 次の複素正方行列 U を **ユニタリ行列 (unitary matrix)** といいます．また，$A^tA=AA^t=I$ となる n 次の実正方行列 A を **直交行列 (orthogonal matrix)** といいます．これよりただちに U がユニタリ行列のとき $U^*=U^{-1}$，A が直交行列のとき $A^t=A^{-1}$ が得られます．

定理 4.3 n 次の正方行列 A の固有値を $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ とすると，A は適当なユニタリ行列 U により上三角行列

$$U^{-1}AU=U^*AU=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

に変換される．

証明 行列 A の次数 n について帰納法を用いる．$n=1$ のときは $A=(a_{11})$ 自身上三角行列である．$n-1$ 次の正方行列について定理が成り立つと仮定し，n 次の正方行列 A に対しても定理が成り立つことを示す．

A のひとつの固有値を λ_1，それに対する固有単位ベクトルを $\mathbf{u}_1$ とし，$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ を C^n の正規直交基底になるように選ぶ．すると演習問題 4.1 より

$$U_1=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n)$$

はユニタリ行列であり，

$$\begin{aligned} U_1^{-1}AU_1 &= U_1^{-1}(\lambda_1\mathbf{u}_1,A\mathbf{u}_2,\ldots,A\mathbf{u}_n) \\ &= (\lambda_1\mathbf{e}_1,U^{-1}A\mathbf{u}_2,\ldots,U^{-1}A\mathbf{u}_n) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．ここで B は $n-1$ 次の正方行列である．定理 4.1 より A と $U^{-1}AU$ は同じ固有値をもつから，B の固有値は A の λ_1 以外の $n-1$ 個の固有値 $\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n$ である．仮定より $n-1$ 次の

正方行列 B に対して $n-1$ 次のユニタリ行列 U_2 が存在し, $U_2^{-1}BU_2$ が上三角行列

$$U_2^{-1}BU_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

になる．このとき $U = U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$ とおくと, U はユニタリ行列であり,

$$\begin{aligned} U^{-1}AU &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}^{-1} U_1^{-1}AU_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & U_2^{-1}BU_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって $U^{-1}AU$ は定理に述べた形の上三角行列である． ■

例題 4.3 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の対角化は可能か．もし不可能なら三角化を行なおう．

解 $\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2$ より，固有値は 2 である．また

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，固有ベクトルは

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

よって，固有空間は $\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ となり， $\dim V(2) = 1 < 2$．したがって，定理 4.2 より対角化は不可能である．そこで三角化するために固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より固有単位ベクトル $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

を得，これより Gram-Schmidt の直交化を用いて正規直交基底を作ると $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ となる．そこで $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと， U は直交行列となり

$$U^{-1}AU = U^tAU = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．■

n 次の実正方行列 A が重複度をこめて n 個の実数の固有値をもつならば，いま行なった証明はそのまま実数の範囲で繰り返すことができます．この場合， U として直交行列を用いることができ次の定理を得ます.

定理 4.4 n 次の正方行列 A が n 個の実数の固有値をもつならば， A は適当な直交行列 P により上三角行列に変換される.

4.1.1　演習問題

1. 次の行列は対角化可能か．可能ならば適当な正則行列 P を求めて対角化せよ．もし不可能ならば三角化を行なえ.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. U, W がベクトル空間 V の部分空間であるとき， $U + W$ が直和であるための必要十分条件は $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ であることを証明せよ.

3. U, W が有限次元のとき,

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$$

が成り立つことを証明せよ.

4. 3 次元ベクトル空間 $\mathcal{R}^3$ において

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, W = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = x_3\}$$

とすると， $\mathcal{R}^3 = U \oplus W$ であることを証明せよ.

5. 直交行列の固有値 λ の絶対値はつねに 1 であることを証明せよ.

6. 正方行列 U の列ベクトルが正規直交基底をなすとき， U はユニタリ行列であることを証明せよ.

4.2　正規行列

4.1 節で正方行列の対角化について考えました．ここではユニタリ行列によって対角化可能な正方行列について考えます.

まず n 次の正方行列 A がユニタリ行列 U によって対角行列 $U^*AU = D$ に変換されたとします．ここで D は対角行列なのであきらかに $D^*D = DD^*$ が成り立ちます．また $A = UDU^*$ より

$$A^*A = (UD^*U^*)(UDU^*) = UDD^*U^*,$$

$$AA^* = (UDU^*)(UD^*U^*) = UDD^*U^*.$$

よって $A^*A = AA^*$ となります．つまり，ユニタリ行列によって対角行列に変換される正方行列 A は $AA^* = A^*A$ を満たすということです．そこでこのような行列を **正規行列 (normal matrix)** とよびます．

逆に， A が正規行列であるとすると，定理 4.3 より適当なユニタリ行列 U を用いて

$$U^{-1}AU = U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とできます．この上三角行列を S とすると，

$$S^* = U^*A^*U = \begin{pmatrix} \bar{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{b_{12}} & \bar{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{b_{1n}} & \bar{b_{2n}} & \cdots & \bar{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

となります．また $AA^* = A^*A$ より

$$S^*S = (U^*A^*U)(U^*AU) = U^*A^*AU = U^*AA^*U = (U^*AU)(U^*A^*U) = SS^*.$$

これを行列を用いて表すと

$$\begin{aligned} S^*S &= \begin{pmatrix} \bar{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{b_{12}} & \bar{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{b_{1n}} & \bar{b_{2n}} & \cdots & \bar{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{b_{12}} & \bar{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{b_{1n}} & \bar{b_{2n}} & \cdots & \bar{\lambda_n} \end{pmatrix} = SS^* \end{aligned}$$

となります．ここで両辺の対角成分を比較してみましょう．$(1,1)$ 成分を比較すると

$$\lambda_1\bar{\lambda_1} + b_{12}\bar{b_{12}} + \cdots + b_{1n}\bar{b_{1n}} = \bar{\lambda_1}\lambda_1$$

となり，これより

$$b_{12} = b_{13} = \cdots = b_{1n} = 0$$

を得ます．次に $(2,2)$ 成分を比較し， $b_{12}=0$ を用いると，

$$\lambda_2\bar{\lambda_2}+b_{23}\bar{b_{23}}+\cdots+b_{2n}\bar{b_{2n}}=\bar{\lambda_2}\lambda_2$$

となり，これより

$$b_{23}=b_{24}=\cdots=b_{2n}=0$$

を得ます．以下同様にして， $b_{ij}=0\ (i<j)$ が示せます．したがって $U^{-1}AU$ は対角行列となります．まとめると次の定理を得ます．

定理 4.5 n 次の正方行列 A について，次の条件は同値である．
(1) A はユニタリ行列により対角化可能である．
(2) A は正規行列である．

これで正規行列はユニタリ行列により対角化可能であることがわかりました．正規行列とはそれ自身の共役転置行列との積が可換な行列のことなので，エルミート行列，ユニタリ行列も正規行列です．

実ベクトル空間上での内積は 1 章で定義しましたが，同様なことが複素ベクトル空間上でも行なえます．

定義 4.1 複素ベクトル空間 V の任意のベクトル $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ に対して，実数 $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ が定まり，次の性質をもつとき， $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ を $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ の **内積 (inner product)** という．
ある複素ベクトル空間のすべてのベクトル $\mathbf{v},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ とすべての複素数 α,β に対して，
1. $(\alpha\mathbf{v}_1+\beta\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)=\alpha(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3)+\beta(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$
2. $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)=\overline{(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1)}$
3. $(\mathbf{v},\mathbf{v})\geq 0, (\mathbf{v},\mathbf{v})=0$ と $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ は同値.

例題 4.4 エルミート行列は正規行列であることを示し，固有値を求めよう．

解 A をエルミート行列とすると， $A=A^*$ より $AA^*=A^*A$．よって A は正規行列である．次に，λ を A の固有値とし， $\mathbf{a}$ を λ に対する A の固有ベクトルとすると定義 4.1 より

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{a},\mathbf{a}) &= (\lambda\mathbf{a},\mathbf{a})=(A\mathbf{a},\mathbf{a})=(\mathbf{a},\mathbf{A}^*\mathbf{a})\\ &= (\mathbf{a},A\mathbf{a})=(\mathbf{a},\lambda\mathbf{a})=\bar{\lambda}(\mathbf{a},\mathbf{a})\end{aligned}$$

となり， $\lambda=\bar{\lambda}$ が得られる．よって， λ は実数． ■

この例題からかわるように， A がエルミート行列のとき，ユニタリ行列 U で対角化された行列 $U^{-1}AU$ の対角成分は実数です．とくに A が実正方行列のとき，次の定理が成り立ちます．

定理 4.6 n 次の実正方行列 A について，次の条件は同値である．
(1) A は直交行列で対角化可能である．
(2) A は実対称行列である．

♠2 次形式 ♠

任意の n 次の実正方行列 A，ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$ が与えられたとき，

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{x}^t A \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + \cdots + a_{nn} x_n y_n \end{aligned}$$

を行列 A に関する**双 1 次形式 (bilinear form)** といいます.

また， A が n 次の実対称行列， $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ のとき，

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \cdots + a_{nn} x_n^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

を行列 A に関する **2 次形式 (quadratic form)** といいます.

例題 4.5 $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ を行列を用いて表そう.

解 $a_{11} = a_{22} = a_{12} = a_{21} = 1, a_{13} = a_{31} = 2, a_{23} = a_{32} = -2, a_{33} = 0$ であるから

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と表せる. ■

つぎに変数の変換を考えてみましょう. A が実対称行列ならば定理 4.6 より A は直交行列で対角化可能です. そこで直交行列 P を $P^{-1}AP$ が対角行列になるように選び， $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ とおくと

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \mathbf{y}^t (P^t A P) \mathbf{y} &= (y_1, \ldots, y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \end{aligned}$$

となります. これより次の定理を得ます.

定理 4.7 実 *2* 次形式 $\mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ は適当な直交変換 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ により標準形

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \mathbf{y}^t (P^t A P) \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

にできる. ただし， $\lambda_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ は A の固有値.

また，これより次のことがかわります.
(1) A の固有値がすべて正であるならば，すべての $\mathbf{x} \neq 0$ に対して，$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ である．このような 2 次形式を **正値 2 次形式 (positive definite)** といいます.
(2) A の固有値がすべて負であるならば，すべての $\mathbf{x} \neq 0$ に対して，$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} < 0$ である．このような 2 次形式を **負値 2 次形式 (negative definite)** といいます.

例題 4.6 実 *2* 次形式 $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_1$ を行列を用いて表し，正値 *2* 次形式か調べよう．また標準形を求めよう.

解 この 2 次形式の行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

である．$\Phi_A(t) = \det(A - tI) = -(t+1)^2(t-5)$ より， A の固有値は -1(重複度 2),5 であるから，この 2 次形式は正値ではない．また A は実対称行列なので直交行列 P によって対角化されるから，$\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ とおくと標準形

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$$

を得る． ■

例題 4.7 実 *2* 次形式 $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3 - 6x_3x_1$ を行列を用いて表し，標準形を求めよう.

解 この 2 次形式の行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

である．$\Phi_A(t) = \det(A - tI) = -t^3 + 14t^2 - 24t - 5$ より， A の固有値は簡単に求められない．そこで次のような固有値を求めず標準形を求める方法を考える.

もともと正則行列は基本行列の積なので，実際に対角化を行なう方法として基本変形を使う方法があった.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

より A は対称行列．そこでまず， R_2 と R_3 に $-2R_1+R_2, 3R_1+R_3$ を行ない，次に R_3 に $-2R_2+R_3$ を行なうと

$$\begin{aligned}[A:I] \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} = B.\end{aligned}$$

次に，行 R_2, R_3 に行なった基本操作と同じものを列 C_2, C_3 に行なうと

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ここで A は対角行列に変形された．そこで，$P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$
P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}
$$

となり

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}^t A \mathbf{x} &= \mathbf{y}^t (P^t A P) \mathbf{y} = \mathbf{y}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{y} \\
&= y_1^2 + y_2^2 - 5y_3^2. \blacksquare
\end{aligned}
$$

A が複素正方行列のときも同じようなことができます.

任意の n 次の複素正方行列 A，ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C^n$ が与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{x}^* A \mathbf{y} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, \ldots, \bar{x_n}) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \bar{x_i} y_j \\
&= a_{11} \bar{x_1} y_1 + a_{12} \bar{x_1} y_2 + \cdots + a_{nn} \bar{x_n} y_n
\end{aligned}
$$

を行列 A に関する**エルミート形式 (Hermitian form)** といいます.

また， A が n 次のエルミート行列で $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ のとき，

$$
\begin{aligned}
A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= \mathbf{x}^* A \mathbf{x} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, \ldots, \bar{x_n}) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= a_{11} \bar{x_1} x_1 + a_{22} \bar{x_2} x_2 + \cdots + a_{nn} \bar{x_n} x_n + 2 \sum_{i<j} a_{ij} \bar{x_i} x_j
\end{aligned}
$$

を行列 A に関する**複素 2 次形式 (complex quadratic form)** といいます．この場合 A はエルミート行列，つまり正規行列なので定理 4.5 より A はユニタリ行列で対角化可能です．そこでユニタリ行列 U を $U^{-1}AU$ が対角行列になるように選び，$\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^*A\mathbf{x} = \mathbf{y}^*(U^*AU)\mathbf{y} &= (\bar{y_1}, \ldots, \bar{y_n})\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1\bar{y_1}y_1 + \lambda_2\bar{y_2}y_2 + \cdots + \lambda_n\bar{y_n}y_n\end{aligned}$$

となります．これより次の定理を得ます．

定理 4.8 複素 *2* 次形式 $\mathbf{x}^*A\mathbf{x}$ は変数の適当なユニタリ行列による変換 $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ により標準形

$$\mathbf{x}^*A\mathbf{x} = \mathbf{y}^*(U^*AU)\mathbf{y} = \lambda_1\bar{y_1}y_1 + \lambda_2\bar{y_2}y_2 + \cdots + \lambda_n\bar{y_n}y_n$$

にできる．ただし，λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は A の固有値.

4.2.1　演習問題

1. 次の行列をユニタリ行列により対角行列に変換せよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列を直交行列により対角行列に変換せよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$ がユニタリ行列により対角行列に変換される条件を求めよ.

4. 次の 2 次形式を直交行列による変換により標準化せよ.

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2$$

5. 次のエルミート行列をユニタリ行列による変換により標準化せよ.

$$x_1\bar{x_1} + (1-i)x_1\bar{x_2} + (1+i)x_2\bar{x_1} + 2x_2\bar{x_2}$$

第5章　Jordan 標準形

5.1　ベキ零行列の標準形

♠ 広義固有空間 ♠

A を n 次正方行列とし，W を $\mathcal{C}^n$ の部分空間とします．W に属する任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して $A\mathbf{x} \in W$ となるとき，部分空間 W は **A - 不変 (A - invariant)** であるといいます．

行列 A の固有多項式を固有値の重複度でまとめて

$$\Phi_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2}\cdots(t-\lambda_r)^{n_r} \tag{5.1}$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \ (i \neq j),\ n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$$

と表します．ここで，固有値 $\lambda_i (1 \leq i \leq r)$ に対して

$$W(\lambda_i) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{C}^n : (A - \lambda_i I)^j \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

とおくと包含関係

$$V(\lambda_i) = W_1(\lambda_i) \subset W_2(\lambda_i) \subset W_3(\lambda_i) \subset \cdots$$

が成り立つ．次元を考えれば，これは無限には続かず

$$W_1(\lambda_i) \subset W_2(\lambda_i) \subset \cdots \subset W_l(\lambda_i) = W_{l+1}(\lambda_i) = \cdots$$

となります．このとき $W(\lambda_i) = W_l(\lambda_i)$ です．

定理 5.1 A を n 次の正方行列，その固有多項式を *(5.1)* とする．このとき広義固有空間 $W(\lambda_i)$ $(1 \leq i \leq r)$ に対して，次が成り立つ

(1)　$W(\lambda_i) \bigcap W(\lambda_j) = \mathbf{0}$ $(i \neq j)$

(2)　相異なる固有値に対する広義固有ベクトルは *1* 次独立

(3)　$\dim W(\lambda_i) = n_i$

証明 (1)　$i \neq j$ のとき，$W(\lambda_i) \bigcap W(\lambda_j) \ni \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ となるベクトル $\mathbf{x}$ が存在したとする．このとき

$$(A - \lambda_i I)^{k_1}\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ かつ } (A - \lambda_i)^{k_1+1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

を満たす 0 以上の整数 k_1 がある．$\mathbf{y} = (A - \lambda_i I)^{k_1}\mathbf{x}$ とおくと

$$(A - \lambda_i I)\mathbf{y} = \mathbf{0},\ \ W(\lambda_i) \bigcap W(\lambda_j) \ni \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$$

となる．$\mathbf{y} \in W(\lambda_j)$ より，$(A-\lambda_j I)^{k_2}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ となる整数 k_2 がある．しかし，$A\mathbf{y} = \lambda_i \mathbf{y}$ より $(A-\lambda_j I)^{k_2}\mathbf{y} = (\lambda_j I - \lambda_i I)^{k_2}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ となるが，$i \neq j$ のとき $\lambda_i \neq \lambda_j$ としたので，これは矛盾である．

(2) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ を A の相異なる固有値とする．$W(\lambda_i) \ni \mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$ $(1 \leq i \leq s)$ に対して

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_s\mathbf{x}_s = \mathbf{0} \text{ ならば } c_1 = c_2 = \cdots = c_s = 0$$

が成り立つことを帰納法を用いて示す．$s=1$ の場合は明らかなので

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_{s-1}\mathbf{x}_{s-1} = \mathbf{0} \text{ のとき } c_1 = c_2 = \cdots = c_{s-1} = 0$$

が成り立つと仮定する．条件より

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_s\mathbf{x}_s = \mathbf{0} \quad **$$

が成り立つので，$(A-\lambda_s I)^k\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ となる整数 k をとり，上の式 (**) の両辺に左からかけると

$$\begin{aligned} c_1(A-\lambda_s I)^k & \mathbf{x}_1 + \cdots + c_{s-1}(A-\lambda_s I)^k\mathbf{x}_{s-1} + c_s(A-\lambda_s I)^k\mathbf{x}_s \\ &= c_1(A-\lambda_s I)^k\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{s-1}(A-\lambda_s I)^k\mathbf{x}_{s-1} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$W(\lambda_i)$ は $(A-\lambda_s I)$ - 不変より，$(A-\lambda_s I)^k\mathbf{x}_i \in W(\lambda_i)$ となる．また，(1) より $i \neq s$ のとき $\mathbf{x}_i \notin W(\lambda_s)$．したがって，$(A-\lambda_s I)^k\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$ $(1 \leq i \leq s-1)$ となる．これより帰納法の仮定が使えて，$c_i = 0$ $(1 \leq i \leq s-1)$ を得る．よって，$c_s\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ となり，$c_s = 0$ を得る．

(3) (2) で示した 1 次独立性より

$$\dim W(\lambda_1) + \cdots + \dim W(\lambda_r) \leq n$$

が成り立つ．また，$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ なので，(3) を示すには $n_i \leq \dim W(\lambda_i)$ $(1 \leq i \leq r)$ をいえばよい．

行列 A は，定理 4.3 より，ユニタリ行列 U を用いて次の形に三角化できる．

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & * & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & 0 & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_r & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

いま，

$$V_i = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^n : x_i = 0 \ (n_1 + 1 \leq i \leq n) \right\}$$

とおくと，V_1 は $\mathcal{C}^n$ の n_1 次元部分空間になる．また，$B = U^{-1}AU$ の形より V_1 の任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して

$$(B - \lambda_1 I)^{n_1}\mathbf{x} = U^{-1}(A - \lambda_1 I)^{n_1}U\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

が成り立つ．ここで，U は正則なので

$$(A - \lambda_1 I)^{n_1}U\mathbf{x} - \mathbf{0}$$

となる．したがって，$V_2 = \{U\mathbf{x} : x \in V_1\}$ とおくと，V_2 は $W(\lambda_1)$ に含まれる n_1 次元の部分空間になり，不等式 $n_1 \leq \dim W(\lambda_1)$ を得る．固有値の順番を入れ替えて考えれば，$n_i \leq \dim W(\lambda_i)$ $(1 \leq i \leq r)$ が成り立つ． ■

定理 5.2 A を n 次の正方行列，その固有多項式を *(*)* とする．このとき A は適当な正則行列 P により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

の形に表される．ここで $A_i (1 \leq i \leq r)$ は n_i 次正方行列であり，その固有多項式は $\Phi_A(t) = (t - \lambda_i)^{n_i}$ である．

証明 $W(\lambda_i)$ から基底 $\mathbf{p}^i_1, \ldots, \mathbf{p}^i_{n_i}$ をとる．$W(\lambda_i)$ は A - 不変なので，

$$A\mathbf{p}^i_j = a^i_{1j}|bfp^i_1 + \cdots + a^i_{n_ij}\mathbf{p}^i_{n_i} \quad (1 \leq j \leq n_i)$$

と表せる．ここで $A_i = (a^i_{jk})$ とおくと，A_i は n_i 次正方行列である．定理 5.1 より

$$\{\mathbf{p}^1_1, \ldots, \mathbf{p}^1_{n_1}, \mathbf{p}^2_1, \ldots, \mathbf{p}^2_{n_2}, \ldots, \mathbf{p}^r_1, \ldots, \mathbf{p}^r_{n_r}\}$$

は $\mathcal{C}^n$ の基底となる．したがって，

$$P = (\mathbf{p}^1_1 \cdots \mathbf{p}^1_{n_1} \mathbf{p}^2_1 \cdots \mathbf{p}^2_{n_2} \cdots \mathbf{p}^r_1 \cdots \mathbf{p}^r_{n_r})$$

とおくと，P は正則行列となり

$$AP = P\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

を満たす．この式の両辺に P^{-1} を左からかければ求める式を得る．

この関係式を用いると

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= \Phi_{P^{-1}AP}(t) = (t - \lambda_1)^{n_1}(t - \lambda_2)^{n_2} \cdots (t - \lambda_r)^{n_r} \\ &= \Phi_{A_1}(t)\Phi_{A_2}(t) \cdots \Phi_{A_r}(t) \end{aligned}$$

となる．したがって，A_i の固有値が λ_i だけであることを示せば

$$\Phi_{A_i}(t) = (t - \lambda_i)^{n_i}$$

が示される．A_i が $\lambda_i(j \neq i)$ を固有値として持ち，λ_i に対する固有ベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

が取れたとする．すなわち，$A_i\mathbf{x} = \lambda_j\mathbf{x}$ とする．このとき

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n_1 + \cdots + n_{i-1} \\ \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} n_i \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n_{i+1} + \cdots + n_r \end{matrix}$$

とおくと，$\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ で $P^{-1}AP\bar{\mathbf{x}} = \lambda_j\bar{\mathbf{x}}$ を満たす．したがって，

$$\mathbf{0} \neq P\bar{\mathbf{x}} = x_1\mathbf{p}_1^i + \cdots + x_{n_i}\mathbf{p}_{n_i}^i \in W(\lambda_i)$$

は $AP\bar{\mathbf{x}} = \lambda_j P\bar{\mathbf{x}}$，つまり，$(A - \lambda_j I)P\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ を満たす．しかし，これは $P\bar{\mathbf{x}} \in W(\lambda_j)$ を意味し，定理 5.1 に矛盾する．　■

5.2　Jordan 標準形

♠Jordan ブロック ♠

　次の形をした k 次正方行列を，複素数 α に対する k 次の **Jordan ブロック　(Jordan block)** または **Jordan 細胞**いう．

$$J(\alpha, k) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & 1 \\ & 0 & & & \alpha \end{pmatrix}$$

例題 5.1　次の *Jordan* ブロックを表そう．$J(5,1), J(6,2), J(5,3)$

解

$$j(5,1) = (5), J(6,2) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, J(5,3) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

いくつかの Jordan ブロックを対角線に沿って並べて得られる行列

$$J = \begin{pmatrix} J(\alpha_1, k_1) & & & \\ & J(\alpha_2, k_2) & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & J(\alpha_i, k_i) \end{pmatrix}$$

を **Jordan 行列 (Jordan form)** といいます.

♠ ベキ零行列の標準形 ♠

任意の n 次正方行列 A は適当な正則行列 P をとり $P^{-1}AP$ を Jordan 行列にできるでしょうか. まず, A がベキ零行列の場合を考えてみましょう.

行列 N をベキ零行列とすると, ベキ零行列の定義より $N^{k-1} \neq 0, N^k = 0$ となる整数 k が存在します. ここで

$$W_j = W_j(0) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{C}^n : N^j\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

とおき, 部分空間の列

$$V(0) = W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_k = \mathcal{C}^n$$

を考えます. ここで

$$\begin{aligned} g_i &= \dim W_i \quad (1 \leq i \leq k) \\ h_k &= g_k - g_{k-1}, h_k + h_{k+1} = g_{k-1} - g_{k-2} \\ h_k &+ h_{k-1} + h_{k-2} = g_{k-2} - g_{k-3}, \ldots, \end{aligned}$$

とおきます. $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{h_k}$ を W_k に属する 1 次独立なベクトルで

$$< \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{h_k} > \bigcap W_{k-1} = \mathbf{0}$$

を満たすものとします. このとき次の kh_k 個のベクトル

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1, N\mathbf{x}_1, \ldots, N^{k-1}\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2, N\mathbf{x}_2, \ldots, N^{k-1}\mathbf{x}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{x}_{h_k}, N\mathbf{x}_{h_k}, \ldots, N^{k-1}\mathbf{x}_{h_k} \end{cases} \qquad *$$

は 1 次独立になります. なぜならば, これらのベクトルの 1 次結合を $\mathbf{0}$ とおくと

$$\sum_{i=1}^{h_k} c_i^0 \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{h_k} c_i^1 N\mathbf{x}_i + \cdots + \sum_{i=1}^{h_k} c_i^{h_k} N^{k-1}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

この式の両辺に左から $N^[k-1]$ をかけると, 第 2 項以下の和は 0 となり

$$\sum_{i=1}^{h_k} c_i^0 N^{k-1}\mathbf{x}_i = N^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{h_k} c_i^0 \mathbf{x}_i\right) = \mathbf{0}$$

を得ます．したがって，$\sum_{i=1}^{h_k} c_i^0 \mathbf{x}_i \in W_{k-1}$ となりますが，仮定

$$< \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{h_k} > \bigcap W_{k-1} = \mathbf{0}$$

より $c_1^0 = \cdots = c_{h_k} = 0$ でなければなりません．以下同様にこの手続きを繰り返せば，$c_i^j = 0$ $(i = 1, \ldots, h_k, j = 0, \ldots, k-1)$ を得ます．

次に，以下の条件を満たすベクトル $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{h_{k-1}}$ を考えます．

(1)　$\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{h_{k-1}} \in W_{k-1}$

(2)　$N\mathbf{x}_1, \ldots, N\mathbf{x}_{h_k}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{h_{k-1}}$ は 1 次独立

(3)　$< N\mathbf{x}_1, \ldots, N\mathbf{x}_{h_k}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{h_{k-1}} > \bigcap W_{k-2} = \{\mathbf{0}\}$

このとき次の h_{k-1} 個のベクトルと (*) のベクトルを合わせたものも 1 次独立となります．

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{y}_1, N\mathbf{y}_1, \ldots, N^{k-1}\mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2, N\mathbf{y}_2, \ldots, N^{k-1}\mathbf{y}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{y}_{h_{k-1}}, N\mathbf{y}_{h_{k-1}}, \ldots, N^{k-1}\mathbf{y}_{h_{k-1}} \end{array}\right. \qquad **$$

同様に，以下の条件を満たすベクトル $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{h_{k-2}}$ を考えます．

(1)　$\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{h_{k-2}} \in W_{k-1}$

(2)　$N^2\mathbf{x}_1, \ldots, N^2\mathbf{x}_{h_k}, N\mathbf{y}_1, \ldots, N\mathbf{y}_{h_{k-1}}, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{h_{k-2}}$ は 1 次独立

(3)　$< N^2\mathbf{x}_1, \ldots, N^2\mathbf{x}_{h_k}, N\mathbf{y}_1, \ldots, N\mathbf{y}_{h_k}, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{h_{k-2}} > \bigcap W_{k-3} = \{\mathbf{0}\}$

以下この議論を繰り返すことができ，最終的に次のベクトル全体は $\mathcal{C}^n$ の基底になります．

$$W_k \left\{\begin{array}{ll} & \qquad \mathbf{x}_1, \ldots, \ \mathbf{x}_{h_k} \\ W_{k-1} & \left\{\begin{array}{l} N\mathbf{x}_1, \ldots, \ N\mathbf{x}_{h_k}, \ \mathbf{y}_1, \ldots, \ \mathbf{y}_{h_{k-1}} \\ N^2\mathbf{x}_1, \ldots, N^2\mathbf{x}_{h_k}, N\mathbf{y}_1, \ldots, N\mathbf{y}_{h_{k-1}}, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{h_{k-2}} \\ N^3\mathbf{x}_1, \ldots, N^3\mathbf{x}_{h_k}, N^2\mathbf{y}_1, \ldots, N^2\mathbf{y}_{h_{k-1}}, N\mathbf{z}_1, \ldots, N\mathbf{z}_{h_{k-2}}, \ldots, \\ \cdots \\ N^{k-1}\mathbf{x}_1, .., N^{k-1}\mathbf{x}_{h_k}, N^{k-2}\mathbf{y}_1, .., N^{k-2}\mathbf{y}_{h_{k-1}}, N^{k-3}\mathbf{z}_1, .., N^{k-3}\mathbf{z}_{h_{k-2}}, .. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

そして，各部分空間

$$\begin{array}{l} < N^{k-1}\mathbf{x}_1, N^{k-2}\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_1 >, \ldots, < N^{k-h_k}\mathbf{x}_{h_k}, N^{k-2}\mathbf{x}_{h_k}, \ldots, \mathbf{x}_{h_k} >, \\ < N^{k-2}\mathbf{y}_1, N^{k-3}\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_1 >, \ldots, < N^{k-2}\mathbf{y}_{h_{k-1}}, N^{k-3}\mathbf{y}_{h_{k-1}}, \ldots, \mathbf{y}_{h_{k-1}} >, \\ < N^{k-3}\mathbf{z}_1, N^{k-4}\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_1 >, \ldots, < N^{k-3}\mathbf{z}_{h_{k-2}}, N^{k-4}\mathbf{z}_{h_{k-2}}, \ldots, \mathbf{z}_{h_{k-2}} >, \\ \cdots \end{array}$$

は N-不変となります．そこで，(n,k) 行列 $(N^{k-1}\mathbf{x}_1, N^{k-2}\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_1)$ に N を左からかけると

$$N(N^{k-1}\mathbf{x}_1, N^{k-2}\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_1) = (N^{k-1}\mathbf{x}_1, N^{k-2}\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_1)J(0,k)$$

が成り立ちます．他の部分空間についても同様なので，

$$\begin{array}{rcl} P & = & (N^{k-1}\mathbf{x}_1 \ N^{k-2}\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_1 \cdots N^{k-1}\mathbf{x}_{h_k} \ N^{k-2}\mathbf{x}_{h_k} \ \cdots \ \mathbf{x}_{h_k} \\ & & N^{k-2}\mathbf{y}_1 \ N^{k-3}\mathbf{y}_1 \ \cdots \ \mathbf{y}_1 \cdots \ N^{k-2}\mathbf{y}_{h_{k-1}} \ N^{k-3}\mathbf{y}_{h_{k-1}} \ \cdots \ \mathbf{y}_{h_{k-1}} \cdots) \end{array}$$

とおくと，P は正則行列になり

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J(0,k_1) & & 0 & \\ & J(0,k_2) & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & J(0,k_l) \end{pmatrix}$$

を得ることができます．このようにしてできた Jordan 行列を N の **Jordan 標準形 (Jordan canonical form)** いいます．ここまでをまとめると次の定理を得ます．

定理 5.3 N を n 次の正方行列とする．このとき適当な正則行列 P により

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J(0,k_1) & & 0 & \\ & J(0,k_2) & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & J(0,k_l) \end{pmatrix}$$

の形に表される．ここで $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_l$ である．

例題 5.2 次のベキ零行列の Jordan 標準形を求めよう．

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 N は $N^2 = 0$ を満たすので，指数 2 のベキ零行列である．よって，N の固有値は 0 だけであり，固有値 0 に対する広義固有空間 W_j を考える．

$$W_j = \{\mathbf{x} : N^j\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

より，$W_1 \subset W_2 = \mathcal{R}^3$ である．

$$W_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : y - z = 0\}$$

であるから，$\dim W_1 = 2$．そこで，例えば，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとると $\mathbf{x} \in W_2$，

$$N\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$$

である．W_1 は 2 次元であるから $N\mathbf{x}$ と 1 次独立なベクトル $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_1$ がとれる．このとき $\{\mathbf{x}, N\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ は $\mathcal{R}^3$ の基底である．

$$P = (N\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(0,2) & 0 \\ 0 & J(0,1) \end{pmatrix}$$

となる．

♠Jordan 標準形 ♠

定理 5.4 A を n 次の正方行列，その固有多項式を

$$\Phi_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2}\cdots(t-\lambda_r)^{n_r}$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \ (i \neq j),\ n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$$

とする．このとき適当な正則行列 P により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, k_1) & & 0 & \\ & J(\lambda_2, k_2) & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & J(\lambda_r, k_l) \end{pmatrix}$$

の形に表される．ここで $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_l$ である．

証明 固有値 λ_i の広義固有空間 $W(\lambda_i)$ に対して，部分空間の列

$$W_1(\lambda_1) \subset W_2(\lambda_2) \subset \cdots \subset W_k(\lambda_i) = W_{k+1}(\lambda_{i+1}) + \cdots \tag{5.2}$$

を考える．ここで

$$\begin{aligned} W_j(\lambda_i) &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{C}^n : (A-\lambda_i I)^j \mathbf{x} = \mathbf{0}\} \\ W(\lambda_i) &= W_k(\lambda_i) \end{aligned}$$

である．$W(\lambda_i)$ は $\mathcal{C}^n$ の A-不変および $(A-\lambda_i I)$-不変な部分空間になる．よって，定理 5.3 の議論を行列 $A-\lambda_i I$ と部分空間の列 (5.2) に対して適用できる．$W(\lambda_i)$ の基底

$$\{\mathbf{p}_1^i, \mathbf{p}_2^i, \ldots, \mathbf{p}_{n_i}^i\}$$

で，それを並べて得られる (n, n_i) 行列

$$P_i = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2^i\ \cdots\ \mathbf{p}_{n_i}^i)$$

が

$$(A-\lambda_i I)P_i = P_i \begin{pmatrix} J(0,k_1^i) & & & \\ & J(0,k_2^i) & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & J(0,k_{l_i}^i) \end{pmatrix}$$

ただし，$n_i = k_1^i + k_2^i + \cdots + k_{l_i}^i$ の形になるものを選ぶことができる．ここで，$\lambda_i I P_i = \lambda_i P_i$ を右辺に移項すると

$$\begin{aligned} AP_i &= \lambda_i P_i + P_i \begin{pmatrix} J(0,k_1^i) & & & \\ & J(0,k_2^i) & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & J(0,k_{l_i}^i) \end{pmatrix} \\ &= P-i \begin{pmatrix} J(\lambda_i,k_1^i) & & & \\ & J(\lambda_i,k_2^i) & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & J(\lambda_i,k_{l_i}^i) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．さらに，

$$P = (\mathbf{p}_1^1 \cdots \mathbf{p}_{n_1}^1 \mathbf{p}_1^2 \cdots \mathbf{p}_{n_2}^2 \cdots \mathbf{p}_1^r \cdots \mathbf{p}_{n_r}^r$$

とおくと，P は正則行列となり

$$AP = P \begin{pmatrix} J(\lambda_1,k_1^1) & & & \\ & J(\lambda_2,k_2^2) & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & J(\lambda_r,k_{l_r}^r) \end{pmatrix}$$

を満たす．この両辺の左から P^{-1} をかけると，求める Jordan 行列 $J = P^{-1}AP$ を得る． ■

例題 5.3 次の行列の *Jordan* 標準形を求めよう．また変換行列 P も求めよう．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

解 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を求めると

$$\Phi_A(\lambda) = A - \lambda I)\mathbf{x} = (1-\lambda)^3 = 0$$

より A の固有値は 1 だけである．よって，$(A-I)$ はベキ零行列なるので，例題 5.2 より，

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J(1,2)&0\\0&J(1,1)\end{pmatrix}$$

(2)　$A=\begin{pmatrix}4&-3&3\\-1&3&-2\\-3&4&-3\end{pmatrix}$ の固有値を求めると

$$\Phi_A(\lambda)=A-\lambda I)\mathbf{x}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)=0$$

より A の固有値は 1 と 2 である．固有値 1 に対して

$$(A-1I)=\begin{pmatrix}3&-3&3\\-1&2&-2\\-3&4&-4\end{pmatrix}\neq 0,(A-1I)^2=\begin{pmatrix}3&-3&3\\-1&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

であるから

$$W_1(1)\subset W_2(1)=W(2)$$

$$\dim W_1(1)=1,\dim W_2(1)=2$$

となる．そこで

$$W_1(1)=\{\mathbf{x}:(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

より，

$$W_1(1)=<\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}>$$

$$W_2(1)=\{\mathbf{x}:(A-I)^2\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

より

$$W_2(1)=<\mathbf{x},(A-I)\mathbf{x}>=<\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}>$$

と表せる．

　次に，固有値 2 に対して

$$W_1(2)=(A-2I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

を求めると

$$W_1(2) = W(2) =< \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} >$$

となる．そこで $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとる．

$$P = (\mathbf{x}\ A\mathbf{x}\ \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となり，これが A の Jordan 標準形である．

5.2.1 演習問題

1. 次のベキ零行列の標準形と変換行列 P を求めよう．

$$(a)\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (b)\ \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列の Jordan 標準形と変換行列 P を求めよう．

$$(a)\ \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

付 録A　問題解答

第 1 章

演習問題 1.2.1

1.

(a) 対応する成分どうしを加える:

$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(2,-1,3)+(-1,1,4)=(2-1,-1+1,3+4)=(1,0,7).$

(b) それぞれの成分のスカラー倍:

$3\mathbf{B}=3(-1,1,4)=(-3,3,12).$

(c) $\|\mathbf{A}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ より

$\|\mathbf{A}\|=\|(2,-1,3)\|=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14}.$

(d) 最初にスカラー倍その後ベクトル和:

$3\mathbf{B}-2\mathbf{A}=3(-1,1,4)-2(2,-1,3)=(-3,3,12)-(4,-2,6)=(-7,5,6).$

2.

(a) $\mathbf{B}-\mathbf{A}=(3,0,1)-(-2,-1,3)=(5,1,-2)=5\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}.$

(b) $3\mathbf{A}+\mathbf{B}=3(-2,-1,3)+(3,0,1)=(-6,-3,9)+(3,0,1)=(-3,-3,10)$
$=-3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+10\mathbf{k}.$

(c) $3\mathbf{B}-2\mathbf{A}=3(3,0,1)-2(-2,-1,3)=(9,0,3)+(4,2,-6)=13\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}.$

(d) $\dfrac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{2}=\dfrac{(-2,-1,3)+(3,0,1)}{2}=\dfrac{(1,-1,4)}{2}=\dfrac{\mathbf{i}}{2}-\dfrac{\mathbf{j}}{2}+2\mathbf{k}.$

3. 幾何ベクトルは空間のベクトルと同一視できるので演習問題 1-2-1.5 を参照.

4. 幾何ベクトルは空間のベクトルと同一視できるので演習問題 1-2-1.5 を参照.

5. $\mathbf{A}=(a_1,a_2,a_3),\ \mathbf{B}=(b_1,b_2,b_3),\ \mathbf{C}=(c_1,c_2,c_3)\in R^3$ とすると,

(1)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}+\mathbf{B} &= (a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)\\ &= (a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)\in R^3.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}+\mathbf{B} &= (a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)\\ &= (b_1+a_1,b_2+a_2,b_3+a_3)\\ &= \mathbf{B}+\mathbf{A}.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} &= (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)+(c_1,c_2,c_3)\\ &= ((a_1+b_1)+c_1, (a_2+b_2)+c_2, (a_3+b_3)+c_3)\\ &= (a_1+(b_1+c_1), a_2+(b_2+c_2), a_3+(b_3+c_3))\\ &= (a_1,a_2,a_3)+(b_1+c_1, b_2+c_2, b_3+c_3)\\ &= \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}).\end{aligned}$$

(4)

$$\mathbf{0} = (0,0,0) \text{ とすると } \mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}.$$

(5)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^* &= (-a_1,-a_2,-a_3) \text{ とすると}\\ \mathbf{A}+\mathbf{A}^* &= (a_1+(-a_1), a_2+(-a_2), a_3+(-a_3))\\ &= (0,0,0)=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

(6)

$$\alpha\mathbf{A} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) \in R^3.$$

(7)

$$\begin{aligned}\alpha(\beta\mathbf{A}) &= \alpha(\beta a_1, \beta a_2, \beta a_3)\\ &= (\alpha\beta a_1, \alpha\beta a_2, \alpha\beta a_3)\\ &= \alpha\beta(a_1,a_2,a_3)\\ &= \alpha\beta(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\mathbf{A} &= (\alpha+\beta)(a_1,a_2,a_3)\\ &= ((\alpha+\beta)a_1, (\alpha+\beta)a_2, (\alpha+\beta)a_3)\\ &= (\alpha a_1+\beta a_1, \alpha a_2+\beta a_2, \alpha a_3+\beta a_3)\\ &= (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)+(\beta a_1, \beta a_2, \beta a_3)\\ &= \alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B}.\end{aligned}$$

(9)

$$
\begin{aligned}
1\mathbf{A} &= 1(a_1, a_2, a_3) \\
&= (1a_1, 1a_2, 1a_3) = (a_1, a_2, a_3) = \mathbf{A}, \\
0\mathbf{A} &= 0(a_1, a_2, a_3) \\
&= (0a_1, 0a_2, 0a_3) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}, \\
\alpha\mathbf{0} &= \alpha(0, 0, 0) \\
&= (\alpha 0, \alpha 0, \alpha 0) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

6. $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{B}\|$ のとき $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を 2 辺とするひし形の対角線ベクトル．よって $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の作る角を 2 等分するベクトル．$\|\mathbf{A}\| \neq \|\mathbf{B}\|$ のときは， $\mathbf{B}$ をスカラー倍して，$\|\mathbf{A}\| = \|\alpha\mathbf{B}\|$ とすると， $\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$ は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の作る角を 2 等分するベクトルとなる．**7.**

$$
\begin{aligned}
x(1,1,1)+y(1,1,0)+z(1,0,0) &= (x,x,x)+(y,y,0)+(z,0,0) \\
&= (x+y+z, x+y, x) = (2,-2,4)
\end{aligned}
$$

より $x+y+z=2,\ x+y=-2, x=4$．この式を後ろから順に解くと $x=4, y=-7, z=5$.

演習問題 1.4.1

1.

(a) $\|\mathbf{B}\| = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})^{1/2} = (2^2+4^2+(-3)^2)^{1/2} = \sqrt{29}$.

(b) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (-1,3,1)\cdot(2,4,-3) = -2+12-3 = 7$.

(c) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|\cos\theta$ より

$$
\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|} = \frac{7}{\sqrt{(-1)^2+3^2+1}\sqrt{2^2+4^2+(-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{11}\sqrt{29}}.
$$

よって $\theta = \cos^{-1}(\frac{7}{\sqrt{309}})$.

(d) 単位ベクトルはそれ自身をその大きさで割ることで得られるから

$$
\frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|} = \frac{(-1,3,1)}{\sqrt{11}}.
$$

2. 直交系とは互いのベクトルが直交している集合.

正規直交系とはそれぞれが単位ベクトルで直交系をなしているもの.

(a) $(1,3)\cdot(6,-2) = 6-6 = 0$ より $(1,3) \perp (6,-2)$.

また正規直交系に直すと $\{\frac{(1,3)}{\sqrt{10}}, \frac{(6,-2)}{2\sqrt{10}}\}$.

(b)

$$
(1,2,2)\cdot(-2,2,-1) = -2+4-2 = 0,
$$

$$
(1,2,2)\cdot(2,1,-2) = 2+2-4 = 0,
$$

$$
(-2,2,-1)\cdot(2,1,-2) = -4+2+2 = 0.
$$

よって $(1,2,2)\perp(-2,2,-1)$, $(1,2,2)\perp(2,1,-2)$, $(-2,2-1)\perp(2,1,-2)$. また正規直交系に直すと $\{\frac{(1,2,2)}{3},\frac{(-2,2,-1)}{3},\frac{(2,1,-2)}{3}\}$.
(c) $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}\cdot 2\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}-\frac{1}{3}\mathbf{k}=2+1-1\neq 0$ より 直交系でない.
3. 平面上に任意の点 (x,y,z) をとり，点 $(5,-1,3)$ を始点とし点 (x,y,z) を終点とするベクトルを考える．このベクトル $(x-5,y+1,z-3)$ は求める平面上にあるので，法ベクトル $(2,1,-1)$ と直交する．よってその内積は零である．これより

$$\begin{aligned}(x-5,y+1,z-3)\cdot(2,1,-1) &= 2(x-5)+y+1-(z-3)\\ &= 2x+y-z-6=0.\end{aligned}$$

4. すべての θ において，$|\cos\theta|\leq 1$ より

$$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|=\|\mathbf{A}\|\ \|\mathbf{B}\||\cos\theta|\leq\|\mathbf{A}\|\ \|\mathbf{B}\|.$$

5.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|^2 &= \|\mathbf{A}-\mathbf{C}+\mathbf{C}-\mathbf{B}\|^2\\ &= (\mathbf{A}-\mathbf{C}+\mathbf{C}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{C}+\mathbf{C}-\mathbf{B})\\ &= (\mathbf{A}-\mathbf{C})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{C})+2(\mathbf{A}-\mathbf{C})\cdot(\mathbf{C}-\mathbf{B})\\ &+ (\mathbf{C}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}-\mathbf{B})\\ &= \|\mathbf{A}-\mathbf{C}\|^2+2\|\mathbf{A}-\mathbf{C}\|\ \|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|\cos\theta+\|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|^2\\ &\underbrace{\leq}_{\mathbf{4}\text{ より}} \|\mathbf{A}-\mathbf{C}\|^2+2\|\mathbf{A}-\mathbf{C}\|\ \|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|+\|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|^2\\ &= (\|\mathbf{A}-\mathbf{C}\|+\|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|)^2.\end{aligned}$$

よって

$$\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|\leq\|\mathbf{A}-\mathbf{C}\|+\|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|.$$

6.

$$\begin{aligned}0\leq\|(f-\lambda g)\|^2 &= (f-\lambda g,f-\lambda g)\\ &= \|f\|^2-2\lambda(f,g)+\lambda^2\|g\|^2.\end{aligned}$$

これは λ についての 2 次式で 0 より大きいので，その判別式 Δ は 0 以下になる．よって

$$\Delta=|(f,g)|^2-\|f\|^2\ \|g\|^2\leq 0.$$

これより

$$|(f,g)|\leq\|f\|\ \|g\|.$$

7. (a) $\|f\|=\{\int_0^2 x^2dx\}^{1/2}=\{\frac{x^3}{3}|_0^2\}^{1/2}=\sqrt{\frac{8}{3}}$.
(b)

$$\begin{aligned}\|f\| &= \{\int_0^2[\sin\pi x]^2dx\}^{1/2}=\{\int_0^2\frac{1-\cos 2\pi x}{2}dx\}^{1/2}\\ &= \{\frac{x}{2}-\frac{\sin 2\pi x}{4\pi}|_0^2\}^{1/2}=1.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\|f\| &= \{\int_0^2 [\cos \pi x]^2 dx\}^{1/2} = \{\int_0^2 \frac{1+\cos 2\pi x}{2} dx\}^{1/2} \\ &= \{\frac{x}{2} + \frac{\sin 2\pi x}{4\pi} |_0^2\}^{1/2} = 1.\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}(P_0, P_1) &= \int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \ |_{-1}^1 = 0. \\ (P_0, P_2) &= \int_{-1}^1 \frac{3x^2-1}{2} dx = \frac{x^3-x}{2} \ |_{-1}^1 = 0. \\ (P_1, P_2) &= \int_{-1}^1 x\frac{3x^2-1}{2} dx = \frac{3x^4}{8} - \frac{x^2}{4} \ |_{-1}^1 = 0.\end{aligned}$$

演習問題 1.6.1

1.

(a)

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (1, 2, -3) \times (2, -1, 1) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{matrix} \\ &= (2-3, -6-1, -1-4) = (-1, -7, -5).\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (4, 2, 2) \times (-1, -7, -5) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 2 & 2 \\ -1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ -7 & -5 & -1 & -7 \end{matrix} \\ &= (-10+14, -2+20, -28+2) = (4, 18, -26).\end{aligned}$$

(c) $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (4, 2, 2) \cdot (-1, -7, -5) = -4 - 14 - 10 = -28.$
または

$$\begin{aligned}\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (4, 2, 2) \cdot ((1, 2, -3) \times (2, -1, 1)) \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -28.\end{aligned}$$

2. $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ と $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ によって作られる平面を Γ とすると，Γ の法ベクトル $\mathbf{n}_\Gamma$ は $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ と $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ に直交する．よって

$$\mathbf{n}_\Gamma = (1, 1, -1) \times (2, 3, 2) = \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{matrix} = (5, -4, 1).$$

次に，求める平面は Γ に平行なので $\mathbf{n}_\Gamma$ は求める平面に対しても法ベクトルとなる．そこで求める平面上に任意の点 (x,y,z) をとると $(x-1,y,z-1)$ は $\mathbf{n}_\Gamma$ と直交する．よって求める平面の方程式は

$$\mathbf{n}_\Gamma\cdot(x-1,y,z-1)=(5,-4,1)\cdot(x-1,y,z-1)=5x-4y+z-6=0.$$

3. 求める平面 Γ は平面 $x-2y+3z-4=0$ に垂直であるから平面 $x-2y+3z-4=0$ の法ベクトル $\mathbf{n}=(1,-2,3)$ は求める平面上にあると考えることができる．また求める平面は 2 点 $(2,0,-1),(3,2,1)$ を通るのでこの 2 点を結ぶベクトルを作ると $(3-2,2-0,1+1)=(1,2,2)$ となり，このベクトルも求める平面上にあることがかわる．そこでこのふたつのベクトルの外積をとると求める平面 Γ の法ベクトル

$$\mathbf{n}_\Gamma=(1,-2,3)\times(1,2,2)=\begin{vmatrix}-2&3&1&-2\\2&2&1&2\end{vmatrix}=(-10,1,4)$$

が得られる．ここで平面 Γ 上に任意の点 (x,y,z) をとり $(2,0,-1)$ と結ぶと $(x-2,y,z+1)$ は $\mathbf{n}_\Gamma$ と直交する．よって求める平面の方程式は

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_\Gamma\cdot(x-2,y,z+1)&=(-10,1,4)\cdot(x-2,y,z+1)\\&=-10x+y+4z+24=0.\end{aligned}$$

4. 三角形の面積は $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ を 2 辺とする平行四辺形の半分であるから，

$$\frac{1}{2}\|(1,3,-1)\times(2,1,1)\|=\frac{1}{2}\|(4,-3,-5)\|=\frac{1}{2}\sqrt{16+9+25}=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

5. $m=\mathbf{r}\times\mathbf{F}=(-2,1,-1)\times(1,3,1)=(4,1,-7).$

6. $\mathbf{v}=(1,2,2)\times(1,-2,3)=(10,-1,-4).$

7. $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ の作る面の面積は $\|\mathbf{B}\times\mathbf{C}\|$．また $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ と $\mathbf{A}$ の間の角を θ とすると，$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ の作る平行六面体の高さは $\|\mathbf{A}\|\cos\theta$．よって $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ の作る平行六面体の面積は

$$\|\mathbf{B}\times\mathbf{C}\|\ \|\mathbf{A}\|\cos\theta=\|\mathbf{A}\|\cos\theta\ \|\mathbf{B}\times\mathbf{C}\|=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}).$$

8. それ自身の外積は $\mathbf{0}$，かける順序を変えると符号が反対になることに注意．

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B}&=(2\mathbf{e}_1+5\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3)\times(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2-4\mathbf{e}_3)\\&=(2\mathbf{e}_1+5\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3)\times\mathbf{e}_1-(2\mathbf{e}_1+5\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3)\times2\mathbf{e}_2\\&-4(2\mathbf{e}_1+5\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3)\times\mathbf{e}_3\\&=5(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1)-(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)-4(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)+2(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2)\\&-8(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3)-20(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)\\&=5(\mathbf{j}-\mathbf{i})+\mathbf{j}+\mathbf{k}-(\mathbf{i}-\mathbf{j})-2(\mathbf{i}+\mathbf{k})-8(\mathbf{j}+\mathbf{k})-20(\mathbf{i}+\mathbf{k})\\&=-36\mathbf{i}-\mathbf{j}-29\mathbf{k}.\end{aligned}$$

9. スカラー 3 重積を用いて調べる．

$$\begin{aligned}(4,-3,1)\cdot((10,-3,0)\times(2,-6,3))&=\begin{vmatrix}4&-3&1\\10&-3&0\\2&-6&3\end{vmatrix}\\&=4(-9)+3(30)+(-54)=0.\end{aligned}$$

よって定理 1.4 より 1 次従属.

10. (a) $c_1 + c_2x + c_3x^2 = 0$ とおき, x について 2 回微分すると

$$c_2 + 2c_3x = 0,\ 2c_3 = 0$$

となる. これより $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ を得るので $\{1, x, x^2\}$ は 1 次独立.

(b) $c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0$ とおき, x について 1 回微分すると

$$c_1 \cos x - c_2 \sin x = 0.$$

この連立方程式を解くと, $c_1 = 0, c_2 = 0$ となるので 1 次独立.

11. $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が 1 次独立ならば, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ を示す. (対偶を用いて $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ のとき $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が 1 次従属であることを示す.)

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ とすると $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は平行. つまり $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{B}$ となるある $\lambda \neq 0$ が存在. 書き直すと

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B} = 0$$

となり $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ は 1 次従属.

次に $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ ならば, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が 1 次独立を示す. (対偶を用いて $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が 1 次従属のとき, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ を示す.)

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が 1 次従属ならば, 0 でない c_1 または c_2 に対して,

$$c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

となり $\mathbf{A} = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{B}$. つまり $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は平行. したがって, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

演習問題 1.8.1

1. w_1, w_2 を W の元とすると, $w_1 = (x_1, y_1, 1), w_2 = (x_2, y_2, 1)$ と表せる. 部分空間になるためには和とスカラー倍が閉じていれば良いのでまず和を調べてみる. $w_1 + w_2 = (x_1, y_1, 1) + (x_2, y_2, 1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2)$ となり z 成分が 1 でないので $w_1 + w_2$ は W の元でない. よって R^3 の部分空間でない

2. $w_1, w_2 \in W$ とすると,

$$w_1 = (x_1, y_1, -3x_1 + 2y_1), w_2 = (x_2, y_2, -3x_2 + 2y_2)$$

とあらわせる. よって

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= (x_1, y_1, -3x_1 + 2y_1) + (x_2, y_2, -3x_2 + 2y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, -3(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2)) \in W. \end{aligned}$$

また

$$\alpha w_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1, -3\alpha x_1 + 2\alpha y_1) \in W.$$

したがって, W は R^3 の部分空間である.

3. W の任意のベクトルを w とすると，$w=(x,y,-3x+2y)$. w を $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ を用いて表すと，

$$\begin{aligned} w=(x,y,-3x+2y) &= x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(-3x+2y)\mathbf{k} \\ &= x\mathbf{i}-3x\mathbf{k}+y\mathbf{j}+2y\mathbf{k} \\ &= x(\mathbf{i}-3\mathbf{k})+y(\mathbf{j}+2\mathbf{k}) \end{aligned}$$

よって W に含まれるすべてのベクトルは，**i - 3k** と **j + 2k** の 1 次結合．また **i - 3k** と **j + 2k** は互いに 1 次独立なので，**i - 3k** と **j + 2k** は W の基底となる．よって $\dim W=2$.

4. $c_1(\mathbf{i}+\mathbf{j})+c_2\mathbf{k}+c_3(\mathbf{i}+\mathbf{k})=\mathbf{0}$ とおくと，

$$(c_1+c_3)\mathbf{i}+c_1\mathbf{j}+(c_2+c_3)\mathbf{k}=\mathbf{0}.$$

よって $c_1=c_2=c_3=0$. つまり 1 次独立.

次に $(a_1,a_2,a_3)\in R^3$ のとき

$$(a_1,a_2,a_3)=a_2(\mathbf{i}+\mathbf{j})+(a_3+a_2-a_1)\mathbf{k}+(a_1-a_2)(\mathbf{i}+\mathbf{k})$$

より $\langle\mathbf{i}+\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{i}+\mathbf{k}\rangle=R^3$.

5. $\{3,x-2,x+3,x^2+1\}$ で生成される部分空間を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \langle 3,x-2,x+3,x^2+1\rangle \\ &= \{3c_1+c_2(x-2)+c_3(x+3)+c_4(x^2+1):c_i \text{ 実数 }\} \end{aligned}$$

ここで V の元を v とすると

$$\begin{aligned} v &= 3c_1+c_2(x-2)+c_3(x+3)+c_4(x^2+1) \\ &= (3c_1-2c_2+3c_3+c_4)+(c_2+c_3)x+c_4x^2. \end{aligned}$$

演習問題 1.3 で $\{1,x,x^2\}$ は 1 次独立であることを示したので，$\{1,x,x^2\}$ は V の基底となる．よって $\dim V=3$.

6.

$$\mathbf{v}_1=\frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}.$$

次に

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2-(\mathbf{x}_2,\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 &= (0,1,1)-((0,1,1)\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}})\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} \\ &= (0,1,1)-\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}) \\ &= \frac{1}{3}(-2,1,1) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \frac{\mathbf{x}_2-(\mathbf{x}_2,\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{x}_2-(\mathbf{x}_2,\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1\|} \\ &= \frac{\frac{1}{3}(-2,1,1)}{\|\frac{1}{3}(-2,1,1)\|} \\ &= \frac{\frac{1}{3}(-2,1,1)}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1). \end{aligned}$$

最後に

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_3-(\mathbf{x}_3,\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1-(\mathbf{x}_3,\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 &= (0,0,1)-((0,0,1)\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}})\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} \\
&- ((0,0,1)\cdot\frac{(-2,1,1)}{\sqrt{6}})\frac{(-2,1,1)}{\sqrt{6}} \\
&= (0,0,1)-\frac{(1,1,1)}{3}-\frac{(-2,1,1)}{6} \\
&= (0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(0,-1,1)
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= \frac{\mathbf{x}_3-(\mathbf{x}_3,\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1-(\mathbf{x}_3,\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{x}_3-(\mathbf{x}_3,\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1-(\mathbf{x}_3,\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2\|} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(0,-1,1)}{\|\frac{1}{2}(0,-1,1)\|}=\frac{\frac{1}{2}(0,-1,1)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1).
\end{aligned}$$

よって求める正規直交系は

$$\{\mathbf{v}_1=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}},\mathbf{v}_2=\frac{(-2,1,1)}{\sqrt{6}},\mathbf{v}_3=\frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}\}.$$

7. $U+W, U\cap W$ は例題 1.21 より V の部分空間である．そこで,

$$\dim U=n, \dim W=m, \dim(U\cap W)=r \text{ とおき,}$$

$\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}$ を $U\cap W$ の基底,
$\{v_1,v_2,\ldots,v_r,u_1,\ldots,u_{n-r}\}$ を U の基底,
$\{v_1,v_2,\ldots,v_r,w_1,\ldots,w_{m-r}\}$ を W の基底とする．このとき,

$$\{v_1,\ldots,v_r,u_1,\ldots,u_{n-r},w_1,\ldots,w_{m-r}\}$$

が $U+W$ の基底をなすことを示せば

$$\dim(U+W)=r+n-r+m-r=n+m-r$$

となり,

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

となることがわかる．そこで

$c_1v_1+\cdots+c_rv_r+c_1^*u_1+\cdots+c_{n-r}^*u_{n-r}+c_1^{**}w_1+\cdots+c_{m-r}^{**}w_{m-r}=0$ とおくと,

$$c_1v_1+\cdots+c_rv_r+c_1^*u_1+\cdots+c_{n-r}^*u_{n-r}=-(c_1^{**}w_1+\cdots+c_{m-r}^{**}w_{m-r}).$$

ところが左辺は U の元であり，右辺は W の元であることから共に $U\cap W$ に含まれる．よって $\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}$ の 1 次結合で表される．つまり

$$c_1^*u_1+\cdots+c_{n-r}^*u_{n-r}=d_1v_1+\ldots+d_rv_r$$

$$c_1^{**}w_1 + \cdots + c_{m-r}^{**}w_{m-r} = e_1v_1 + \ldots + e_rv_r$$

これより $c_1^* = \cdots = c_{n-r}^* = 0,\ c_1^{**} = \cdots = c_{m-r}^{**} = 0$ となり，$c_1 = \cdots = c_r = 0$ を得る．したがって，

$$\{v_1, v_2, \ldots, u_1, \ldots, u_{n-r}, w_1, \ldots, w_{m-r}\}$$

は 1 次独立．なお $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_{n-r}\}$ は U を張り，
$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{m-r}\}$ が W を張るので，

$$\{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_{n-r}, w_1, \ldots, w_{m-r}\}$$

が $U + W$ を張るのは明らかである．

8. $(a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33}), (a_{41}, a_{42}, a_{43})$ を 4 個の 3 次元空間のベクトルとする．線形結合をとり $\mathbf{0}$ とおくと

$$c_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}) + c_2(a_{21}, a_{22}, a_{23}) + c_3(a_{31}, a_{32}, a_{33}) + c_4(a_{41}, a_{42}, a_{43}) = \mathbf{0}$$

成分を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} c_1a_{11} + c_2a_{21} + c_3a_{31} + c_4a_{41} &= 0 \\ c_1a_{12} + c_2a_{22} + c_3a_{32} + c_4a_{42} &= 0 \\ c_1a_{13} + c_2a_{23} + c_3a_{33} + c_4a_{43} &= 0 \end{aligned}$$

この方程式は 3 つの式に 4 つの未知数をもっているので，解 c_1, c_2, c_3, c_4 はすべて 0 の必要はない．つまり

$$\{(a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33}), (a_{41}, a_{42}, a_{43})\}$$

は 1 次従属.

第 2 章

演習問題 2.2.1

1.

(a) 行列の和は対応する成分の和:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -3+2 \\ 4+3 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) スカラー倍はそれぞれの成分のスカラー倍:

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+3 & -6-6 \\ 8-9 & 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) 行列の積は対応する行と列の内積:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-9 & 4-0 \\ -4+6 & 8+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$
$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3(2)+1(3)+7(4) & 3(-3)+1(6)+7(1) \\ 5(2)+2(3)-4(4) & 5(-3)+2(6)-4(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 4 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}. \\ BA &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(3)-3(5) & 2(1)-3(2) & 2(7)-3(-4) \\ 3(3)+6(5) & 3(1)+6(2) & 3(7)+6(-4) \\ 4(3)+1(5) & 4(1)+1(2) & 4(7)+1(-4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9 & -4 & 26 \\ 39 & 15 & -3 \\ 17 & 6 & 24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} & A^2 - 5A + 6I = (A-2I)(A-3I) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. A と B が対称行列ということは，$A^t = A, B^t = B$ が成り立つということである．また，$A+B$ が対称行列であることを示すには $(A+B)^t = A+B$ が成り立つことを示せばよい．

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B.$$

5. n 次の対称行列 A, B において $(AB)^t = B^t A^t = BA$ はいつも成り立つ．そこで AB が対称行列になるためには $AB = BA$ でなければならないことがかわる．また，一般に行列の積には交換法則が成り立たないので AB は必ずしも BA と等しくない．そこで AB はいつも対称行列かという質問に対する答はたぶん No であろう．実際，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと A, B とも

に対称行列であるが,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

より，$(AB)^t \neq AB$. つまり AB は対称行列でない.

次に AB がいつも対称行列になるための必要十分条件を求める.

n 次の対称行列 A, B において $(AB)^t = B^tA^t = BA$ がいつも成り立つので，AB が対称行列になるための必要十分条件は $AB = BA$ であることを示す．まず AB を対称行列とすると $(AB)^t = AB$ より $AB = BA$ が成り立つ.

次に $AB = BA$ とすると，$(AB)^t = B^tA^t = BA$ より $(AB)^t = AB$．よって AB は対称行列.

6. $(A^2)^t = (A\ A)^t = A^t\ A^t = (-A)(-A) = A^2$.

7. 行列 $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$ との積が交換可能な行列をB $= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ とおくと，$AB = BA$ より

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & a_1b_{13} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & a_2b_{23} \\ a_3b_{31} & a_3b_{32} & a_3b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & a_3b_{13} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & a_3b_{23} \\ a_1b_{31} & a_2b_{32} & a_3b_{33} \end{pmatrix}.$$

これより対応する成分は等しいので

$$a_1b_{12} = a_2b_{12}, a_1b_{13} = a_3b_{13},$$

$$a_2b_{21} = a_1b_{21}, a_2b_{23} = a_3b_{23},$$

$$a_3b_{31} = a_1b_{31}, a_3b_{32} = a_2b_{32}$$

となる．ここで $a_1, a_2.a_3$ は異なる実数であることに注意すると

$$b_{12} = b_{13} = b_{21} = b_{23} = b_{31} = b_{32} = 0$$

を得る．よって求める行列 B は

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

となり対角行列である.

8. $(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$．よって $A - A^t$ は交代行列である．また $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$．よって $A + A^t$ は対称行列である．ここで

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

とおくと A は対称行列と交代行列の和であることがかわる．つぎに B が対称行列，C が交代行列で $A=B+C$ が成り立つとすると

$$A^t = B^t + C^t = B - C.$$

よって $A+A^t=2B,\ A-A^t=2C$ となり

$$B=\frac{A+A^t}{2},\ C=\frac{A-A^t}{2}.$$

9.

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 2 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

より

$$AB=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & 5 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

演習問題 2.4.1

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{-2R_1+R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-3R_1+R_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 6 & -7 & 6 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{3}R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 6 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-6R_2+R_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\frac{4}{3}R_3+R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{2R_2+R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.

(a)

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -2 \\ -3 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}
&\xrightarrow{\frac{1}{2}\times R_1}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -3 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{3R_1+R_2}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -7 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\frac{2}{7}\times R_3}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

よって rank $= 2$.

(b)

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}
\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{-2\times R_1+R_2}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 9 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}
\xrightarrow{-3\times R_1+R_3}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & -10 & 18 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{-\frac{1}{5}\times R_2+R_3}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} \\ 0 & -10 & 18 \end{pmatrix}
\xrightarrow{-\frac{1}{5}\times R_2+R_3}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

よって rank $= 2$.

(c) 演習問題 2-4-1.1 より rank $= 3$.

3. 基本行列は基本変形を単位行列に施すことにより求まる．

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{-R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{-1\times R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = II, \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{-3\times R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = III, \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{-R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = IV.
\end{aligned}
$$

次に，単位行列を行列 A と基本行列の積で表すには，行列 A に基本行列 I, II, III, IV を左から順にかければよい．よって，

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

4. $PA = I$ を満たす行列の積 P は次のようにして求めることができる．

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-2R_1+R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-3R_1+R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{-1}{7}\times R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \overset{4R_2+R_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{-4}{7} & \frac{-13}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{4}\times R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{-13}{28} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \overset{R_3+R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{7} & \frac{-5}{28} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{-13}{28} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\overset{3R_3+R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{-3}{7} & \frac{-11}{28} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{7} & \frac{-5}{28} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{-13}{28} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \overset{-2R_2+R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{-1}{28} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{7} & \frac{-5}{28} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{-13}{28} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

これより

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{1}{28} & \frac{1}{4} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{5}{28} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{13}{28} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -8 & -5 & 7 \\ -4 & -13 & 7 \end{pmatrix}.$$

5. 定理 2.6 より行空間の次元はその行列の階数と等しいので， $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ を行ベクトルとする行列の階数を求めればよい．

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-1\times R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ -4R_1+R_3 \\ 2R_1+R_4}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{-3R_2+R_3 \\ -2R_2+R_4}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって $\dim = 3$.

演習問題 2.6.1

1.

(a)

$$
\begin{aligned}
[A:\mathbf{b}] &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3\times R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\frac{1}{4}\times R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\times R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
[A:\mathbf{b}] &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{-R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-R_3+R_2 \\ -R_3+R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{-R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
[A:\mathbf{b}] &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 15 & 5 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{-3R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\substack{-2R_3+R_2 \\ -R_3+R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ここで $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A:\mathbf{b}])$ なので方程式は解をもつ．また $[A:\mathbf{b}]_R$ を方程式に書き直すと

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = & 1 \\ x_2 - 3x_4 = & -1 \\ x_3 + 3x_4 = & 1 \end{cases}$$

ここで自由度 = 4 - 3 = 1 より $x_4 = \alpha$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつための必要十分条件は $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A:\mathbf{b}])$.

$$\begin{aligned} [A:\mathbf{b}] &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 9 \\ 5 & 2 & 7 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[-5R_1+R_3]{-3R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -4 & -12 \\ 0 & -8 & -8 & k-35 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{4}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -8 & k-35 \end{pmatrix} \xrightarrow{8R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k-11 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{-2R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k-11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここで $\mathrm{rank}(A) = 2$ より $\mathrm{rank}([A:\mathbf{b}])$ も 2 でなければならない．言い換えると $k-11$ が 0 でなければこの連立方程式は解をもたない．よって $k = 11$．さらに $k = 11$ のとき，$x_1 + x_3 = 1, x_2 + x_3 = 3$ であるから，$x_3 = \alpha$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. A が n 次の正則行列 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n \Leftrightarrow A_R = I_n$.

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-2R_1+R_2 \\ R_1+R_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-1R_2 \\ 3R_2+R_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-2R_3+R_2 \\ -3R_3+R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -9 & 16 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって A は正則で $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 \\ -7 & 12 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

(b)

$$\begin{aligned} [A : I] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{R_1 \leftrightarrow R_4 \\ R_2 \leftrightarrow R_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって A は正則で $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. A は n 次の正則行列 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n$. よってこの場合 $\mathrm{rank}(A) = 3$ となるように a を定めれば

よい．

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & a \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \leftrightarrow R_3}]{\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\substack{-R_1+R_3}]{-5R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & \frac{23}{2} \\ 0 & -1 & a+\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{23}{6} \\ 0 & -1 & a+\frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{23}{6} \\ 0 & 0 & a+\frac{32}{6} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ここで $\mathrm{rank}(A)=3$ となるには $a+\dfrac{32}{6}\neq 0$ となならなければならない．よって $a\neq -\dfrac{16}{3}$.

5. A を基本行列の積で表すには，単位行列から始めて基本変形を繰り返しながら A を作る．このとき用いた基本変形から生まれる基本行列を単位行列に左側から順にかけていけば，基本行列の積で A を表せる．

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{-3R_1+R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{-3}{2}R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\frac{2}{5}R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{5}R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{-1}{2}R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

よって A は正則行列．次に，いま行なった基本変形を逆に戻し，その基本変形から生まれる基本行列を順にかけていくと

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

6. $A = \begin{pmatrix} * & & * \\ & * & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ とすると，すべての行列 X に対して，

$$AX = \begin{pmatrix} * & & * \\ & * & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ & \ddots & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & & * \\ & * & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \neq I_n$$

となり A は正則でない．

別解 A を n 次の正方行列とする．A のひとつの行の成分がすべて 0 ならば，A_R の少なくともひとつの行の成分はすべて 0 である．よって $\mathrm{rank}(A) \neq n$ となり定理 2.11 より A は正則でない．

7.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

より AB は正則．また $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ となる．

演習問題 2.8.1

1.

(a) 第 2 行についての余因子展開を行なうと，

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{2+3}(2) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -(-3+1) - 2(-2+3) = 0. \end{aligned}$$

(b) 第 1 行についての余因子展開を行なうと，

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -4 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & -4 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & -4 \end{vmatrix} + 0 \\ &+(-5) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 2\underbrace{\{(3) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 0 + (-4) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\}}_{\text{第 3 列についての余因子展開}} \\ &+(-4)\underbrace{\{(3) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\}}_{\text{第 3 列についての余因子展開}} \end{aligned}$$

$$+(-5)\{\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{第 1 行についての余因子展開}}\}$$

$= 2\{3(-17) - 4(-4)\} + -4\{3(-13) - 4(4)\}$

$+(-5)\{-17 + 2(-13) - (-3)\}$

$= 2(-35) - 4(-55) - 5(-40) = 350.$

(c)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \quad sgn(4,2,5,1,3)1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = -sgn(1,2,5,4,3) = sgn(1,2,3,4,5) = +1$$

2.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & b^2-a^2 & (c+a)^2-(b+c)^2 \\ 0 & c^2-a^2 & (a+b)^2-(b+c)^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & (b+a)(b-a) & (a-b)(a+b+2c) \\ 0 & (c-a)(c+a) & (a-c)(a+2b+c) \end{vmatrix}$

$\overset{\text{定理 2.14}}{=} (a-b)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & -(a+b) & (a+b+2c) \\ 0 & c+a & -(a+2b+c) \end{vmatrix}$

$\overset{R_2+R_3}{=} (a-b)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & -(a+b) & (a+b+2c) \\ 0 & c-b & c-b \end{vmatrix}$

$= (a-b)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & -(a+b) & (a+b+2c) \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\overset{R_2\leftrightarrow R_3}{=} -(a-b)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -(a+b) & (a+b+2c) \end{vmatrix}$

$\overset{(a+b)R_2+R_3}{=} (a-b)(c-a)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(a+b+c) \end{vmatrix}$

$= 2(a-b)(c-a)(b-c)(a+b+c).$

(b)

列を用いた因数分解を行なう．

$$\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ a & c+a & c \\ a & b & a+b \end{vmatrix} \overset{-L_2+L_1}{=} \begin{vmatrix} c & b & c \\ -c & c+a & c \\ a-b & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$\overset{-L_3+L_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ -2c & c+a & c \\ -2b & b & a+b \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ c & c+a & c \\ b & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$\overset{-L_1+L_3}{=} -2 \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ c & c+a & 0 \\ b & b & a \end{vmatrix} = -2\{-b(ca)+c(cb-bc)\} = 4abc.$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 1 \\ 2 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2+R_1 \\ R_3+R_1}}{=} \begin{vmatrix} 5-x & 5-x & 5-x \\ 2 & 2-x & 1 \\ 2 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{2.14}{=} (5-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2-x & 1 \\ 2 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ -2R_1+R_3}}{=} (5-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & -1 \\ 0 & -1 & -x \end{vmatrix}$$

$$= (5-x)(x^2-1) = 0$$

よって，　$x = -1, 1, 5.$

4. ベクトル $(x-a_1, y-a_2)$ と (b_1-a_1, b_2-a_2) は平行．したがって，その外積は 0.

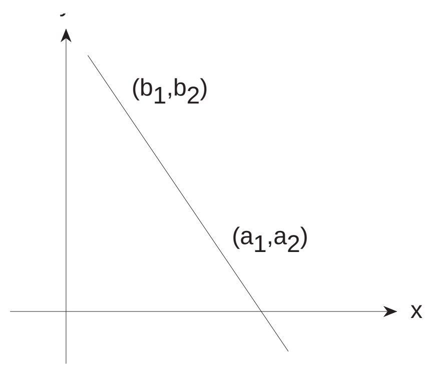

図 A.1: 2 点を通る直線

つまり

$$(x-a_1, y-a_2)\times(b_1-a_1, b_2-a_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x-a_1 & y-a_2 & 0 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

また

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x-a_1 & y-a_2 & 0 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

より

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. 法線ベクトル $\mathbf{N} = (b_1-a_1, b_2-a_2.b_3-a_3)\times(c_1-a_1, c_2-a_2.c_3-a_3)$ と平面上のベクトル $(x-a_1, y-a_2, z-a_3)$ は直交するのでその内積は 0. よってスカラー 3 重積

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 & 0 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

6. $|A| \neq 0$ とすると逆行列 A^{-1} が存在し，$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ より

$$A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{0} \Rightarrow (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = 0.$$

よって $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

7.

(a)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{4} = -2.$$

(b)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1.$$

第 3 章

演習問題 3.2.1

1. $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in R^3$ のとき,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}), \\ T(\alpha\mathbf{v}) &= \alpha T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

が成り立つか調べる.

$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in R^3$ とすると，$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ と表せる．ここで

$$\begin{aligned} T_1[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}] &= T_1 \begin{pmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ x_3 + x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + x_3' \\ x_1 + x_1' + x_2 + x_2' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3' \\ x_1' + x_2' \end{pmatrix} \\ &= T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + T_1 \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また

$$
\begin{aligned}
T_1(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) &= T_1 \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_3 \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \alpha T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

したがって，T_1 は線形写像.

次に T_2 について調べる．$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$$
T_2(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = T_2 \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 1 \\ 2\alpha + 3\alpha \end{pmatrix}.
$$

また

$$
\begin{aligned}
T_2(\alpha\mathbf{v}) + T_2(\beta\mathbf{w}) &= T_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} + T_2 \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha + 1 \\ 2\alpha + 3\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta + 1 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 2 \\ 2\alpha + 3\alpha \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

よって $T_2(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) \neq T_2(\alpha\mathbf{v}) + T_2(\beta\mathbf{w})$ となるので T_2 は線形写像ではない.

2. $\mathbf{v} \in V$ とすると，$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ は V の基底より

$$
\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n
$$

と一意的に表せる．ここで $\mathbf{v}$ の T による像 $T(\mathbf{v})$ は R^n の元になるので

$$
T(\mathbf{v}) = \beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n
$$

とおくことができる．しかし，$T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{e}_i$ より

$$
T(\mathbf{v}_i) = \beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_i.
$$

よって $i = 1, 2, \ldots, n$ において $\alpha_i = 0$ ならば $\beta_i = 0$．また $\alpha_i = 1$ ならば $\beta_i = 1$ となるので $\alpha_i = \beta_i$ となる．よって

$$
T(\mathbf{v}) = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n.
$$

次に T が線形写像であることを示す.

$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ とすると，

$$
\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n,
$$

$$\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{w}_n.$$

これより，

$$\begin{aligned} T(\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w}) &= T(\alpha\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha\alpha_n\mathbf{v}_n + \beta\beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta\beta_n\mathbf{v}_n) \\ &= T((\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)\mathbf{v}_n) \\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)\mathbf{e}_n \\ &= (\alpha\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha\alpha_n\mathbf{e}_n) + (\beta\beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta\beta_n\mathbf{e}_n) \\ &= \alpha(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n) + \beta(\beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n) \\ &= \alpha T(\mathbf{v}) + \beta T(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

よって，T は線形写像となる．

3. $(a) \Rightarrow (b)$

T が同型写像なら定理 3.1 より同型写像 $S = T^{-1}$ が存在し，$T \circ S = 1$.

$(b) \Rightarrow (a)$

$T(S(x)) = T(S(y))$ とおくと $T \circ S = 1$ より $S(x) = S(y)$ となるので $x = y$．また $x = y$ より $S(x) = S(y)$．よって T は単射．次に T が 全射であることを示す．$T \circ S = 1$ より $y \in R^n$ に対して $z \in R^n$ が存在し $y = T(S(z))$．また S は R^n から R^n への写像よりある $x \in R^n$ に対して $x = S(z)$．よって $y = T(x)$.

4. $\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$ より $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \ker(T)$ とすると，$T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}, T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$ となる．よって任意の実数 α, β に対して，$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 \in \ker(T)$ が成り立つことを示せばよい．つまり，$T(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$ を示せばよい．さて，

$$T(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \alpha T(\mathbf{v}_1) + \beta T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$$

となるので，$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 \in \ker(T)$ となり，$\ker(T)$ は部分空間である．

次に $Im(T) = \{\mathbf{w} \in W : \mathbf{w} = T(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in V\}$ より $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in Im(T)$ とすると，$T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$ となる．よって任意の実数 α, β に対して，$\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 \in Im(T)$ となることを示せばよい．つまり $T(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2$ となるような $\mathbf{v} \in V$ が存在することを示せばよい．さて，V はベクトル空間なので，$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 \in V$．また

$$T(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \alpha T(\mathbf{v}_1) + \beta T(\mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2$$

となるので $\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 \in Im(T)$ となり，$Im(T)$ は部分空間である．

5. $m(T)$ を T の行列表示とすると，

$$m(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

また定理 3.2 より，$\dim R^3 = \dim\ker(T) + \dim Im(T)$ が成り立ち，$\dim Im(T) = \mathrm{rank}(T)$ より，$\dim\ker(T) = 3 - \mathrm{rank}(A) = 0$.

演習問題 3.4.1

1.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2, \\
\mathbf{w}_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2.
\end{aligned}
$$

よって変換行列 P は

$$
P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
$$

2. $\mathbf{w}_j = p_{1j}\mathbf{v}_1 + \cdots + p_{nj}\mathbf{v}_n$ とおくと $P = (p_{ij})$ は $\{\mathbf{v}_i\}$ から $\{\mathbf{w}_j\}$ への変換行列．また $\mathbf{v}_j = q_{1j}\mathbf{w}_1 + \cdots + q_{nj}\mathbf{w}_n$ とおくと $Q = (q_{ij})$ は $\{\mathbf{w}_i\}$ から $\{\mathbf{v}_j\}$ への変換行列で

$$
\begin{aligned}
PQ &= \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_{11}q_{11} + \cdots + p_{1n}q_{n1} & \cdots & p_{11}q_{1n} + \cdots + p_{1n}q_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1}q_{11} + \cdots + p_{nn}q_{n1} & \cdots & p_{n1}q_{1n} + \cdots + p_{nn}q_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

3.

(a)

$$
\Phi_A(t) = |A - tI| = \begin{vmatrix} 3-t & -1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 4 = 0.
$$

よって A の固有値は $\lambda = 2$ である．

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので，連立方程式を解くと

$$
A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

となる．よって

$$
\mathbf{x} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (\alpha \neq 0).
$$

これより固有空間は

$$
V(2) = \{\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.
$$

(b)

$$\Phi_A(t) = |A - tI| = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & -1 \\ 0 & 2 & 4-t \end{vmatrix} = (2-t)(t^2-5t+6) = 0.$$

よって A の固有値は $\lambda = 2, 3$ である．

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $(A-2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので，連立方程式を解くと

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\alpha \neq 0).$$

次に $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは $(A-3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので，連立方程式を解くと

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ (\beta \neq 0).$$

これより固有空間は

$$V(2) = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}, V(3) = \{\beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

(c)

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= |A - tI| = \begin{vmatrix} 1-t & 4 & -4 \\ -1 & -3-t & 2 \\ 0 & 2 & -1-t \end{vmatrix} \\ &= (1-t)(t^2+4t-1) + (-4t+4) = (1-t)(t^2+4t+3) \\ &= (1-t)(t+1)(t+3). \end{aligned}$$

よって A の固有値は $\lambda = -3, -1, 1$ である．

$\lambda = -3$ に対する固有ベクトルは $(A+3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので，連立方程式を解くと

$$A + 3I = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (\alpha \neq 0).$$

$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは $(A+I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので，連立方程式を解くと

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (\beta \neq 0).$$

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので，連立方程式を解くと

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (\gamma \neq 0).$$

これより固有空間は

$$V(-3) = \{\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, V(-1) = \{\beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, V(1) = \{\gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

4. λ を A の固有値とすると

$$\lambda\mathbf{x} = A\mathbf{x} = A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A(\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}.$$

よって $\lambda = \lambda^2$ が成り立ち，これより $\lambda = 0, 1$ となる．

5. A の固有値を λ_i とすると， $A\mathbf{x} = \lambda_i\mathbf{x}$ より，

$$A^m\mathbf{x} = A^{m-1}(A\mathbf{x}) = A^{m-1}(\lambda_i\mathbf{x}) = \cdots = \lambda_i^m\mathbf{x}.$$

6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\Phi_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 4 = 0.$$

よってケイリー・ハミルトンの定理より

$$\Phi_A(A) = A^2 - 4A + 4I = 0.$$

ここで $A^4 = (A^2 - 4A + 4I)(A^2 + 4A + 12I) + 32A - 48I$ と表せるので,

$$\begin{aligned} A^4 &= 32A - 48I = 32\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 48\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 96 & 32 \\ -32 & 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 32 \\ -32 & -16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また, $A^2 - 4A + 4I = 0$ より $A - 4I + 4A^{-1} = 0$. よって

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{4}(4I - A) = \frac{1}{4}(\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}) \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. まず, $X^2 - 3X + 2I = 0$ より $(X - I)(X - 2I) = 0$. よって $X = I$ または $X = 2I$ はこの 2 次方程式を満たす. 次に $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると, ケイリー・ハミルトンの定理より $\Phi_X(X) = 0$ となるので, 固有方程式が $\Phi_x(t) = t^2 - 3t + 2 = 0$ となる X を求める.

$$\Phi_X(t) = \det(X - tI) = \begin{vmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{vmatrix} = t^2 - (a+d)t + ad - bc.$$

よって求める X は $a + d = 3, ad - bc = 2$ を満たせばよい.

演習問題 4.2.1

1.
(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ より

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 0 & -1-t \end{vmatrix} = t^2 - 1.$$

よって固有値は $\lambda = \pm 1$.

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので, 連立方程式を解くと

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって

$$\mathbf{x} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\alpha \neq 0).$$

また $\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは $(A+I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので，連立方程式を解くと

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (\beta \neq 0).$$

これより固有空間は

$$V(1) = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, V(-1) = \{\beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

よって固有値の数と同じ数の 1 次独立な固有ベクトルが存在するので定理 4.2 より対角化可能であり $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)(t^2 - 4t + 3).$$

よって固有値 $\lambda = 1, 3$.

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので，連立方程式を解くと

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

また $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは $(A-3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので，連立方程式を解くと

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\gamma \neq 0).$$

これより固有空間は

$$V(1) = \{\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, V(3) = \{\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

よって固有値の数と同じ数の 1 次独立な固有ベクトルが存在するので定理 4.2 より対角化可能であり $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ より，

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 6 \\ -1 & 3-t & 6 \\ 1 & -1 & -1-t \end{vmatrix} \\ &= (1-t)(t^2-2t+3) - (t-5) + 6(t-2) \\ &= -t^3 + 3t^2 - 5t + 3 + 5t - 7 = -(t^3 - 3t^2 + 4) \\ &= -(t-2)(t+1)(t-2). \end{aligned}$$

よって固有値 $\lambda = -1, 2.$

$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは $(A+I)\mathbf{x} = 0$ を満たす 0 でない $\mathbf{x}$ なので，連立方程式を解くと

$$\begin{aligned} A + I &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

また $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $(A-2I)\mathbf{x} = 0$ を満たす 0 でない $\mathbf{x}$ なので，連立方程式を解くと

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\mathbf{x} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\gamma \neq 0).$$

これより固有空間は

$$V(-1) = \{\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}, V(2) = \{\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

よって

$$\dim V(-1) + \dim V(2) = 2 < 3$$

となり，定理 4.2 より対角化不可能である．そこで

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を用いて正規直交基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ を作ると，

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって $U = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ とおくと， U はユニタリ行列で

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. まず，$U+W$ が直和ならば，$U\cap W=\{\mathbf{0}\}$ を示す．$\mathbf{a}\in U\cap W$ とおくと，$\mathbf{a}\in U,\mathbf{a}\in W$．よって $\mathbf{a}=\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}$ と表せる．しかし $U+W$ が直和なので，その表し方は一意的である．よって $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ でなければならない．よって $U\cap W=\{\mathbf{0}\}$．また逆に $\mathbf{a}\in U\cap W=\{\mathbf{0}\}$ と仮定し，$\mathbf{a}\in U+W$ が

$$\mathbf{a}=u_1+w_1=u_2+w_2 \quad (u_1,u_2\in U,\ w_1,w_2\in W)$$

のように表されたとする．このとき

$$u_1-u_2=w_2-w_1\in U\cap W=\{\mathbf{0}\}$$

より $u_1=u_2=w_1=w_2$ となり，上のような表し方は一通りなので $U+W$ は直和である．
3. 定理 1.6 より $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$．また $U+W$ が直和ならば，$U\cap W=\{\mathbf{0}\}$ となり，$\dim(U\cap W)=0$．よって $\dim(U\oplus W)=\dim U+\dim W$.
4. まず，$U+W$ は直和であることを示す．演習問題 4.1 より $U\cap W=\{\mathbf{0}\}$ を示せばよい．$(x_1,x_2,x_3)\in U\cap W$ とおくと，

$$x_1+x_2+x_3=0,\ x_1=x_2=x_3.$$

よって $x_1=x_2=x_3=0$ となり，$U\cap W=\{(0,0,0)\}$.
　次に，$R^3=U\oplus W$ を示す．まず，$U\subset R^3$, $W\subset R^3$ より，$U\oplus W\subset R^3$．また $\dim U=2,\dim W=1$ より，

$$\dim(U\oplus W)=\dim U+\dim W=2+1=3$$

よって $R^3=U\oplus W$.
5. λ を直交行列 A の固有値とすると，$A=A^{-1}$ より，

$$\lambda\mathbf{x}=A\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{x}=\lambda^{-1}\mathbf{x}.$$

よって $\lambda^2=1$.
6. $U=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_n)$ より

$$U^*=\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{u}_1}\\ \overline{\mathbf{u}_2}\\ \vdots\\ \overline{\mathbf{u}_n}\end{pmatrix}$$

よって

$$U^*U=\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\cdot\overline{\mathbf{u}_1} & \mathbf{u}_1\cdot\overline{\mathbf{u}_2} & \cdots & \mathbf{u}_1\cdot\overline{\mathbf{u}_n}\\ & & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{u}_n\cdot\overline{\mathbf{u}_1} & \mathbf{u}_n\cdot\overline{\mathbf{u}_2} & \cdots & \mathbf{u}_n\cdot\overline{\mathbf{u}_n}\end{pmatrix}=I.$$

また $UU^*=(U^*U)^*$ より，$UU^*=I$.

演習問題 4.4.1

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$ とおくと， $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$ より， $AA^* = A^*A$. よって A はユニタリ行列により対角化可能である.

$$\Phi_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 1-i \\ 1+i & 2-t \end{vmatrix} = t^2 - 3t + 2 - 2 = t(t-3)$$

より固有値 $\lambda = 0, 3$ である.
　$\lambda = 0$ に対する固有空間は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2-i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって

$$V(0) = \{\alpha \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

また $\lambda = 3$ に対する固有空間は

$$\begin{pmatrix} -2 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって

$$V(3) = \{\beta \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

次に $V(0), V(3)$ のそれぞれの正規直交基底として

$$\{\begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\}$$

をとると，これよりユニタリ行列

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

を得,

$$U^{-1}AU = U^*AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より A は実対称行列．よって定理 4.6 より直交行列で対角化可能である.

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & -1 \\ 0 & -1-t & 0 \\ -1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} \\ &= -(1+t)(t^2 - 2t + 1 - 1) = (1+t)(t)(t-2) \end{aligned}$$

より固有値は $\lambda=-1,0,2$ である．

$\lambda=-1$ に対する固有空間は

$$
\begin{aligned}
A+I &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

よって

$$V(-1)=\{\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

$\lambda=0$ に対する固有空間は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって

$$V(0)=\{\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

$\lambda=2$ に対する固有空間は

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって

$$V(2)=\{\beta\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

次に $V(-1),V(0),V(2)$ のそれぞれの正規直交基底として

$$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\}$$

をとると，

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

は直交行列となり,

$$P^{-1}AP = P^tAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$ がユニタリ行列により対角行列に変換されるための必要十分条件は,定理 4.5 より A が正規行列.つまり $AA^* = A^*A$ である.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \bar{a_2} \\ \bar{a_1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{a_2} \\ \bar{a_1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} = A^*A$$

より

$$\begin{pmatrix} a_1\bar{a_1} & 0 \\ 0 & a_2\bar{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\bar{a_2} & 0 \\ 0 & a_1\bar{a_1} \end{pmatrix}$$

を得る.よって $|a_1| = |a_2|$.

4. $x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2$ を行列を用いて表すと

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

ここで, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ は実対称行列.よって定理 4.6 より直交行列で対角化可能.

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & -3-t \end{vmatrix} = (-3-t)(t^2 - 3t + 1)$$

より固有値 $\lambda = -3, \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.よって

$$\mathbf{x}^tA\mathbf{x} = \mathbf{y}^t(P^tAP)\mathbf{y} = -3y_1^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}y_2^2 + \frac{3+\sqrt{5}}{2}y_2^2.$$

5.

$x_1\bar{x_1} + (1-i)x_1\bar{x_2} + (1+i)x_2\bar{x_1} + 2x_2\bar{x_2}$ を行列を用いて表すと

$$(\bar{x_1}, \bar{x_2})\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ここで A はエルミート行列なので,定理 4.5 よりユニタリ行列による直交化が可能である.

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1-i \\ 1+i & 2-t \end{vmatrix} = t(t-3)$$

より固有値 $\lambda = 0, 3$.よって

$$\mathbf{x}^tA\mathbf{x} = \mathbf{y}^t(U^*AU)\mathbf{y} = 3\bar{y_2}y_2.$$

第 5 章

演習問題 5.2.1

1. (a)

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 18 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (a)

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$