第1章　1階線形微分方程式

1.1　微分方程式

演習問題 1.1

1. $e^x, xe^x, c_1e^x + c_2xe^x$ は $y'' - 2y' + y = 0$ の解であることを示せ。また
$y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ のとき，c_1, c_2 を求めよ。
2. $\sin x, \cos x$ とその 1 次結合は $y'' + y = 0$ の解であることを示せ。また $\sin x$ と
$\cos x$ により張られるベクトル空間についてどんなことがいえるか。

解答

1.　$y = e^x$ より $y' = e^x, y'' = e^x$。よって

$$y'' - 2y' + y = e^x - 2e^x + e^x = 0$$

$y = xe^x$ より $y' = e^x + xe^x, y'' = 2e^x + xe^x$。よって

$$y'' - 2y' + y = 2e^x + xe^x - 2(e^x + xe^x) + xe^x = 0$$

$y = c_1e^x + c_2xe^x$ より $y' = c_1e^x + c_2(e^x + xe^x), y'' = c_1e^x + c_2(2e^x + xe^x)$。よって

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y &= c_1e^x + c_2(2e^x + xe^x) - 2(c_1e^x + c_2(e^x + xe^x)) + c_1e^x + c_2xe^x \\ &= c_1(e^x - 2e^x + e^x) + c_2(2e^x + xe^x - 2(e^x + xe^x) + xe^x) = 0 \end{aligned}$$

次に，$y = c_1e^x + c_2xe^x$，$y(0) = 1$，$y'(0) = -1$ のとき c_1, c_2 を求める。まず，$y(0) = 1$ より $1 = y(0) = c_1$。
よって $c_1 = 1$。次に，$y'(0) = -1$ より $-1 = y'(0) = c_1 + c_2$。よって $c_2 = -2$。 $\boxed{\text{終}}$

2.　$y = \sin x$ より $y' = \cos x, y'' = -\sin x$。よって

$$y'' + y = -\sin x + \sin x = 0$$

$y = \cos x$ より $y' = -\sin x, y'' = -\cos x$。よって

$$y'' + y = -\cos x + \cos x = 0$$

$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ より $y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x, y'' = -c_1 \sin x - c_2 \cos x$。よって

$$y'' + y = -c_1 \sin x - c_2 \cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0$$

次に，$\sin x$ と $\cos x$ で張られるベクトル空間について考える。まず，$\sin x$ と $\cos x$ で張られるベクトル空間は次のように表わせる。

$$V(\sin x, \cos x) = \{c_1 \sin x + c_2 \cos x : c_1, c_2 \in R\}$$

つまり，$\sin x$ と $\cos x$ の一次結合全体の集まりとなる。また，このベクトル空間の次元を求めると，

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0, c_1 \cos x - c_2 \sin x = 0$$

より，$c_1 = c_2 = 0$ となる。つまり $\sin x$ と $\cos x$ は一次独立だといえる。よって，$V(\sin x, \cos x)$ の次元 は 2 である。 終

1.2　変数分離形微分方程式

演習問題 1.2

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ。
(a) $(\sin x)y' + (\cos x)y = 0$　(b) $y' = e^{x+y}$
(c) $y' = \frac{1-y^2}{1-x^2}$　(d) $y' = (1+2x)(1+y^2)$
2. 次の初期値問題を解け。
(a) $(1+e^x)y' = y,\ y(0) = 1$　(b) $y' + y\sin x = 0,\ y(\pi) = 3$
(c) $xyy' - y^2 = 1,\ y(2) = 1$　(d) $y' = \frac{x(y^2-1)}{(x-1)y^3},\ y(2) = 2$
3.
温度 $70°c$ の物体を気温 $20°c$ の屋外に出した。15 分後の温度が $50°c$ になっていたとき，次の問いに答えよ。
(a) 30 分後の物体の温度を求めよ。
(b) 物体の温度が $32°c$ になるまでにかかる時間を求めよ。

解答

1(a) 変数を分離すると

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\cos x}{\sin x}$$

ここで両辺を積分すると

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

より

$$\log |y| = -\log |\sin x| + c$$

ここで両辺に指数をとると

$$|y| = e^{-\log|\sin x| + c} = e^{-\log|\sin x|} \cdot e^c$$

c は任意の定数より e^c を C を用いて表わす。これより

$$|y| = C\frac{1}{|\sin x|}$$

次に $y = \pm C\frac{1}{|\sin x|}$ となるが $\pm C$ はまた定数なので C を用いて表わすと

$$y = C\frac{1}{|\sin x|}$$

最後に $\sin x$ の絶対値をはずすと $y = \pm C \sin x$ となるが $\pm C$ はまた定数なので C を用いて表わすと

$$y = C\frac{1}{\sin x}$$

よって
$$(\sin x)y = C$$
このように同じ C を用いて異なる値を表わすことを C の乱用という。これより C の乱用を黙って用いる。
$\boxed{終}$

(b) 変数を分離すると
$$\frac{y'}{e^y} = e^x$$
ここで両辺を積分すると
$$\int e^{-y}dy = \int e^x dx$$
より
$$-e^{-y} = e^x + c$$
これより
$$e^{-y} = -e^x + C$$
ここで両辺に対数をとると
$$-y = \log(C - e^x)$$
よって
$$y = -\log(C - e^x) \quad \boxed{終}$$

(c) 変数を分離し積分すると
$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{dx}{1-x^2}$$
より
$$\frac{1}{2}\log|\frac{1+y}{1-y}| = \frac{1}{2}\log|\frac{1+x}{1-x}| + c$$
これより
$$\log|\frac{1+y}{1-y}| = \log|\frac{1+x}{1-x}| + C$$
ここで両辺に指数をとり C の乱用を行なうと
$$\frac{1+y}{1-y} = C(\frac{1+x}{1-x})$$
これを y について解くと
$$(1+y)(1-x) = C(1+x)(1-y)$$
より
$$y[(1-x) + C(1+x) = C(1+x) - 1 + x$$
よって
$$y = \frac{-1+x+C(1+x)}{(1-x)+C(1+x)} \quad \boxed{終}$$

(d) 変数を分離し積分すると
$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int (1+2x)dx$$
より
$$\arctan y = x + x^2 + c$$

$$y = \tan(x + x^2 + c) \quad \boxed{\text{終}}$$

2(a)　変数を分離し積分すると

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$$

より

$$\log|y| = -\log|1+e^{-x}| + c$$

これより

$$y = \frac{C}{1+e^{-x}}$$

ここで初期値 $y(0) = 1$ を用いると $1 = \frac{C}{1+1}$ より

$$y = \frac{2}{1+e^{-x}} \quad \boxed{\text{終}}$$

(b)　変数を分離し積分すると

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \sin x dx$$

より

$$\log|y| = \cos x + c$$

これより

$$y = Ce^{\cos x}$$

ここで初期値 $y(\pi) = 3$ を用いると $3 = Ce^{-1}$ より

$$y = 3e^{\cos x + 1} \quad \boxed{\text{終}}$$

(c)　変数を分離し積分すると

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{1}{x}dx$$

より

$$\frac{1}{2}\log|1+y^2| = \log|x| + c$$

これより

$$\log|1+y^2| = 2\log|x| + C$$

ここで両辺に指数をとり C の乱用を行なうと

$$1 + y^2 = Cx^2$$

ここで初期値 $y(2) = 1$ を用いると $1 + 1 = C(2^2)$ より

$$1 + y^2 = \frac{1}{2}x^2 \quad \boxed{\text{終}}$$

(d)　変数を分離すると

$$\int \frac{y^3}{y^2-1}dy = \int \frac{x}{x-1}dx$$

積分すると

$$\int (y + \frac{y}{y^2-1})dy = \int (1 + \frac{1}{x-1})dx$$

より

$$\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\log|y^2-1| = x + \log|x-1| + c$$

これより

$$y^2 + \log|y^2-1| = 2x + \log{(x-1)^2} + C$$

ここで初期値 $y(2) = 2$ を用いると $4 + \log 3 = 4 + \log 1 + C$ より $C = \log 3$. よって

$$y^2 + \log|y^2-1| = 2x + \log{(x-1)^2} + \log 3 \quad \boxed{終}$$

3(a) Newton の冷却の法則を用いてこの問題を定式化すると

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa(T-20),\ T(0) = 70,\ T(15) = 50$$

変数を分離し積分すると

$$\int \frac{dT}{T-20} = \int -\kappa dt$$

より

$$\log|T-20| = -\kappa t + c$$

ここで両辺に指数をとり C の乱用を行なうと

$$T - 20 = Ce^{-\kappa t}$$

次に境界値 $T(0) = 70,\ T(15) = 50$ を用いると $70-20 = C,\ 50-20 = Ce^{-15\kappa}$ より $C = 50,\ e^{-\kappa} = (\frac{3}{5})^{1/15}$。
これより

$$T = 20 + 50(\frac{3}{5})^{\frac{t}{15}}$$

よって 30 分後の物体の温度は

$$T(30) = 20 + 50(\frac{3}{5})^{\frac{30}{15}} = 38°C \quad \boxed{終}$$

(b) 物体の温度が 32 度より

$$32 = 20 + 50(\frac{3}{5})^{\frac{t}{15}}$$

これを t について解くと

$$\frac{12}{50} = (\frac{3}{5})^{\frac{t}{15}}$$

より両辺に対数をとって

$$\log\frac{12}{50} = \frac{t}{15}\log{(\frac{3}{5})}$$

これより

$$t = 15\frac{\log{(\frac{6}{25})}}{\log{(\frac{3}{5})}} = 41.9min \quad \boxed{終}$$

1.3　同次形微分方程式

演習問題 1.3

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ。
$(a)\ y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$　　$(b)\ y' = \frac{xy}{(x+2y)^2}$
$(c)\ y' = \frac{x^2+2xy-4y^2}{x^2-8xy-4y^2}$　　$(d)\ (x^2 - y^2 e^{\frac{x}{y}})y' = xy$
$(e)\ y' = \frac{x+2y-1}{x+2y+7}$　　$(f)\ y' = \frac{x-y+8}{y-3x+2}$
2. 次の初期値問題を解け。
$(a)\ (y - \sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0,\ y(\sqrt{3}) = 1$
$(b)\ (y^3 - x^3)dx - xy^2 dy = 0,\ y(1) = 2$
3. 例題 1.9 はなぜ例題 1.8 の方法では解けないのか考えなさい.

解答

1(a)　$xy,\ x^2+y^2$ 共に 2 次の同次関数。よって

$$y' = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{y/x}{1+(y/x)^2}$$

ここで $v = y/x$ とおくと $y = vx,\ y' = v'x + v$ より

$$v'x + v = \frac{v}{1+v^2}$$

この式を変形して変数分離形にもっていくと

$$v'x = \frac{v - v - v^3}{1+v^2}$$

より

$$\int \frac{1+v^2}{v^3} dv = -\int \frac{1}{x} dx$$

または

$$\int (v^{-3} + v^{-1}) dv = -\log x + c$$

よって

$$\frac{v^{-2}}{2} + \log|v| = -\log x + c$$

ここで $v = y/x$ を代入すると

$$\frac{1}{2}(\frac{x}{y})^2 + \log|\frac{y}{x}| + \log x = c$$

よって

$$\log y - \frac{x^2}{2y^2} = C \quad \boxed{終}$$

(b)　$xy,\ (x+y)^2$ 共に 2 次の同次関数。よって

$$y' = \frac{xy}{(x+y)^2} = \frac{y/x}{(1+(2y/x))^2}.$$

ここで $v = y/x$ とおくと $y = vx,\ y' = v'x + v$ より

$$v'x + v = \frac{v}{(1+2v)^2}.$$

この式を変形して変数分離形にもっていくと

$$v'x = \frac{v - v - 4v^2 - 4v^3}{1 + v^2}$$

より

$$\int \frac{1 + 4v + 4v^2}{4v^3 + 4v^2} dv = -\int \frac{1}{x} dx.$$

ここで，左辺を部分分数分解すると

$$\frac{1 + 4v + 4v^2}{4v^3 + 4v^2} = \frac{4v^2 + 4v + 1}{4v^2(v + 1)} = \frac{1}{4}(\frac{Av + B}{v^2} + \frac{C}{v + 1}).$$

これより，$A = 3, B = 1, C = 1$。したがって，

$$\int \frac{1}{4}(\frac{3v + 1}{v^2} + \frac{1}{1 + v})dv = -\int \frac{1}{x} dx$$

よって

$$\frac{1}{4}(3\log v - \frac{1}{v} + \log|1 + v|) = -\log x + c$$

ここで両辺を 4 倍すると，

$$\log v^3(1 + v) - \frac{1}{v} = -\log x^4 + C$$

次に $v = y/x$ を代入すると

$$\log [(\frac{y}{x})^3 + (\frac{y}{x})^4] - \frac{x}{y} = -\log x^4 + C$$

これより

$$\log (\frac{y^3}{x^3} + \frac{y^4}{x^4})x^4 - \frac{x}{y} = C$$

となり

$$\log (xy^3 + y^4) - \frac{x}{y} = C \quad \boxed{終}$$

(c) $x^2 + 2xy - 4y^2$, $x^2 - 8xy - 4y^2$ 共に 2 次の同次関数。よって

$$y' = \frac{1 + 2y/x - 4y^2/x^2}{1 - 8y/x - 4y^2/x^2}.$$

ここで $v = y/x$ とおくと $y = vx$, $y' = v'x + v$ より

$$v'x + v = \frac{1 + 2v - 4v^2}{1 - 8v - 4v^2}.$$

この式を変形して変数分離形にもっていくと

$$v'x = \frac{1 + 2v - 4v^2 - v + 8v^2 + 4v^3}{1 - 8v - 4v^2}$$

より

$$\int \frac{4v^2 + 8v - 1}{4v^3 + 4v^2 + v + 1} dv = -\int \frac{1}{x} dx$$

または

$$\int (\frac{-1}{v + 1} + \frac{8v}{4v^2 + 1})dv = -\int \frac{1}{x} dx$$

よって

$$-\log|v+1|+\log|4v^2+1|=-\log|x|+c$$

ここで対数の差は商の対数で表わせるので

$$\log|\frac{4v^2+1}{v+1}|+\log|x|=c$$

ここで対数の和は積の対数で表わせるので

$$\log|\frac{4xv^2+x}{v+1}|=c$$

次に $v=y/x$ を代入すると

$$\log|\frac{4x(y/x)^2+x}{(y/x)+1}|=c$$

これより

$$\log|\frac{4y^2+x^2}{y+x}|=c$$

よって

$$x^2+4y^2=C(x+y) \quad \boxed{終}$$

(d)　$x^2-y^2e^{x/y},\ xy$ 共に 2 次の同次関数。よって

$$1-(\frac{y}{x})^2e^{\frac{y}{x}}y'=\frac{y}{x}.$$

ここで $v=y/x$ とおくと $y=vx,\ y'=v'x+v$ より

$$v'x+v=\frac{v}{1-v^2e^{\frac{1}{v}}}.$$

この式を変形して変数分離形にもっていくと

$$v'x=\frac{v-v+v^3e^{\frac{1}{v}}}{1-v^2e^{\frac{1}{v}}}$$

より

$$\int\frac{1-v^2e^{\frac{1}{v}}}{v^3e^{\frac{1}{v}}}dv=\int\frac{1}{x}dx$$

または

$$\int\frac{1}{v^3}e^{-\frac{1}{v}}dv-\int\frac{1}{v}dv=\int\frac{1}{x}dx$$

ここで部分積分

$$\begin{pmatrix} u=\frac{1}{v} & dw=\frac{1}{v^2}e^{-\frac{1}{v}}dv \\ du=-\frac{dv}{v^2} & w=e^{-\frac{1}{v}} \end{pmatrix}$$

を用いると

$$\frac{1}{v}e^{-\frac{1}{v}}+\int\frac{1}{v^2}e^{-\frac{1}{v}}dv-\log|v|=\log|x|+c$$

より

$$\frac{1}{v}e^{-\frac{1}{v}}+e^{-\frac{1}{v}}-\log|v|=\log|x|+c$$

ここで $v = y/x$ を代入すると

$$\frac{x}{y}e^{-\frac{x}{y}} + e^{-\frac{x}{y}} - \log\frac{y}{x} - \log|x| = C$$

これより

$$e^{-\frac{x}{y}}(\frac{x}{y} + 1) - \log y = C \quad \boxed{終}$$

(e) $x + 2y - 1$ と $x + 2y + 7$ は同次関数ではないが，共に $x + 2y$ を含んでいるので，$u = x + 2y$ とおくと，$u' = 1 + 2y'$ より

$$\frac{u' - 1}{2} = \frac{u - 1}{u + 7}.$$

この式を変形して変数分離形にもっていくと

$$u' = \frac{2u - 2 + u + 7}{u + 7} = \frac{3u + 5}{u + 7}$$

より

$$\int \frac{u + 7}{3u + 5}du = \int dx$$

または

$$\frac{1}{3}\int (1 + \frac{16}{3u + 5})du = \int dx$$

これから

$$\frac{1}{3}u + \frac{16}{9}\log|3u + 5| = x + c$$

ここで $u = x + 2y$ を代入すると

$$\frac{1}{3}(x + 2y) + \frac{16}{9}\log|3(x + 2y) + 5| = x + c$$

これより

$$2x - 2y - \frac{16}{3}\log|3x + 6y + 5| = C \quad \boxed{終}$$

(f) $x - y + 8$ と $y - 3x + 2$ は同次関数ではないが，定数項がおちれば 1 次の同次関数になる。そこで

$$\begin{cases} x - y + 8 & = 0 \\ -3x + y + 2 & = 0 \end{cases}$$

を解くと，

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -8 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = 5,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = 13$$

これより $x = 5, y = 13$ が原点になるように座標軸の移動を行なうと，$x = X + 5, y = Y + 13$ より

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dx}\frac{dx}{dX} = \frac{dy}{dx} = \frac{X - Y}{Y - 3X}$$

これは同次方程式なので $v = Y/X$ とおくと，$Y = vX,\ Y' = v'X + v$ より

$$v'X + v = \frac{1 - v}{v - 3}.$$

この式を変形して変数分離形にもっていくと

$$v'X = \frac{1 - v - v^2 + 3v}{v - 3}$$

より

$$\int \frac{v - 3}{v^2 - 2v - 1} dv = -\int \frac{1}{X} dX$$

または

$$\frac{1}{2}\int (\frac{1+\sqrt{2}}{v - 1 + \sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{2}}{v - 1 - \sqrt{2}}) dv = -\log|X| + c$$

これから

$$\frac{1}{2}((1+\sqrt{2})\log|v - 1 + \sqrt{2}| + (1-\sqrt{2})\log|v - 1 - \sqrt{2}|) = -\log|X| + c$$

を得る。ここで $v = Y/X$ を代入すると

$$\frac{1}{2}((1+\sqrt{2})\log|\frac{Y}{X} - 1 + \sqrt{2}| + (1-\sqrt{2})\log|\frac{Y}{X} - 1 - \sqrt{2}|) = -\log|X| + c$$

次に $X = x - 5, Y = y - 13$ で置き換えると

$$(1+\sqrt{2})\log|\frac{y-13}{x-5} - 1 + \sqrt{2}| + (1-\sqrt{2})\log|\frac{y-13}{x-5} - 1 - \sqrt{2}| + 2\log|x - 5| = C \quad \boxed{終}$$

2(a)　$y - \sqrt{x^2 + y^2}, x$ は共に 2 次の同次関数より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}.$$

ここで $v = y/x$ とおくと，$y = vx,\ y' = v'x + v$ より

$$v'x + v = v - \sqrt{1 + v^2}.$$

この式を変形して変数分離形にもっていくと

$$v'x = -\sqrt{1 + v^2}$$

より

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = -\int \frac{1}{x} dx$$

これから

$$\log|v + \sqrt{1 + v^2}| = -\log|x| + c$$

を得る。ここで $v = y/x$ を代入すると

$$\log|\frac{y}{x} + \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}| + \log|x| = c$$

または

$$\log(y + \sqrt{x^2 + y^2}) = C$$

この両辺に指数をとると

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = C$$

最後に初期値 $y(\sqrt{3}) = 1$ より $1 + \sqrt{4} = C$。よって

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \quad \boxed{終}$$

(b)　$y^3 - x^3, xy^2$ は共に 3 次の同次関数より

$$((\frac{y}{x})^3 - 1)dx - \frac{y^2}{x^2}dy = 0.$$

ここで $v = y/x$ とおくと，$y = vx,\ y' = v'x + v$ より

$$v'x + v = \frac{v^3 - 1}{v^2} = v - \frac{1}{v^2}.$$

この式を変形して変数分離形にもっていくと

$$v'x = -\frac{1}{v^2}$$

より

$$\int v^2 dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

これから

$$\frac{v^3}{3} = -\log|x| + c$$

を得る。ここで $v = y/x$ を代入すると

$$(\frac{y}{x})^3 = -3\log|x| + C$$

または

$$(\frac{y}{x})^3 + 3\log x = C$$

最後に初期値 $y(1) = 2$ より $8 = C$。よって

$$(\frac{y}{x})^3 + 3\log x = 8 \quad \boxed{終}$$

3.　例題 1.8 は座標軸の移動を行なって定数項を落とすことができた。残念ながら例題 1.9 は $x + y - 1 = 0,\ x + y + 1 = 0$ と 2 つの平行な直線を扱っているため，座標軸の移動では定数項を落とすことができない。 $\boxed{終}$

1.4　完全微分形微分方程式

演習問題 1.4

1. 次の微分方程式が完全微分形か調べ，完全微分形の方程式を解け。

(a) $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$　　(b) $(ye^{xy} + 2xy)dx + (xe^{xy} + x^2)dy = 0$

(c) $(1 + xy^2)dx + (x^2y + y)dy = 0$　　(d) $(y^2 - x^2)dx + 2xydy = 0$

2. 次の初期値問題を解け。

(a) $x^2dx + ye^ydy = 0,\ y(0) = 1$

(b) $(e^xy + \sin y)dx + (e^x + x\cos y)dy = 0,\ y(0) = 1$

(c) $(\cos x \sin x - xy^2)dx - y(x^2 - 1)dy = 0,\ y(0) = 2$

解答

1(a)　$M(x,y)=x^2+y^2$ より $M_y=2y$。また $N(x,y)=2xy$ より $N_x=2y$。よって $M_y=N_x$ となり完全微分形。ここでくくり直しをおこなうと

$$x^2dx+(y^2dx+2xydy)=0$$

全微分を用いて書き直すと

$$d(\frac{x^3}{3})+d(xy^2)=d(c)$$

よって

$$\frac{x^3}{3}+xy^2=c.\ \boxed{終}$$

(b)　$M(x,y)=ye^{xy}+2xy$ より $M_y=e^{xy}+xye^{xy}+2x$。また $N(x,y)=xe^{xy}+x^2$ より $N_x=e^{xy}+xye^{xy}+2x$。よって $M_y=N_x$ となり完全微分形。ここで $(x_0,y_0)=(0,0)$ とおくと

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x (ye^{\xi y}+2\xi y)d\xi+\int_0^y 0d\eta \\ &= e^{\xi y}+\xi^2 y\mid_0^x = e^{xy}+x^2y \end{aligned}$$

となり，一般解は

$$e^{xy}+x^2y=c.\ \boxed{終}$$

(c)　$M(x,y)=1+xy^2$ より $M_y=2xy$。また $N(x,y)=x^2y+y$ より $N_x=2xy$。よって $M_y=N_x$ となり完全微分形。ここでくくり直しをおこなうと

$$dx+(xy^2dx+x^2ydy)+ydy=0$$

全微分を用いて書き直すと

$$d(x)+d(\frac{x^2y^2}{2})+d(\frac{y^2}{2})=d(c)$$

よって

$$x+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^2}{2}=c.\ \boxed{終}$$

(d)　$M(x,y)=y^2-x^2$ より $M_y=2y$。また $N(x,y)=2xy$ より $N_x=2y$。よって $M_y=N_x$ となり完全微分形。ここでくくり直しをおこなうと

$$-x^2dx+(y^2dx+2xydy)=0$$

全微分を用いて書き直すと

$$d(\frac{-x^3}{3})+d(xy^2)=d(c)$$

よって

$$-\frac{x^3}{3}+xy^2=c.\ \boxed{終}$$

2(a)　$M(x,y)=x^2$ より $M_y=0$。また $N(x,y)=ye^y$ より $N_x=0$。よって $M_y=N_x$ となり完全微分形。ここでくくり直しをおこなうと

$$x^2dx+ye^ydy=0$$

全微分を用いて書き直すと

$$d(\frac{x^3}{3})+d(ye^y-e^y)=d(c)$$

よって

$$\frac{x^3}{3} + ye^y - e^y = c$$

ここで初期値 $y(0) = 1$ を用いると $0 + e - e = 0$ より

$$\frac{x^3}{3} + ye^y - e^y = 0 \quad \boxed{終}$$

別解　$M(x, y) = x^2$ より $M_y = 0$。また $N(x, y) = ye^y$ より $N_x = 0$。よって $M_y = N_x$ となり完全微分形。ここで $(x_0, y_0) = (0, 0)$ を用いると

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x \xi^2 d\xi + \int_0^y \eta e^\eta d\eta \\ &= \frac{\xi^3}{3} \mid_0^x + (\eta e^\eta - e^\eta) \mid_0^y \\ &= \frac{x^3}{3} + ye^y - e^y \end{aligned}$$

となり，一般解は

$$\frac{x^3}{3} + ye^y - e^y = c$$

ここで初期値 $y(0) = 1$ を用いると $0 + e - e = 0$ より

$$\frac{x^3}{3} + ye^y - e^y = 0 \quad \boxed{終}$$

(b)　$M(x, y) = e^x y + \sin y$ より $M_y = e^x + \cos y$。また $N(x, y) = e^x + x\cos y$ より $N_x = e^x + \cos y$。よって $M_y = N_x$ となり完全微分形。ここで $(x_0, y_0) = (0, 0)$ を用いると

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x (e^\xi y + \sin y) d\xi + \int_0^y 0 d\eta \\ &= e^x y + x \sin y \end{aligned}$$

となり，一般解は

$$e^x y + x \sin y = c$$

ここで初期値 $y(0) = 1$ を用いると $1 = c$ より

$$e^x y + x \sin y = 1 \quad \boxed{終}$$

(c)　$M(x, y) = \cos x \sin x - xy^2$ より $M_y = -2xy$。また $N(x, y) = -y(x^2 - 1)$ より $N_x = -2xy$。よって $M_y = N_x$ となり完全微分形。ここでくくり直しを行なうと

$$\cos x \sin x dx + (-xy^2 dx - yx^2 dy) + y dy = 0$$

全微分を用いて書き直すと

$$d(\frac{\sin^2 x}{2}) + d(-\frac{x^2y^2}{2}) + d(\frac{y^2}{2}) = d(c)$$

よって，一般解は

$$\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

ここで初期値 $y(0) = 2$ を用いると $0 - 0 + 2 = c$ より

$$\sin^2 x - x^2y^2 + y^2 = 4 \quad \boxed{終}$$

1.5 積分因子

演習問題 1.5

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ。
 (a) $(x-y^2)dx+2xydy=0$　(b) $(5xy+4y^2+1)dx+(x^2+2xy)dy=0$
 (c) $(2xy^2+y)dx+(2y^3-x)dy=0$　(d) $(2x+\tan y)dx+(x-x^2\tan y)dy=0$

2. 次の微分方程式を解け。
 (a) $(2y^2-xy)dx+(2x^2-3xy)dy=0$　(b) $(y^4+2x^3y)dx-(x^4+2xy^3)dy=0$

解答 1(a)　$M_y=-2y,\ N_x=2y$ より完全微分形ではない。そこで積分因子を捜す。$M_y-N_x=-4y$ より $(1/N)[M_y-N_x]$ を計算すると

$$\frac{1}{N}(M_y-N_x)=\frac{-4y}{2xy}=\frac{-2}{x}$$

これは x だけの関数なので積分因子は

$$\mu=\exp(-\int\frac{2}{x}dx)=\exp(-2\log x)=\frac{1}{x^2}$$

で与えられる。これを元の式にかけると

$$(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{x^2})dx+\frac{2y}{x}dy=0$$

この式は完全微分形なのでくくり直すと

$$\frac{1}{x}dx+(-\frac{y^2}{x^2}dx+\frac{2y}{x}dy)=0$$

全微分を用いて書き直すと

$$d(\log|x|)+d(\frac{y^2}{x})=d(c)$$

よって一般解は

$$\log|x|+\frac{y^2}{x}=c \quad \boxed{終}$$

(b)　$M_y=5x+8y,\ N_x=2x+2y$ より完全微分形ではない。そこで積分因子を捜す。$M_y-N_x=3x+6y$ より $(1/N)[M_y-N_x]$ を計算すると

$$\frac{1}{N}(M_y-N_x)=\frac{3x+6y}{x^2+xy}=\frac{3(x+2y)}{x(x+2y)}=\frac{3}{x}$$

これは x だけの関数なので積分因子は

$$\mu=\exp(\int\frac{3}{x}dx)=\exp(3\log x)=x^3$$

で与えられる。これを元の式にかけると

$$(5x^4y+4x^3y^2+x^3)dx+(x^5+2x^4y)dy=0$$

この式は完全微分形なのでくくり直すと

$$x^3dx+[(5x^4y+4x^3y^2)dx+(x^5+2x^4y)dy]=0$$

全微分を用いて書き直すと

$$d(\frac{x^4}{4}) + d(x^5y + 2x^4y^2) = d(c)$$

よって一般解は

$$\frac{x^4}{4} + x^5y + x^4y^2 = c \quad \boxed{\text{終}}$$

(c)　$M_y = 4xy + 1, N_x = -1$ より完全微分形ではない。そこで積分因子を捜す。$M_y - N_x = 4xy + 2$ より $(1/M)[M_y - N_x]$ を計算すると

$$\frac{1}{N}(M_y - N_x) = \frac{4xy+2}{2xy^2+y} = \frac{2(2xy+1)}{y(2xy+1)} = \frac{2}{y}$$

これは y だけの関数なので積分因子は

$$\mu = \exp(-\int \frac{2}{y}dy) = \exp(-2\log y) = \frac{1}{y^2}$$

で与えられる。これを元の式にかけると

$$(2x + \frac{1}{y})dx + (2y - \frac{x}{y^2})dy = 0$$

この式は完全微分形なのでくくり直すと

$$2xdx + (\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy) + 2ydy = 0$$

全微分を用いて書き直すと

$$d(x^2) + d(\frac{x}{y}) + d(y^2) = d(c)$$

よって一般解は

$$x^2 + \frac{x}{y} + y^2 = c \quad \boxed{\text{終}}$$

(d)　$M_y = \sec^2 y,\ N_x = 1 - 2x\tan y$ より完全微分形ではない。そこで積分因子を捜す。

$$\begin{aligned} M_y - N_x &= \sec^2 y - 1 + 2x\tan y \\ &= \tan^2 y + 2x\tan y = \tan y(\tan y + 2x) \end{aligned}$$

より $(1/M)[M_y - N_x]$ を計算すると

$$\frac{1}{M}(M_y - N_x) = \frac{\tan y(\tan y + 2x)}{2x + \tan y} = \tan y$$

これは y だけの関数なので積分因子は

$$\mu = \exp(-\int \tan y dy) = \exp(-\int \frac{\sin y}{\cos y}dy) = \exp(\log|\cos y|) = \cos y$$

で与えられる。これを元の式にかけると

$$(2x\cos y + \sin y)dx + (x\cos x - x^2\sin y)dy = 0$$

この式は完全微分形なので全微分を用いて書き直すと

$$d(x^2\cos y + x\sin y) = d(c)$$

よって一般解は

$$x^2\cos y + x\sin y = c \quad \boxed{\text{終}}$$

2(a)　$M_y = 4y - x,\ N_x = 4x - 3y$ より完全微分形ではない。そこで積分因子を捜す。

$$M_y - N_x = -5x + 7y$$

より $(1/N)[M_y - N_x], (1/M)[M_y - N_x]$ は x, y だけの関数にはならない。そこで積分因子を $\mu = x^m y^n$ とおき，m, n を求める。

$$(2x^m y^{n+2} - x^{m+1}y^{n+1})dx + (2x^{m+2}y^n - 3x^{m+1}y^{n+1})dy = 0$$

が完全微分形になるためには

$$(\mu M)_y = 2(n+2)x^m y^{n+1} - (n+1)x^{m+1}y^n$$

$$(\mu N)_x = 2(m+2)x^{m+1}y^n - 3(m+1)x^m y^{n+1}$$

が等しくなければならない。よって

$$2(n+2) = -3(m+1),\ 2(m+2) = -(n+1)$$

書き直すと

$$\begin{aligned} 3m + 2n &= -7 \\ 2m + n &= -5 \end{aligned}$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$m = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{-1} = -3$$

また $n = 1$。これより $\mu = x^{-3}y$ となる。これをもとの微分方程式にかけると

$$(2x^{-3}y^3 - x^{-2}y^2)dx + (2x^{-1}y - 3x^{-2}y^2)dy = 0$$

この式は完全微分形なので全微分を用いて書き直すと

$$d(x^{-1}y^2 - x^{-2}y^3) = d(c)$$

よって一般解は

$$x^{-1}y^2 - x^{-2}y^3 = c \quad \boxed{\text{終}}$$

(b)　$M_y = 4y^3 + 2x^3,\ N_x = -4x^3 - 2y^3$ より完全微分形ではない。そこで積分因子を捜す。M_y, N_x の形から積分因子を $\mu = x^m y^n$ とおき，m, n を求める。

$$(x^m y^{n+4} + 2x^{m+3}y^{n+1})dx - (x^{m+4}y^n + 2x^{m+1}y^{n+3})dy = 0$$

が完全微分形になるためには

$$(\mu M)_y = (n+4)x^m y^{n+3} + 2(n+1)x^{m+3}y^n$$

$$(\mu N)_x = -(m+4)x^{m+3}y^n - 2(m+1)x^m y^{n+3}$$

が等しくなければならない。よって

$$(n+4) = -2(m+1),\ -(m+4) = 2(n+1)$$

書き直すと

$$\begin{aligned} 2m+n &= -6 \\ -m-2n &= 6 \end{aligned}$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$m = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{6}{-3} = -2$$

また $n = -2$。これより $\mu = x^{-2}y^{-2}$ となる。これをもとの微分方程式にかけると

$$(x^{-2}y^2 + 2xy^{-1})dx - (x^2y^{-2} + 2x^{-1}y)dy = 0$$

この式は完全微分形なので全微分を用いて書き直すと

$$d(-x^{-1}y^2 + x^2y^{-1}) = d(c)$$

よって一般解は

$$-x^{-1}y^2 + x^2y^{-1} = c \quad \boxed{終}$$

1.6　線形微分方程式

演習問題 1.6

1. 次の微分方程式を解け。
 (a) $y'\cos x - y\sin x + e^x = 0$　(b) $y' + 2xy = 2x$
 (c) $xy' + y = x\sin x$　(d) $xy' + (1+x)y = e^{-x}\sin 2x$
2. 次の初期値問題を解け。
(a) $y' + (\cos x)y = e^{-\sin x},\ y(0) = 2$
(b) $(x\log x)y' - y = \log x,\ y(e) = -1$
(c) $y' + y = f(x),\ y(0) = 0,\ f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$
(d) $y' + (\tan x)y = \cos^2 x,\ y(0) = -1$
3.
$R = 10\Omega, E = 20V, L = \begin{cases} 5-t, & 0 \le t \le 5 \\ 0, & 5 \le t \end{cases}$ の RL 回路で $i(0) = 0$ のとき，$i(t)$ を求めよ。

1(a)　この方程式は 1 階の線形である。標準形に直すと

$$y' - \frac{\sin x}{\cos x}y = -\frac{e^x}{\cos x}$$

積分因子 μ は

$$\mu = \exp(-\int \frac{\sin x}{\cos x} dx) = \exp(\log \cos x) = \cos x$$

これを標準形にかけると

$$\cos x y' - \sin x y = -e^x$$

このとき左辺は積分因子かける従属変数 y の導関数なので

$$(\cos x y)' = -e^x$$

この両辺を x で積分すると

$$\cos x y = -\int e^x dx = -e^x + c$$

よって一般解は

$$y = \frac{c - e^x}{\cos x} \quad \boxed{終}$$

(b)　この方程式は 1 階の線形である。積分因子 μ は

$$\mu = \exp(\int 2x dx) = \exp(x^2) = e^{x^2}$$

これを標準形にかけると

$$e^{x^2} y' + 2xe^{x^2} y = 2xe^{x^2}$$

このとき左辺は積分因子かける従属変数 y の導関数なので

$$(e^{x^2} y)' = 2xe^{x^2}$$

この両辺を x で積分すると

$$e^{x^2} y = \int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + c$$

よって一般解は

$$y = 1 + ce^{-x^2} \quad \boxed{終}$$

(c)　この方程式は 1 階の線形である。標準形に直すと

$$y' + \frac{1}{x} y = \sin x$$

積分因子 μ は

$$\mu = \exp(\int \frac{1}{x} dx) = \exp(\log x) = x$$

これを標準形にかけると

$$xy' + y = x \sin x$$

このとき左辺は積分因子かける従属変数 y の導関数なので

$$(xy)' = x \sin x$$

この両辺を x で積分すると

$$\begin{aligned} xy &= \int x \sin x dx \quad \begin{pmatrix} u = x & dv = \sin x \\ du = dx & v = -\cos x \end{pmatrix} \\ &= -x \cos x + \int \cos x + c = -x \cos x + \sin x + c \end{aligned}$$

よって一般解は

$$y = \frac{-x\cos x + \sin x + c}{x} \quad \boxed{終}$$

(d)　この方程式は 1 階の線形である。標準形に直すと

$$y' + \frac{1+x}{x}y = \frac{e^{-x}\sin 2x}{x}$$

積分因子 μ は

$$\mu = \exp(\int \frac{1+x}{x}dx) = \exp(\int (1+\frac{1}{x})dx) = \exp(x + \log x) = xe^x$$

これを標準形にかけると

$$xe^x y' + e^x(1+x)y = \sin 2x$$

このとき左辺は積分因子かける従属変数 y の導関数なので

$$(xe^x y)' = \sin 2x$$

この両辺を x で積分すると

$$xe^x y = -\frac{\cos 2x}{2} + c$$

よって一般解は

$$y = \frac{\cos 2x + c}{2xe^x} \quad \boxed{終}$$

2(a)　この方程式は 1 階の線形である。積分因子 μ は

$$\mu = \exp(\int \cos x dx) = \exp(\sin x) = e^{\sin x}$$

これを標準形にかけると

$$e^{\sin x}y' + e^{\sin x}\cos x y = 1$$

このとき左辺は積分因子かける従属変数 y の導関数なので

$$(e^{\sin x}y)' = 1$$

この両辺を x で積分すると

$$e^{\sin x}y = x + c$$

よって一般解は

$$y = (x+c)e^{-\sin x}$$

ここで初期値 $y(0) = 2$ を用いると $2 = ce^0 = c$ より

$$y = (x+2)e^{-\sin x} \quad \boxed{終}$$

(b)　この方程式は 1 階の線形である。標準形に直すと

$$y' - \frac{1}{x\log x}y = \frac{1}{x}$$

積分因子 μ は

$$\mu = \exp(-\int \frac{1}{x\log x}dx) = \exp(-\log(\log x)) = \frac{1}{\log x}$$

これを標準形にかけると

$$\frac{1}{x\log x}y' - \frac{1}{x(\log x)^2}y = \frac{1}{x\log x}$$

このとき左辺は積分因子かける従属変数 y の導関数なので

$$(\frac{1}{\log x}y)' = \frac{1}{x\log x}$$

この両辺を x で積分すると

$$\frac{1}{\log x}y = \log(\log x) + c$$

よって一般解は

$$y = \log x(\log\log x + c)$$

ここで初期値 $y(e) = -1$ を用いると $-1 = \log e(\log 1 + c) = c$ より

$$y = \log x(\log\log x - 1) \quad \boxed{\text{終}}$$

(c)　この方程式は 1 階の線形である。積分因子 μ は

$$\mu = \exp(\int 1dx) = e^x$$

これを標準形にかけると

$$e^x y' + e^x y = e^x f(x)$$

このとき左辺は積分因子かける従属変数 y の導関数なので

$$(e^x y)' = e^x f(x)$$

この両辺を x で積分すると

$$e^x y = \begin{cases} e^x + c_1 & 0 \le x < 1 \\ c_2 & x \ge 1 \end{cases}$$

よって一般解は

$$y = \begin{cases} 1 + c_1 e^{-x} & 0 \le x < 1 \\ c_2 e^{-x} & x \ge 1 \end{cases}$$

ここで初期値 $y(0) = 0$ を用いると $0 = 1 + c_1$ より $c_1 = -1$。よって $0 \le x < 1$ のとき，$y = 1 - e^{-x}$。また微分方程式の解は連続であると仮定できるので $y(1) = 1 - e^{-1}$ より $1 - e^{-1} = c_2 e^{-1}$。よって $c_2 = e - 1$。これより

$$y = \begin{cases} 1 - e^{-x} & 0 \le x < 1 \\ (e-1)e^{-x} & x \ge 1 \end{cases} \quad \boxed{\text{終}}$$

(d)　この方程式は 1 階の線形である。積分因子 μ は

$$\mu = \exp(\int \tan x dx) = \exp(\int \frac{\sin x}{\cos x}dx) = \exp(-\log\cos x) = \frac{1}{\cos x}$$

これを標準形にかけると

$$\frac{1}{\cos x}y' + \frac{\sin x}{\cos x)^2}y = \cos x$$

このとき左辺は積分因子かける従属変数 y の導関数なので

$$(\frac{1}{\cos x}y)' = \cos x$$

この両辺を x で積分すると

$$\frac{1}{\cos x}y = \sin x + c$$

よって一般解は

$$y = \cos x(\sin x + c)$$

ここで初期値 $y(0) = -1$ を用いると $-1 = 1(0+c) = c$ より

$$y = \cos x(\sin x - 1) \quad \boxed{\text{終}}$$

3.　RL 回路を流れる電流を表わす方程式は

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$

より標準形

$$\frac{di}{dt} + \frac{10}{5-t}i = \frac{20}{5-t},\ 0 \leq t \leq 5$$

を得る。1 階線形なので積分因子を求めると

$$\mu = \exp(\frac{10}{5-t}dt) = \exp(-10\log 5 - t) = (\frac{1}{5-t})^{10}$$

これを標準形にかけると

$$(\frac{1}{5-t})^{10}\frac{di}{dt} + (\frac{1}{5-t})^{10}\frac{10}{5-t}i = 20(\frac{1}{5-t})^{11}$$

このとき左辺は積分因子かける従属変数 i の導関数なので

$$((\frac{1}{5-t})^{10}i)' = 20(5-t)^{-11}$$

この両辺を t で積分すると

$$(\frac{1}{5-t})^{10}i = 2(\frac{1}{5-t})^{10} + c$$

よって一般解は

$$i = 2 + c(5-t)^{10}$$

ここで初期値 $i(0) = 0$ を用いると $0 = 2 + c5^{10}$ より $c = -2/5^{10}$。よって

$$i(t) = 2 - \frac{2}{5^{10}}(5-t)^{10}$$

次に，$t \geq 5$ の場合を考えると，$L = 0$ より RL 回路を流れる電流を表わす方程式は $Ri = E$ となり，$i = 20/10 = 2$ $\boxed{\text{終}}$

1.7　Bernoulii,Riccati の方程式

演習問題 1.7

1. 次の微分方程式を解け。
$(a)\ xy' - y = -y^2$　　$(b)\ xy' + y = y^2 \log x$
$(c)\ y' - y\cos x + y^2 \cos x = 0$
2. 次の微分方程式を解け。
$(a)\ yy' + y^2 + 4x(x+1) = 0$　$(b)\ (y+1)y' + x(y^2+2y) = x$
3. 次の微分方程式を解け。
$(a)\ x^2y' = -x^2y^2 - 4xy - 2$, ただし $f(x) = -2/x$ は解
$(b)\ xy' = y - xy^2 + x^3$

解答

1(a)　標準形に直すと

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}y^2$$

となり，これは Bernoulli の方程式である。そこで両辺に y^{-2} をかけて整理すると

$$y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{1-2} = -\frac{1}{x}$$

となる。ここで $u = y^{1-2} = y^{-1}$ とおくと $u' = -y^{-2}y'$ より

$$-u' - \frac{1}{x}u = -\frac{1}{x}$$

これは u について線形なので，u についての標準形に直すと

$$u' + \frac{1}{x}u = \frac{1}{x}$$

となる。そこで積分因子 μ を求めると $\mu = \exp(\int(1/x)dx) = \exp(\log x) = x$ となる。これを u についての標準形にかけると，左辺は必ず積分因子かける従属変数の導関数になるので

$$(xu)' = 1$$

となる。この両辺を x について積分すると

$$xu = \int 1dx = x + c$$

より

$$u = \frac{x+c}{x}$$

ここで $u = y^{-1}$ を代入すると

$$y = \frac{1}{u} = \frac{x}{x+c} \quad \boxed{終}$$

(b)　標準形に直すと

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}y^2 \log x$$

となり，これは Bernoulli の方程式である。そこで両辺に y^{-2} をかけて整理すると

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{1-2} = \frac{\log x}{x}$$

となる。ここで $u = y^{1-2} = y^{-1}$ とおくと $u' = -y^{-2}y'$ より

$$-u' + \frac{1}{x}u = \frac{\log x}{x}$$

これは u について線形なので，u についての標準形に直すと

$$u' - \frac{1}{x}u = -\frac{\log x}{x}$$

となる。そこで積分因子 μ を求めると $\mu = \exp(-\int(1/x)dx) = \exp(-\log x) = 1/x$ となる。これを u についての標準形にかけると，左辺は必ず積分因子かける従属変数の導関数になるので

$$(\frac{u}{x})' = -\frac{\log x}{x^2}$$

となる。この両辺を x について積分すると

$$\begin{aligned} \frac{u}{x} &= -\int \frac{\log x}{x^2}dx \quad \begin{pmatrix} v = \log x & dw = dx/x^2 \\ dv = dx/x & w = -1/x \end{pmatrix} \\ &= -[-\frac{\log x}{x} - \int \frac{-1}{x^2}dx] = \frac{\log x}{x} + \frac{1}{x} + c \end{aligned}$$

これより $u = \log x + 1 + cx$ となり

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\log x + 1 + cx} \quad \boxed{終}$$

(c) 標準形に直すと

$$y' - \cos xy = -y^2 \cos x$$

となり，これは Bernoulli の方程式である。そこで両辺に y^{-2} をかけて整理すると

$$y^{-2}y' - \cos xy^{1-2} = -\cos x$$

となる。ここで $u = y^{1-2} = y^{-1}$ とおくと $u' = -y^{-2}y'$ より

$$-u' - \cos xu = -\cos x$$

これは u について線形なので，u についての標準形に直すと

$$u' + \cos xu = \cos x$$

となる。そこで積分因子 μ を求めると $\mu = \exp(\int \cos xdx) = \exp(\sin x) = e^{\sin x}$ となる。これを u についての標準形にかけると，左辺は必ず積分因子かける従属変数の導関数になるので

$$(e^{\sin x}u)' = e^{\sin x}\cos x$$

となる。この両辺を x について積分すると

$$\begin{aligned} e^{\sin x}u &= \int e^{\sin x}\cos xdx \quad \left(t = \sin x \quad dt = \cos xdx \right) \\ &= \int e^t dt = e^t + c = e^{\sin x} + c \end{aligned}$$

これより $u = (e^{\sin x} + c)/e^{\sin x}$ となり

$$y = \frac{1}{u} = \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x} + c} \quad \boxed{終}$$

2(a)　標準形に直すと

$$y' + y = -4x(x+1)y^{-1}$$

となり，これは Bernoulli の方程式である。そこで両辺に y をかけて整理すると

$$yy' + y^2 = -4x(x+1)$$

となる。ここで $u = y^2$ とおくと $u' = 2yy'$ より

$$\frac{u'}{2} + u = -4x(x+1)$$

これは u について線形なので，u についての標準形に直すと

$$u' + 2u = -8x(x+1)$$

となる。そこで積分因子 μ を求めると $\mu = \exp(\int 2dx) = \exp(2x) = e^{2x}$ となる。これを u についての標準形にかけると，左辺は必ず積分因子かける従属変数の導関数になるので

$$(e^{2x}u)' = -8x(x+1)e^{2x}$$

となる。この両辺を x について積分すると

$$\begin{aligned} e^{2x}u &= -8\int (x^2e^{2x} + xe^{2x})dx \quad \begin{pmatrix} v = x^2 & dw = e^{2x}dx \\ dv = 2xdx & w = \frac{1}{2}e^{2x} \end{pmatrix} \\ &= -8(\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}dx + \int xe^{2x}dx + c) \\ &= -4x^2e^{2x} + c \end{aligned}$$

これより

$$y^2 = u = -4x^2 + ce^{-2x} \quad \boxed{終}$$

(b)　$(y+1)y' + x(y^2+2y) = x$ において，$u = y^2 + 2y$ とおくと $u' = 2yy' + 2y' = 2y'(y+1)$ となる。これらを元の微分方程式に代入すると

$$\frac{u'}{2} + ux = x$$

これは u について線形なので，u についての標準形に直すと

$$u' + 2xu = 2x$$

となる。そこで積分因子 μ を求めると $\mu = \exp(\int 2xdx) = \exp(x^2) = e^{x^2}$ となる。これを u についての標準形にかけると，左辺は必ず積分因子かける従属変数の導関数になるので

$$(e^{x^2}u)' = 2xe^{x^2}$$

となる。この両辺を x について積分すると

$$\begin{aligned} e^{x^2}u &= 2\int xe^{x^2}dx \ \left(\ t = x^2 \quad dt = 2xdx \ \right) \\ &= \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c \end{aligned}$$

これより $u = 1 + ce^{-x^2}$ となり

$$u = y^2 + 2y = 1 + ce^{-x^2} \quad \boxed{終}$$

3(a) 標準形に直すと

$$y' = -y^2 - \frac{4x}{x^2}y - \frac{2}{x^2}$$

となり，これは Riccati の方程式である。$f(x) = -2/x$ はこの方程式のひとつの解であるから $y = -2/x+1/u$ とおくと $y' = \frac{2}{x^2} - u'/u^2$。これらを標準形に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2} - u'/u^2 &= -(-\frac{2}{x} + \frac{1}{u})^2 - \frac{4x}{x^2}(-\frac{2}{x} + \frac{1}{u}) - \frac{2}{x^2} \\ &= -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{xu} - \frac{1}{u^2} + \frac{8}{x^2} - \frac{4}{xu} - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{2}{x^2} - \frac{1}{u^2} \end{aligned}$$

となる。整理すると $u' = 1$。よって

$$u = x + c$$

ここで $y = -2/x + 1/u$ より

$$y = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x+c} = -\frac{x+2c}{x(x+c)} \quad \boxed{終}$$

(b) 標準形に直すと

$$y' = -y^2 + \frac{1}{x}y + x^2$$

となり，これは Riccati の方程式である。そこでこの方程式の解をひとつ見つける。$f(x) = x$ はこの方程式のひとつの解となるので $y = x + 1/u$ とおくと $y' = 1 - u'/u^2$。これらを標準形に代入すると

$$\begin{aligned} 1 - u'/u^2 &= -(x + \frac{1}{u})^2 + \frac{1}{x}(x + \frac{1}{u}) + x^2 \\ &= -x^2 - 2\frac{x}{u} - \frac{1}{u^2} + 1 + \frac{1}{ux} + x^2 \\ &= 1 - 2\frac{x}{u} + \frac{1}{ux} - \frac{1}{u^2} \end{aligned}$$

となる。整理すると $u' = 2ux - \frac{u}{x} + 1$。これは u について一階線形なので標準形に書き直すと

$$u' + (\frac{1}{x} - 2x)u = 1$$

ここで積分因子 μ を求めると $\mu = \exp(\int(1/x - 2x)dx) = \exp(\log x - x^2) = e^{\log x}e^{-x^2} = xe^{-x^2}$ となる。これを u についての標準形にかけると，左辺は必ず積分因子かける従属変数の導関数になるので

$$(xe^{-x^2}u)' = xe^{-x^2}$$

となる。この両辺を x について積分すると

$$\begin{aligned} xe^{x^2}u &= \int xe^{x^2}dx \ \left(\ t=-x^2 \quad dt=-2xdx \ \right) \\ &= -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c \end{aligned}$$

これより $u = -1/2x + c/xe^{-x^2} = (2ce^{x^2}-1)/2x$ となる。よって

$$y = x + \frac{1}{u} = x + \frac{2x}{2ce^{x^2}-1} \quad \boxed{終}$$

1.8　数値計算法

演習問題 1.8

1. 次の微分方程式の方向場と $(1,0),(0,1),(1,1)$ を通る解曲線を描きなさい。
(a) $y' = y$
(b) $y' - xy + 1 = 0$
2. $Euler$ 法を用いて次の初期値問題の近似解を求めよ。
(a) $y' = x + y,\ y(0) = 0$ のとき $y(3)$ を求めよ。ただし $h = 1$
(b) $y' = x^2,\ y(1) = 2$ のとき $y(4)$ を求めよ。ただし $h = \frac{1}{2}$

解答

1(a), (b)　省略

2(a)
$$\begin{array}{ll} x_0 = 0 & y_0 = 0 \\ x_1 = 1 & y_1 = f(x_0, y_0)h + y_0 = f(0,0) + 0 = 0 \\ x_2 = 2 & y_2 = f(1,0) + y_1 = 1 \\ x_3 = 3 & y_3 = f(2,1) + y_2 = 3 + 1 = 4 \end{array} \quad \boxed{終}$$

(b)
$$\begin{array}{ll} x_0 = 1 & y_0 = 2 \\ x_1 = 3/2 & y_1 = f(x_0, y_0)h + y_0 = f(1,2)(1/2) + 2 = 5/2 \\ x_2 = 2 & y_2 = f(3/2, 5/2)(1/2) + 5/2 = 29/8 \\ x_3 = 5/2 & y_3 = f(2, 5/2)(1/2) + 29/8 = 45/8 \\ x_4 = 3 & y_4 = f(5/2, 45/8)(1/2) + 45/8 = 70/8 \\ x_5 = 7/2 & y_5 = f(3, 70/8)(1/2) + 70/8 = 106/8 \\ x_6 = 4 & y_6 = f(7/2, 106/8)(1/2) + 106/8 = 155/8 \end{array} \quad \boxed{終}$$

第2章　線形微分方程式

2.1　線形微分方程式の解

演習問題 2.1

1.
次の微分方程式は e^{mx} の形をした解を持っている。n 個の 1 次独立な解を求め，一般解を表わせ。またこれらの解が 1 次独立であることを Wronski の行列式を用いて示せ。
(a) $y''' + y'' - 10y' + 8y = 0$　(b) $y'' + 4y' + 3y = 0$
(c) $y'' - y' = 0$　(d) $y''' - 8y'' + 7y' = 0$
2. 次の微分方程式は $\cos mx, \sin mx$ の形をした解を持っている。一般解を求めよ。
(a) $y'' + 4y = 0$　(b) $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$
3. 次の微分方程式は x^m の形をした解を持っている。一般解を求めよ。
(a) $x^2y'' + xy' - 4y = 0$　(b) $x^2y'' - xy' - 3y = 0$

解答

1(a)　$L(y) = y''' + y'' - 10y' + 8y$ とおくと

$$\begin{aligned} L(e^{mx}) &= m^3e^{mx} + m^2e^{mx} - 10me^{mx} + 8e^{mx} \\ &= e^{mx}(m^3 + m^2 - 10m + 8) \\ &= e^{mx}(m-1)(m^2+2m-8) = e^{mx}(m-1)(m-2)(m+4) \end{aligned}$$

より $m = -4, 1, 2$ のとき，$L(e^{mx}) = 0$ となる。よって e^{-4x}, e^x, e^{2x} は解であり一般解は

$$y = c_1e^{-4x} + c_2e^x + c_3e^{2x}$$

となる。またこれらの解が確かに一次独立であることを示すには Wronski の行列式が零でないことを示せばよい。

$$W(e^{-4x}, e^x, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{-4x} & e^x & e^{2x} \\ -4e^{-4x} & e^x & 2e^{2x} \\ 16e^{-4x} & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^{-4x+x+2x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 16 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 30e^{-x} \neq 0$$

$\boxed{\text{終}}$

(b)　$L(y) = y'' + 4y' + 3y$ とおくと

$$\begin{aligned} L(e^{mx}) &= m^2e^{mx} + 4me^{mx} + 3e^{mx} \\ &= e^{mx}(m^2 + 4m + 3) \\ &= e^{mx}(m+1)(m+3) \end{aligned}$$

より $m=-3,-1$ のとき，$L(e^{mx})=0$ となる。よって e^{-3x}, e^{-x} は解であり一般解は

$$y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-x}$$

となる。またこれらの解が確かに一次独立であることを示すには Wronski の行列式が零でないことを示せばよい。

$$W(e^{-3x},e^{-x})=\begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{-x} \\ -3e^{-3x} & -e^{-x} \end{vmatrix}=2e^{-4x}\neq 0 \ \boxed{終}$$

(c)　$L(y)=y''-y'$ とおくと

$$\begin{aligned} L(e^{mx}) &= m^2e^{mx}-me^{mx} \\ &= e^{mx}(m^2-m) \\ &= e^{mx}(m(m-1)) \end{aligned}$$

より $m=0,1$ のとき，$L(e^{mx})=0$ となる。よって $1, e^x$ は解であり一般解は

$$y=c_1+c_2e^x$$

となる。またこれらの解が確かに一次独立であることを示すには Wronski の行列式が零でないことを示せばよい。

$$W(1,e^x)=\begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix}=e^x\neq 0 \ \boxed{終}$$

(d)　$L(y)=y'''-8y''+7y'$ とおくと

$$\begin{aligned} L(e^{mx}) &= m^3e^{mx}-8m^2e^{mx}+7me^{mx} \\ &= e^{mx}(m^3-8m^2+7m) \\ &= e^{mx}(m(m^2-8m+7))=e^{mx}(m(m-1)(m-7)) \end{aligned}$$

より $m=0,1,7$ のとき，$L(e^{mx})=0$ となる。よって $1, e^x, e^{7x}$ は解であり一般解は

$$y=c_1+c_2e^x+c_3e^{7x}$$

となる。またこれらの解が確かに一次独立であることを示すには Wronski の行列式が零でないことを示せばよい。

$$W(1,e^x,e^{7x})=\begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{7x} \\ 0 & e^x & 7e^{7x} \\ 0 & e^x & 49e^{7x} \end{vmatrix}=42e^{8x}\neq 0 \ \boxed{終}$$

2(a)　$L(y)=y''+4y$ とおくと

$$\begin{aligned} L(\cos mx) &= -m^2\cos mx+4\cos mx \\ &= \cos mx(4-m^2) \\ &= \cos mx(2+m)(2-m) \end{aligned}$$

より $m=-2,2$ のとき，$L(\cos mx)=0$ となる。よって $\cos(-2x)=\cos 2x$ は解である。また

$$\begin{aligned} L(\sin mx) &= -m^2\sin mx+4\sin mx \\ &= \sin mx(4-m^2) \\ &= \sin mx(2+m)(2-m) \end{aligned}$$

より $m=-2,2$ のとき，$L(\sin mx)=0$ となる。よって $\sin -2x=-\sin 2x$ は解である。ここで $\cos 2x$ と $\sin 2x$ は

$$W(\cos 2x,\sin 2x)=\begin{vmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ -2\sin 2x & 2\cos 2x\end{vmatrix}=2$$

より一次独立。よって一般解は

$$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x \quad \boxed{終}$$

(b)　$L(y)=y^{(4)}+4y''+3y$ とおくと

$$\begin{aligned}L(\cos mx) &= m^4\cos mx-4m^2\cos mx+3\cos mx\\ &= \cos mx(m^4-4m^2+3)\\ &= \cos mx(m^2-1)(m^2-3)\end{aligned}$$

より $m=\pm1,\pm\sqrt{3}$ のとき，$L(\cos mx)=0$ となる。よって $\cos x,\cos\sqrt{3}x$ は解である。また

$$\begin{aligned}L(\sin mx) &= m^4\sin mx-4m^2\sin mx+3\sin mx\\ &= \sin mx(m^4-4m^2+3)\\ &= \sin mx(m^2-1)(m^2-3)\end{aligned}$$

より $m=\pm1,\pm\sqrt{3}$ のとき，$L(\sin mx)=0$ となる。よって $\sin x,\sin\sqrt{3}x$ は解である。ここで $\cos x,\cos\sqrt{3}x,\sin x,\sin\sqrt{3}x$ が 1 次独立か Wronski を用いて調べると

$$\begin{aligned}W &= \begin{vmatrix}\cos x & \cos\sqrt{3}x & \sin x & \sin\sqrt{3}x\\ -\sin x & -\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x & \cos x & \sqrt{3}\cos\sqrt{3}x\\ -\cos x & -3\cos\sqrt{3}x & -\sin x & -3\sin\sqrt{3}x\\ \sin x & 3\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x & -\cos x & -3\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x\end{vmatrix}\\ &= -4\sqrt{3}\end{aligned}$$

より一次独立。よって一般解は

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3\cos\sqrt{3}x+c_4\sin\sqrt{3}x \quad \boxed{終}$$

3(a)　$L(y)=x^2y''+xy'-4y$ とおくと

$$\begin{aligned}L(x^m) &= x^2m(m-1)x^{m-2}+xmx^{m-1}-4x^m\\ &= x^m(m^2-m+m-4)=x^m(m^2-4)\\ &= x^m(m+2)(m-2)\end{aligned}$$

より $m=\pm2$ のとき，$L(x^m)=0$ となる。よって x^{-2},x^2 は解である。ここで x^{-2},x^2 は

$$W(x^{-2},x^2)=\begin{vmatrix}x^{-2} & x^2\\ -2x^{-1} & 2x\end{vmatrix}=4x^{-1}$$

より一次独立。よって一般解は

$$y=c_1x^{-2}+c_2x^2 \quad \boxed{終}$$

(b) $L(y) = x^2y'' - xy' - 3y$ とおくと

$$\begin{aligned} L(x^m) &= x^2m(m-1)x^{m-2} - xmx^{m-1} - 3x^m \\ &= x^m(m^2 - m - m - 3) = x^m(m^2 - 2m - 3) \\ &= x^m(m+1)(m-3) \end{aligned}$$

より $m = -1, 3$ のとき，$L(x^m) = 0$ となる。よって x^{-1}, x^3 は解である。ここで x^{-1}, x^3 は

$$W(x^{-1}, x^3) = \begin{vmatrix} x^{-1} & x^3 \\ -x^{-2} & 3x^2 \end{vmatrix} = 4x$$

より一次独立。よって一般解は

$$y = c_1x^{-1} + c_2x^3 \quad \boxed{\text{終}}$$

2.2　階数低減法

演習問題 2.2

1. 階数低減法を用いて次の微分方程式を解け。
 (a) $y'' - 3y' + 2y = 0,\ y_1 = e^{2x}$　(b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0,\ y_1 = x^2$
 (c) $y'' - y = e^{-x},\ y_1 = e^{-x}$　(d) $y'' + y = \sec x,\ y_1 = \cos x$

2.
$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ の 1 つの解が $y_1(x)$ のとき，階数低減法をもちいて，もう 1 つの解 $y_2(x)$ を求めると

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}dx$$

で与えられることを示せ。また $\{y_1, y_2\}$ は 1 次独立であることを示せ。

解答

1(a)　$y = uy_1 = ue^{2x}$ とおくと

$$\begin{array}{rcl} 2(y &=& ue^{2x}) \\ -3(y' &=& 2ue^{2x} + u'e^{2x}) \\ \underline{+y''} &=& \underline{4ue^{2x} + 4u'e^{2x} + u''e^{2x}} \\ 0 &=& u'e^{2x} + u''e^{2x} \end{array}$$

より

$$u'' + u' = 0$$

を得る。ここで $w = u'$ とおくと

$$w' + w = 0$$

となり，これは 1 階の線形微分方程式または変数分離形と考えられる。積分因子を用いて解くと $\mu = e^{\int dx} = e^x$ より，これを両辺にかけて $(e^xw)' = 0$ を得る。これを解くと $e^xw = c_1$ より

$$w = c_1e^{-x}$$

ここで $w = u'$ に注意すると

$$u = \int c_1 e^{-x} dx = c_1 e^{-x} + c_2$$

最後に $y = ue^{2x}$ であることに注意して次の一般解を得る。

$$y = ue^{2x} = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} \quad \boxed{\text{終}}$$

(b) $y = uy_1 = ux^2$ とおくと

$$\begin{array}{rcl} 4(y & = & ux^2) \\ -3x(y' & = & 2ux + u'x^2) \\ \underline{x^2 y''} & = & \underline{2u + 4u'x + u''x^2} \\ 0 & = & u'x^3 + u''x^4 \end{array}$$

を得る。ここで $w = u'$ とおくと

$$x^4 w' + x^3 w = 0$$

となり，これは 1 階の線形微分方程式または変数分離形と考えられる。変数分離法を用いて解くと

$$\frac{w'}{w} = -\frac{1}{x}$$

より $\log|w| = -\log|x| + c$。よって $w = c_1/x$ となる。ここで $w = u'$ に注意すると

$$u = \int \frac{c_1}{x} dx = c_1 \log x + c_2$$

最後に $y = uex^2$ であることに注意すると次の一般解を得る。

$$y = ux^2 = c_1 x^2 \log x + c_2 x^2 \quad \boxed{\text{終}}$$

(c) $y = uy_1 = ue^{-x}$ とおくと

$$\begin{array}{rcl} -(y & = & ue^{-x}) \\ y' & = & -ue^{-x} + u'e^{-x} \\ \underline{+y''} & = & \underline{ue^{-x} - 2u'e^{-x} + u''e^{-x}} \\ e^{-x} & = & -2u'e^{-x} + u''e^{-x} \end{array}$$

より

$$u'' - 2u' = 1$$

を得る。ここで $w = u'$ とおくと

$$w' - 2w = 1$$

となり，これは 1 階の線形微分方程式より積分因子を求めると $\mu = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$ となる。これを両辺にかけると左辺は必ず積分因子かける従属変数の導関数より

$$(e^{-2x} w)' = e^{-2x}$$

を得る。これを解くと

$$e^{-2x}w = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

より

$$w = -\frac{1}{2} + ce^{2x}$$

ここで $w = u'$ に注意すると

$$u = \int(-\frac{1}{2} + ce^{2x})dx = -\frac{x}{2} + c_1e^{2x} + c_2$$

最後に $y = ue^{-x}$ であることに注意して次の一般解を得る。

$$y = ue^{-x} = c_1e^{x} + c_2e^{-x} - \frac{xe^{-x}}{2} \quad \boxed{終}$$

(d)　$y = uy_1 = u\cos x$ とおくと

$$\begin{array}{rcl} +(y & = & u\cos x) \\ y' & = & u'\cos x - u\sin x \\ \underline{+y''} & = & \underline{u''\cos x - 2u'\sin x - u\cos x} \\ \sec x & = & u''\cos x - 2u'\sin x \end{array}$$

より

$$u'' - 2u'\tan x = \sec^2 x$$

を得る。ここで $w = u'$ とおくと

$$w' - 2\tan xw = \sec^2 x$$

となり，これは 1 階の線形微分方程式より積分因子を求めると $\mu = e^{\int -2\tan x dx} = e^{2\log\cos x} = \cos^2 x$ となる。これを両辺にかけると左辺は必ず積分因子かける従属変数の導関数より $(\cos^2 xw)' = 1$ を得る。これを解くと

$$\cos^2 xw = \int dx = x + c_1$$

より

$$w = (x + c_1)\sec^2 x$$

ここで $w = u'$ に注意すると

$$\begin{array}{rcl} u & = & \displaystyle\int(x + c_1)\sec^2 xdx \quad \left(\begin{array}{ll} u = x + c_1 & dv = \sec^2 xdx \\ du = dx & v = \int sec^2xdx = \tan x \end{array}\right) \\ & = & (x + c)\tan x - \displaystyle\int \tan xdx = (x + c_1)\tan x + \log|\cos x| + c_2 \end{array}$$

最後に $y = u\cos x$ であることに注意して次の一般解を得る。

$$y = u\cos x = c_1\sin x + c_2\cos x + \cos x\log|\cos x| + x\sin x \quad \boxed{終}$$

2.　$y_2 = uy_1$ とおくと

$$\begin{array}{rcl} +a_0(x)(y_2 & = & uy_1) \\ a_1(x)(y_2' & = & u'y_1 + uy_1') \\ \underline{+y_2''} & = & \underline{u''y_1 + 2u'y_1' + uy''} \\ 0 & = & u(y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y) + u''y_1 + 2u'y_1' + a_1(x)u'y_1 \end{array}$$

より

$$u''y_1 + (2y_1' + a_1(x)y_1)u' = 0$$

を得る。ここで $w = u'$ とおくと

$$w'y_1 + (2y_1' + a_1(x)y_1)w = 0$$

となり，これは 1 階の線形微分方程式より積分因子を求めると

$$\mu = e^{\int (\frac{2y_1'}{y_1} + a_1(x))dx} = e^{2\log y_1 + \int a_1(x)dx} = y_1^2 e^{\int a_1(x)dx}$$

となる。これを両辺にかけると左辺は必ず積分因子かける従属変数の導関数より

$$(y_1^2 e^{\int a_1(x)dx} w)' = 0$$

を得る。これを解くと

$$y_1^2 e^{\int a_1(x)dx} w = c$$

より

$$w = \frac{ce^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}$$

ここで $w = u'$ に注意すると

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{ce^{\int a_1(x)dx}}{y_1^2} \\ &= \int \frac{ce^{\int a_1(x)dx}}{y_1^2} \end{aligned}$$

最後に $y_2 = uy_1$ より

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{\int a_1(x)dx}}{y_1^2} \quad \boxed{終}$$

2.3　高階同次線形微分方程式の解

演習問題 2.3

1. 次の微分方程式の基本解を求めよ。
(a) $y'' - 9y = 0$　　(b) $y''' + y = 0$
(c) $y''' - 3y' - 2y = 0$　(d) $y^{(5)} + 18y''' + 81y' = 0$
2. 次の微分方程式の一般解を求めよ。
(a)　4 階の同次線形微分方程式で特性方程式の根が $m = -2, 1, 1, 1$
(b)　6 階の同次線形微分方程式で特性方程式の根が $m = 0, 0, -1 \pm 2i, -1 \pm 2i$
3. 次の初期値問題を解け。
(a) $y'' - y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 1$
(b) $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 2$
(c) $y''' + 7y'' + 19y' + 13y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = -12$
(d) $y^{(4)} + 2y''' + 10y'' = 0,\ y(0) = 5, y'(0) = -3, y''(0) = 0, y'''(0) = 0$

解答

1(a)　$y = e^{mx}$ を解とおくと，特性方程式 $m^2 - 9 = 0$ を得る。これより特性根は $m = 3, 3$。よって基本解は

$$\{e^{3x}, xe^{3x}\}$$

で与えられる。 $\boxed{終}$

(b)　$y = e^{mx}$ を解とおくと，特性方程式 $m^3 + 1 = 0$ を得る。

$$m^3 + 1 = (m+1)(m^2 - m + 1)$$

より特性根は $m = -1, \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$。よって基本解は

$$\{e^{-x}, e^{\frac{x}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}), e^{\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})\}$$

で与えられる。 $\boxed{終}$

(c)　$y = e^{mx}$ を解とおくと，特性方程式 $m^3 - 3m - 2 = 0$ を得る。

$$m^3 - 3m - 2 = (m+1)(m^2 - m - 2) = (m+1)(m+1)(m-2)$$

より特性根は $m = -1, -1, 2$。よって基本解は

$$\{e^{-x}, xe^{-x}, e^{2x}\}$$

で与えられる。 $\boxed{終}$

(d)　$y = e^{mx}$ を解とおくと，特性方程式 $m^5 + 18m^3 + 81m = 0$ を得る。

$$m^5 + 18m^3 + 81m = m(m^4 + 18m^2 + 81) = m(m^2 + 9)^2$$

より特性根は $m = 0, \pm 3i, \pm 3i$。よって基本解は

$$\{1, \cos 3x, x\cos 3x, \sin 3x, x\sin 3x\}$$

で与えられる。 $\boxed{終}$

2(a)　特性方程式の根が $m = -2, 1, 1, 1$ より基本解は

$$\{e^{-2x}, e^x, xe^x, x^2e^x\}$$

で与えられ，一般解は

$$y = c_1e^{-2x} + (c_2 + c_3x + c_4x^2)e^x \quad \boxed{終}$$

(b)　特性方程式の根が $m = 0, 0, -1 + 2i, -1 + 2i$ より基本解は

$$\{1, x, e^{-x}\cos 2x, e^{-x}\sin 2x, xe^{-x}\cos 2x, xe^{-x}\sin 2x\}$$

で与えられ，一般解は

$$y = c_1 + c_2x + e^{-x}[(c_3 + c_4)\cos 2x + (c_5 + c_6x)\sin 2x] \quad \boxed{終}$$

3(a)　$y = e^{mx}$ を解とおくと，特性方程式 $m^2 - 1 = 0$ を得る。

$$m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$$

より特性根は $m = -1, 1$。よって基本解は

$$\{e^{-x}, e^x\}$$

で与えられ，一般解は

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$$

ここで初期値 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ より

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = c_1 + c_2 \\ 1 &= y'(0) = -c_1 + c_2 \end{aligned}$$

この連立方程式を解くと $c_1 = 0, c_2 = 1$。よって

$$y = e^x \quad \boxed{\text{終}}$$

(b)　$y = e^{mx}$ を解とおくと，特性方程式 $m^2 - 6m + 9 = 0$ を得る。

$$m^2 - 6m + 9 = (m-3)^2$$

より特性根は $m = 3, 3$。よって基本解は

$$\{e^{3x}, xe^{3x}\}$$

で与えられ，一般解は

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

ここで初期値 $y(0) = 1, y'(0) = 2$ より

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = c_1 \\ 2 &= y'(0) = 3c_1 + c_2 \end{aligned}$$

この連立方程式を解くと $c_1 = 1, c_2 = -1$。よって

$$y = (1-x)e^{3x} \quad \boxed{\text{終}}$$

(c)　$y = e^{mx}$ を解とおくと，特性方程式 $m^3 + 7m^2 + 19m + 13 = 0$ を得る。

$$m^3 + 7m^2 + 19m + 13 = (m+1)(m^2 + 6m + 13)$$

より特性根は $m = -1$ と $m = \ -3 \pm \sqrt{3^2 - 13} = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm 2i$。よって基本解は

$$\{e^{-x}, e^{-3x}\cos 2x, e^{3x}\sin 2x\}$$

で与えられ，一般解は

$$y = c_1 e^{-x} + e^{-3x}[c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x]$$

ここで初期値 $y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = -12$ と

$$\begin{aligned} y' &= -c_1 e^{-x} - 3e^{-3x}[c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x] \\ &+ \ e^{-3x}[-2c_2 \sin 2x + 2c_3 \cos 2x] \\ y'' &= c_1 e^{-x} + 9e^{-3x}[c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x] \\ &- \ 6e^{-3x}[-2c_2 \sin 2x + 2c_3 \cos 2x] + e^{-3x}[-4c_2 \cos 2x - 4c_3 \sin 2x] \end{aligned}$$

より

$$0 = y(0) = c_1 + c_2 \tag{2.1}$$
$$2 = y'(0) = -c_1 - 3c_2 + 2c_3 \tag{2.2}$$
$$-12 = y''(0) = c_1 + 5c_2 + 12c_3 \tag{2.3}$$

この連立方程式を解くと $2 = -2c_2 + 2c_3$, $-12 = 6c_2 + 12c_3$ より $c_1 = 4/3, c_2 = -4/3, c_3 = -1/3$。よって

$$y = \frac{4}{3}e^{-x} - e^{-3x}[\frac{4}{3}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin 2x] \quad \boxed{終}$$

(d) $y = e^{mx}$ を解とおくと，特性方程式 $m^4 + 2m^3 + 10m^2 = 0$ を得る。

$$m^4 + 2m^3 + 10m^2 = m^2(m^2 + 2m + 10)$$

より特性根は $m = 0, 0$ と $m = -1 \pm \sqrt{1^2 - 10} = -1 \pm \sqrt{-9} = -1 \pm 3i$。よって基本解は

$$\{1, x, e^{-x}\cos 3x, e^{-x}\sin 3x\}$$

で与えられ，一般解は

$$y = c_1 + c_2 x + e^{-x}[c_3\cos 3x + c_4 \sin 3x]$$

ここで初期値 $y(0) = 5, y'(0) = -3, y''(0) = 0, y'''(0) = 0$ と

$$\begin{aligned}
y' &= c_2 - e^{-x}[c_3\cos 3x + c_4\sin 3x] \\
&+ e^{-x}[-3c_3\sin 3x + 3c_4\cos 3x \\
y'' &= e^{-x}[c_3\cos 3x + c_4\sin 3x] \\
&- 2e^{-x}[-3c_3\sin 3x + 3c_4\cos 3x] + e^{-x}[-9c_3\cos 3x - 9c_4\sin 3x] \\
y''' &= -e^{-x}[c_3\cos 3x + c_4\sin 3x] + 3e^{-x}[-3c_3\sin 3x + 3c_4\cos 3x] \\
&- 3e^{-x}[-9c_3\cos 3x - 9c_4\sin 3x] + e^{-x}[27c_3\sin 3x - 27c_4\cos 3x]
\end{aligned}$$

より

$$5 = y(0) = c_1 + c_3 \tag{2.4}$$
$$-3 = y'(0) = c_2 - c_3 + 3c_4 \tag{2.5}$$
$$0 = y''(0) = c_3 - 6c_4 - 9c_3 \tag{2.6}$$
$$0 = y'''(0) = -c_3 + 9c_4 + 27c_3 - 27c_4 \tag{2.7}$$

この連立方程式を解くと $c_1 = 5, c_2 = -3, c_3 = c_4 = 0$。よって

$$y = 5 - 3x \quad \boxed{終}$$

2.4　未定係数法

演習問題 2.4

1. 未定係数法を用いて次の微分方程式を解け。

(a) $y'' - 4y' + 4y = e^x$　　(b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

(c) $y'' + 4y = \sin 2x$　　(d) $y'' - 3y' + 2y = e^x + e^{2x} + e^{-x}$

(e) $y''' - 3y' - 2y = e^{2x}\sin 2x$　　(f) $y^{(4)} + 2y'' + y = x^2 e^x$

解答

1(a)　補助方程式 $L(y) = y'' - 4y' + 4y = 0$ の特性方程式は $m^2 - 4m + 4 = 0$ より特性根 $m = 2$ 重根 を得る。よって余関数 y_c は

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

となる。次に特殊解 y_p を未定係数法を用いて求める。$D = d/dx, H(D) = D - 1$ とおくと，

$$H(D)e^x = (D-1)e^x = De^x - e^x = e^x - e^x = 0$$

より求める特殊解 y_p は

$$(H(D)L(D))y = (D-1)(D^2 - 4D + 4)y = ((D-1)(D-2)^2)y = 0$$

の解である。この方程式の特性方程式は $(m-1)(m-2)^2 = 0$ より基本解は $e^x,\ e^{2x},\ xe^{2x}$ であるが，e^{2x}, xe^{2x} は余関数の解なので省くと

$$y_p = Ae^x$$

と表わせる。これを $L(D)y = e^x$ に代入すると

$$L(D)Ae^x = Ae^x - 4Ae^x + 4Ae^x = e^x$$

となるので，$A = 1$ を得る。これより特殊解は

$$y_p = e^x$$

よって，一般解は

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + e^x \quad \boxed{終}$$

(b)　補助方程式 $L(y) = y'' - 4y' + 4y = 0$ の特性方程式は $m^2 - 4m + 4 = 0$ より特性根 $m = 2$ 重根 を得る。よって余関数 y_c は

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

となる。次に特殊解 y_p を未定係数法を用いて求める。$D = d/dx, H(D) = D - 2$ とおくと，

$$H(D)e^x = (D-2)e^{2x} = De^{2x} - 2e^{2x} = 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$$

より求める特殊解 y_p は

$$(H(D)L(D))y = (D-2)(D^2 - 4D + 4)y = ((D-2)^3)y = 0$$

の解である。この方程式の特性方程式は $(m-2)^3 = 0$ より基本解は $e^{2x},\ xe^{2x},\ x^2e^{2x}$ であるが，e^{2x}, xe^{2x} は余関数の解なので省くと

$$y_p = Ax^2 e^x$$

と表わせる。これを $L(D)y = e^{2x}$ に代入すると

$$\begin{array}{ll} 4(y_p & = Ax^2e^{2x}) \\ -4(Dy_p & = 2Ax^2e^{2x} + 2Axe^{2x}) \\ +\underline{D^2y_p} & = \underline{4Ax^2e^{2x} + 8Axe^{2x} + 2Ae^{2x}} \\ e^{2x} & = 2Ae^{2x} \end{array}$$

より $A = 1/2$ を得る。これより特殊解は

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

よって，一般解は

$$y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} \quad \boxed{終}$$

(c) 補助方程式 $L(y) = y'' + 4y = 0$ の特性方程式は $m^2 + 4 = 0$ より特性根 $m = \pm 2i$ を得る。よって余関数 y_c は

$$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

となる。次に特殊解 y_p を未定係数法を用いて求める。$D = d/dx, H(D) = D^2 + 4$ とおくと，

$$H(D)\sin 2x = (D^2 + 4)\sin 2x = D^2 \sin 2x + 4\sin 2x = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0$$

より求める特殊解 y_p は

$$(H(D)L(D))y = ((D^2 + 4)^2)y = 0$$

の解である。この方程式の特性方程式は $(m^2 + 4)^2 = 0$ より基本解は

$$\{\cos 2x, \sin 2x, x\cos 2x, x\sin 2x\}$$

であるが，$\cos 2x, \sin 2x$ は余関数の解なので省くと

$$y_p = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$$

と表わせる。これを $L(D)y = \sin 2x$ に代入すると

$$\begin{array}{ll} 4(y_p & = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x) \\ Dy_p & = A\cos 2x - 2Ax\sin 2x + B\sin 2x + 2Bx\cos 2x \\ +\underline{D^2y_p} & = \underline{-4A\sin 2x - 4Ax\cos 2x + 4B\cos 2x - 4Bx\sin 2x} \\ \sin 2x & = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x \end{array}$$

より $A = -1/4,\ B = 0$ を得る。これより特殊解は

$$y_p = -\frac{1}{4}x\cos 2x$$

よって，一般解は

$$y = y_c + y_p = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x \quad \boxed{終}$$

(d) 補助方程式 $L(y) = y'' - 3y' + 2y = 0$ の特性方程式は $m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2) = 0$ より特性根 $m = 1,\ 2$ を得る。よって余関数 y_c は

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

となる。次に特殊解 y_p を未定係数法を用いて求める。重ね合わせの原理より $L(D)y = e^x$ の特殊解 y_{p_1}, $L(D)y = e^{2x}$ の特殊解 y_{p_2}, $L(D)y = e^{-x}$ の特殊解 y_{p_3} を求めれば $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$ で与えられる。

$$H(D)e^x = (D-1)e^x = e^x - e^x = 0$$

より求める特殊解 y_{p_1} は

$$(H(D)L(D))y = (D-1)^2(D-2)y = 0$$

の解である。この方程式の特性方程式は $(m-1)^2(m-2) = 0$ より基本解は e^x, xe^x, e^{2x} であるが，e^x, e^{2x} は余関数の解なので省くと

$$y_{p_1} = Axe^x$$

と表わせる。次に

$$H(D)e^{2x} = (D-2)e^{2x} = 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$$

より求める特殊解 y_{p_2} は

$$(H(D)L(D))y = ((D-1)(D-2)^2)y = 0$$

の解である。この方程式の特性方程式は $(m-1)(m-2)^2 = 0$ より基本解は e^x, e^{2x}, xe^{2x} であるが，e^x, e^{2x} は余関数の解なので省くと

$$y_{p_2} = Bxe^{2x}$$

と表わせる。最後に

$$H(D)e^{-x} = (D+1)e^{-x} = -e^{-x} + e^{-x} = 0$$

より求める特殊解 y_p は

$$(H(D)L(D))y = ((D+1)(D-1)(D-2))y = 0$$

の解である。この方程式の特性方程式は $(m+1)(m-1)(m-2) = 0$ より基本解は e^{-x}, e^x, e^{2x} であるが，e^x, e^{2x} は余関数の解なので省くと

$$y_{p_1} = Ce^{-x}$$

と表わせる。ここで $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$ を $L(D)y = e^x + e^{2x} + e^{-x}$ に代入すると

$$\begin{array}{ll}
2(y_p & = Axe^x + Bxe^{2x} + Ce^{-x}) \\
-3(Dy_p & = Ae^x + Axe^x + Be^{2x} + 2Bxe^{2x} - Ce^{-x}) \\
\underline{+D^2y_p} & = \underline{2Ae^x + Axe^x + 4Be^{2x} + 4Bxe^{2x} + Ce^{-x}} \\
e^x + e^{2x} + e^{-x} & = -Ae^x + Be^{2x} + 6Ce^{-x}
\end{array}$$

より $A = -1,\ B = 1,\ C = 1/6$ を得る。これより特殊解は

$$y_p = -xe^x + xe^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x}$$

よって，一般解は

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x + xe^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x} \quad \boxed{\text{終}}$$

(e)　補助方程式 $L(y) = y''' - 3y' - 2y = 0$ の特性方程式は $m^3 - 3m - 2 = (m+1)(m^2 - m - 2) = (m+1)(m+1)(m-2) = 0$ より特性根 $m = -1, -1, 2$ を得る。よって余関数 y_c は

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3e^{2x}$$

となる。次に特殊解 y_p を未定係数法を用いて求める。$D = d/dx, H(D) = D^2 - 4D + 8$ とおくと，

$$H(D)e^{2x}\sin 2x = (D^2 - 4D + 8)e^{2x}\sin 2x = 0$$

より求める特殊解 y_p は

$$(H(D)L(D))y = (D^3 - 3D - 2)(D^2 - 4D + 8)y = 0$$

の解である。この方程式の特性方程式は $(m+1)^2(m-2)(m^2-4m+8) = 0$ より基本解は $e^{-x}, xe^{-x}, e^{2x}, e^{2x}\cos 2x, e^{2x}\sin 2x$ であるが，e^{-x}, xe^{-x}, e^{2x} は余関数の解なので省くと

$$y_p = Ae^{2x}\cos 2x + Be^{2x}\sin 2x$$

と表わせる。これを $L(D)y = e^{2x}\sin 2x$ に代入すると

$$\begin{array}{ll} -2(y_p & = Ae^{2x}\cos 2x + Be^{2x}\sin 2x) \\ -3(Dy_p & = 2Ae^{2x}\cos 2x - 2Ae^{2x}\sin 2x + 2Be^{2x}\sin 2x + 2Be^{2x}\cos 2x \\ D^2y_p & = -8Ae^{2x}\sin 2x + 8Be^{2x}\cos 2x \\ +\underline{D^3y_p} & = -16Ae^{2x}\sin 2x - 16Ae^{2x}\cos 2x + 16Be^{2x}\cos 2x - 16Be^{2x}\sin 2x \\ e^{2x}\sin 2x & = -10Ae^{2x}\sin 2x - 24Ae^{2x}\cos 2x + 10Be^{2x}\cos 2x - 24Be^{2x}\sin 2x \end{array}$$

より連立方程式

$$\left\{\begin{array}{ll} -10A - 24B & = 1 \\ -24A + 10B & = 0 \end{array}\right.$$

を得る。これを解くと $A = 5/338,\ B = -12/338$ を得る。これより特殊解は

$$y_p = \frac{5}{338}e^{2x}\sin 2x - \frac{12}{338}e^{2x}\cos 2x$$

よって，一般解は

$$\begin{array}{rcl} y = y_c + y_p & = & (c_1 + c_2x)e^{-x} + c_3e^{2x} \\ & + & \frac{1}{338}(5e^{2x}\sin 2x - 12e^{2x}\cos 2x) \end{array} \quad \boxed{終}$$

(f)　補助方程式 $L(y) = y^{(iv)} + 2y'' + y = 0$ の特性方程式は $m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2 = 0$ より特性根 $m = \pm 1, \pm 1$ を得る。よって余関数 y_c は

$$y_c = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\sin x$$

となる。次に特殊解 y_p を未定係数法を用いて求める。$H(D) = (D - 1)^3$ とおくと，

$$H(D)x^2e^x = ((D - 1)^3)x^2e^x = (D^3 - 3D^2 + 3D - 1)x^2e^x = 0$$

より求める特殊解 y_p は

$$(H(D)L(D))y = (D^4 + 2D^2 + 1)((D - 1)^3)y = 0$$

の解である。この方程式の特性方程式は $(m^2 + 1)^2(m - 1)^3 = 0$ より基本解は

$$\{\cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x, e^x, xe^x, x^2e^x\}$$

であるが，$\cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x$ は余関数の解なので省くと

$$y_p = Ax^2e^x + Bxe^x + Ce^x$$

と表わせる。これを $L(D)y = x^2e^x$ に代入すると

$$\begin{array}{ll}
+(y_p & = Ax^2e^x + Bxe^x + Ce^x) \\
Dy_p & = Ax^2e^x + 2Axe^x + Bxe^x + Be^x + Ce^x \\
+2(D^2y_p & = Ax^2e^x + 4Axe^x + 2Ae^x + Bxe^x + 2Be^x + Ce^x) \\
D^3y_p & = Ax^2e^x + 6Axe^x + 6Ae^x + Bxe^x + 3Be^x + Ce^x \\
+\underline{D^4y_p} & = \underline{Ax^2e^x + 8Axe^x + 12Ae^x + Bxe^x + 4Be^x + Ce^x} \\
x^2e^x & = 4Ax^2e^x + (16A + 4B)xe^x + (16A + 8B + 4C)e^x
\end{array}$$

より連立方程式

$$\begin{cases}
4A & = 1 \\
16A + 4B & = 0 \\
16A + 8B + 4C & = 0
\end{cases}$$

を得る。これを解くと $A = 1/4,\ B = -1,\ C = 1$ を得る。これより特殊解は

$$y_p = \frac{-1}{4}x^2e^x - xe^x + e^x$$

よって，一般解は

$$\begin{aligned}
y = y_c + y_p \quad &= \quad (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4)\sin x \\
&+ \quad \frac{1}{4}e^x(x^2 - 4x + 4) \ \boxed{終}
\end{aligned}$$

2.5 定数変化法

演習問題 2.5

1. 定数変化法を用いて次の微分方程式を解け。
 (a) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$ (b) $y'' + 4y = \tan 2x$
 (c) $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$ (d) $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$
 (e) $y''' + y' = \tan x$
2.
定数変化法を用いて $y'' + y = f(x)$ の一般解は

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + \int_a^x f(t)\sin(x - t)dt$$

で与えられることを示せ。

解答

1(a) 補助方程式 $y'' + 2y' + y = 0$ の特性方程式は $m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 = 0$ より特性根 $m = -1, -1$ を得る。よって余関数は

$$y_c = (c_1 + c_2x)e^{-x}$$

で与えられる。次に特殊解を求める。定数変化法より

$$y_p = u_1 e^{-x} + u_2 x e^{-x}$$

とおくと，2 つの方程式を得る。

$$\begin{cases} u_1' e^{-x} + u_2' x e^{-x} & = 0 \\ u_1'(-e^{-x}) + u_2'(e^{-x} - xe^{-x}) & = \frac{e^{-x}}{x} \end{cases}$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ \frac{e^{-x}}{x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^{-2x}}{e^{-2x}} = -1 \\ u_2' &= \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{e^{-x}}{x} \end{vmatrix}}{e^{-2x}} = \frac{e^{-2x}/x}{e^{-2x}} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

よって

$$u_1 = -x,\ u_2 = \log|x| \quad (\text{定数無視})$$

となるので，

$$y_p = -xe^{-x} - x\log|x|e^{-x}.$$

ここで，xe^{-x} はすでに余関数で用いられているので，一般解

$$y = y_c + y_p = (c_1 + c_2 x)e^{-x} - x\log|x|e^{-x}$$

を得る。 $\boxed{\text{終}}$

1(b) 補助方程式 $y'' + 4y = 0$ の特性方程式は $m^2 + 4 = 0$ より特性根 $m = \pm 2i$ を得る。よって余関数は

$$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

で与えられる。次に特殊解を求める。定数変化法より

$$y_p = u_1 \cos 2x + u_2 \sin 2x$$

とおくと，2 つの方程式を得る。

$$\begin{cases} u_1' \cos 2x + u_2' \sin 2x & = 0 \\ u_1'(-2\sin 2x) + u_2'(2\cos 2x) & = \tan 2x \end{cases}$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \tan 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = -\frac{\tan 2x \sin 2x}{2(\cos^2 2x + \sin^2 2x)} = -\frac{\tan 2x \sin 2x}{2} \\ u_2' &= \frac{\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \tan 2x \end{vmatrix}}{2} = \frac{\sin 2x}{2} \end{aligned}$$

これより u_1, u_2 を求める。

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos^2 2x - 1}{\cos 2x}dx \\ &= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \sec 2x)dx \\ &= -\frac{1}{4}(\sin 2x + \log|\sec 2x + \tan 2x|) \\ u_2 &= \int \frac{\sin 2x}{2}dx = -\frac{\cos 2x}{4} \end{aligned}$$

となるので，

$$y_p = -\frac{1}{4}\cos 2x(\sin 2x + \log|\sec 2x + \tan 2x|) - \frac{1}{4}\cos 2x \sin 2x.$$

これより一般解

$$\begin{aligned} y = y_c + y_p &= c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x \\ &- \frac{1}{4}\cos 2x \log|\sec 2x + \tan 2x| - \frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x \end{aligned}$$

を得る。 $\boxed{\text{終}}$

1(c) 補助方程式 $y'' - 4y' + 4y = 0$ の特性方程式は $m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0$ より特性根 $m = 2, 2$ を得る。よって余関数は

$$y_c = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

で与えられる。次に特殊解を求める。定数変化法より

$$y_p = u_1 e^{2x} + u_2 x e^{2x}$$

とおくと，2 つの方程式を得る。

$$\begin{cases} u_1' e^{2x} + u_2' x e^{2x} & = 0 \\ u_1'(2e^{2x}) + u_2'(e^{2x} + 2xe^{2x}) & = \frac{e^{2x}}{x} \end{cases}$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ \frac{e^{2x}}{x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix}} = -\frac{e^{4x}}{e^{4x}} = -1 \\ u_2' &= \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \frac{e^{2x}}{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix}} = \frac{e^{4x}/x}{e^{4x}} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

これより $u_1 = -x, u_2 = \log|x|$ となるので，

$$y_p = -xe^{2x} + xe^{2x}\log|x|.$$

ここで，$-xe^{2x}$ は余関数で用いられているので，一般解

$$y = y_c + y_p = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + xe^{2x}\log|x|$$

を得る。 $\boxed{終}$

1(d)　補助方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の特性方程式は $m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2) = 0$ より特性根 $m = 1, 2$ を得る。よって余関数は

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

で与えられる。次に特殊解を求める。定数変化法より

$$y_p = u_1 e^x + u_2 e^{2x}$$

とおくと，2 つの方程式を得る。

$$\begin{cases} u_1' e^x + u_2' e^{2x} & = 0 \\ u_1'(e^x) + u_2'(2e^{2x}) & = \frac{1}{1+e^{-x}} \end{cases}$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ \frac{1}{1+e^{-x}} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = -\frac{e^{2x}/(1+e^{-x})}{e^{3x}} = -\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \\ u_2' &= \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{1}{1+e^{-x}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = \frac{e^x/(1+e^{-x})}{e^{3x}} = \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} \end{aligned}$$

これより u_1, u_2 を求めると，

$$u_1 = -\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \log(1+e^{-x})$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}dx = \int (e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}})dx \\ &= -e^{-x} + \log(1+e^{-x}) \end{aligned}$$

よって

$$y_p = e^x \log(1+e^{-x}) + e^{2x}(-e^{-x} + \log(1+e^{-x})).$$

これより一般解

$$y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (e^x + e^{2x})\log(1+e^{-x})$$

を得る。 $\boxed{終}$

1(e)　補助方程式 $y''' + y' = 0$ の特性方程式は $m^3 + m = m(m^2+1) = 0$ より特性根 $m = 0, \pm i$ を得る。よって余関数は

$$y_c = c_1 + c_2\cos x + c_3 \sin x$$

で与えられる。次に特殊解を求める。定数変化法より

$$y_p = u_1 + u_2 \cos x + u_3 \sin x$$

とおくと，3 つの方程式を得る。

$$\begin{cases} u_1' + u_2' \cos x + u_3' \sin x & = 0 \\ u_2'(-\sin x) + u_3'(\cos x) & = 0 \\ u_2'(-\cos x) + u_3'(-\sin x) & = \tan x \end{cases}$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \tan x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = \tan x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \tan x & -\sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = -\tan x \cos x = -\sin x$$

$$u_3' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \tan x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = -\sin x \tan x$$

これより u_1, u_2, u_3 を求めると，

$$u_1 = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log|\cos x| = \log|\sec x|$$

$$u_2 = -\int \sin x dx = \cos x$$

$$\begin{aligned} u_3 &= -\int \sin x \tan x dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} dx \\ &= \int (\cos x - \sec x) dx = \sin x - \log|\sec x + \tan x| \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} y_p &= \log|\sec x| + \cos^2 x + \sin x(\sin x - \log|\sec x + \tan x|) \\ &= \log|\sec x| - \sin x \log|\sec x + \tan x| + 1 \end{aligned}$$

これより一般解

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \log|\sec x| - \sin x \log|\sec x + \tan x|$$

を得る。 $\boxed{終}$

2　補助方程式 $y'' + y = 0$ の特性方程式は $m^2 + 1 = 0$ より特性根 $m = \pm i$ を得る。よって余関数は

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

で与えられる。次に特殊解を求める。定数変化法より

$$y_p = u_1 \cos x + u_2 \sin x$$

とおくと，2 つの方程式を得る。

$$\begin{cases} u_1' \cos x + u_2' \sin x & = 0 \\ u_1'(-\sin x) + u_2'(\cos x) & = f(x) \end{cases}$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ f(x) & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -f(x) \sin x \\ u_2' &= \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = f(x) \cos x \end{aligned}$$

これより u_1, u_2 を求めると，

$$u_1 = -\int f(x) \sin x dx = -\int_a^x f(t) \sin t dt$$

$$u_2 = \int f(x) \cos x dx = \int_a^x f(t) \cos(t) dt$$

よって

$$\begin{aligned} y_p &= -\int_a^x f(t) \sin t dt \cos x + \int_a^x f(t) \cos(t) dt \sin x \\ &= -\int_a^x f(t) \sin t \cos x dt + \int_a^x f(t) \cos(t) \sin x dt \\ &= \int_a^x f(t)(\sin x \cos t - \cos x \sin t) dt = \int_a^x f(t)(\sin x \cos t - \cos x \sin t) dt \\ &= \int_a^x f(t) \sin(x - t) dt \end{aligned}$$

これより一般解

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \int_a^x f(t) \sin(x - t) dt$$

を得る。 $\boxed{終}$

2.6　変数係数線形微分方程式

演習問題 2.6

1. 次の Euler 方程式を解け。ただし，$x>0$ とする。
(a) $x^2y''+4xy'+2y=0$　(b) $x^2y''+xy'+9y=0$
(c) $x^2y''-xy'-3y=x^2\log x$　(d) $x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=x^3$
(e) $x^2y'''+5xy''+4y'=0$

解答

1(a)　$x=e^t, y=x^\lambda$ とおくと，決定方程式は

$$\lambda(\lambda-1)+4\lambda+2=\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

より根は $\lambda=-1,-2$ である。この決定方程式は次の微分方程式の特性方程式になっている。

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$$

よって一般解は

$$y=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}=c_1x^{-1}+c_2x^{-2}\quad\boxed{終}$$

1(b)　$x=e^t, y=x^\lambda$ とおくと，決定方程式は

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda+9=\lambda^2+9=0$$

より根は $\lambda=\pm 3i$ である。この決定方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2}+9y=0$$

の特性方程式になっているので一般解は

$$y=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t=c_1\cos(3\log x)+c_2\sin(3\log x)\quad\boxed{終}$$

1(c)　$x=e^t, y=x^\lambda$ とおくと，決定方程式は

$$\lambda(\lambda-1)-\lambda-3=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$$

より根は $\lambda=-1,3$ である。この決定方程式は次の微分方程式の特性方程式になっている。

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-3y=te^{2t}\quad *$$

よって余関数 y_c は

$$y_c=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}$$

で与えられる。また特殊解を未定係数法で求める。$(D-2)^2te^{2t}=0$ より

$$(D+1)(D-3)(D-2)^2y=0$$

を満たす y を求めると $\{e^{-t},e^{3t},e^{2t},te^{2t}\}$ となるが，$\{e^{-t},e^{3t}\}$ はすでに余関数に用いられているので省くと

$$y_p=Ate^{2t}+Be^{2t}$$

となる。これを*に代入すると

$$\begin{array}{ll} -3(y_p & = Ate^{2t} + Be^{2t}) \\ -2(y_p' & = Ae^{2t} + 2Ate^{2t} + 2Be^{2t}) \\ \underline{y_p''} & = \underline{4Ae^{2t} + 4Ate^{2t} + 4Be^{2t}} \\ te^{2t} & = (2A - 3B)e^{2t} - 3Ate^{2t} \end{array}$$

これより $A = -1/3, B = -2/9$ が求まり，

$$y_p = -\frac{1}{3}te^{2t} - \frac{2}{9}e^{2t}$$

となる。よって一般解は

$$\begin{aligned} y &= c_1e^{-t} + c_2e^{3t} - (\frac{1}{3}te^{2t} + \frac{2}{9}e^{2t}) \\ &= c_1x^{-1} + c_2x^3 - (\frac{1}{3}x^2\log x + \frac{2}{9}x^2) \quad \boxed{\text{終}} \end{aligned}$$

1(d)　$x = e^t, y = x^\lambda$ とおくと，決定方程式は

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 = 0$$

で与えられる。整理すると

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) + \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

となり根は $\lambda = -1, 1, 2$ である。この決定方程式は次の微分方程式の特性方程式になっている。

$$(D+1)(D-1)(D-2)y = e^{3t} \quad *$$

よって余関数 y_c は

$$y_c = c_1e^{-t} + c_2e^t + c_3e^{2t}$$

で与えられる。また特殊解を未定係数法で求める。$(D-3)e^{3t} = 0$ より

$$(D+1)(D-1)(D-2)(D-3)y = 0$$

を満たす y を求めると $\{e^{-t}, e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$ となるが，$\{e^{-t}, e^t, e^{2t}\}$ はすでに余関数に用いられているので省くと

$$y_p = Ae^{3t}$$

となる。これを*に代入すると

$$(D^3 - 2D^2 - D + 2)Ae^{3t} = e^{3t}(2A - 3A - 18A + 27A) = e^{3t}(8A) = e^{3t}$$

より $A = 1/8$ が求まり，

$$y_p = \frac{1}{8}e^{3t}$$

となる。よって一般解は

$$\begin{aligned} y &= c_1e^{-t} + c_2e^t + c_3e^{2t} + \frac{1}{8}e^{3t} \\ &= c_1x^{-1} + c_2x + c_3x^2 + \frac{1}{8}x^3 \quad \boxed{\text{終}} \end{aligned}$$

1(e)　与式は Euler の方程式ではないが，両辺に x をかけることにより Euler の方程式に変形できる。

$$x^3y''' + 5x^2y'' + 4xy' = 0$$

ここで $x = e^t, y = x^\lambda$ とおくと，決定方程式は

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 5\lambda(\lambda-1) + 4\lambda = 0$$

で与えられる。整理すると

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = \lambda(\lambda+1)^2 = 0$$

となり根は $\lambda = 0, -1, -1$ である。この決定方程式は次の微分方程式の特性方程式になっている。

$$(D^3 + 2D^2 + D)y = 0$$

よって一般解は

$$y = c_1 + c_2e^{-t} + c_3te^{-t} = c_1 + c_2x^{-1} + c_3x^{-1}\log x \quad \boxed{終}$$

第3章　連立線形微分方程式

3.1　連立同次線形微分方程式

演習問題 3.1

1. 次の連立微分方程式を解け。

$(a)\ \begin{cases} x_1' = & x_1 + 4x_2 \\ x_2' = & x_1 + x_2 \end{cases}$　　$(b)\ \begin{cases} x_1' = & 6x_1 - 3x_2 \\ x_2' = & 2x_1 + x_2 \end{cases}$

$(c)\ \begin{cases} x_1' = & x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = & 2x_2 \\ x_3' = & x_2 - x_3 \end{cases}$　　$(d)\ \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

$(e)\ \begin{cases} x_1' + x_2' + 2x_2 = & 0 \\ x_1' - 3x_1 - 2x_2 = & 0 \end{cases}$　　$(f)\ \begin{cases} x_1' + 6x_1 + x_2' + 3x_2 = & 0 \\ x_1' - x_2' + x_2 = & 0 \end{cases}$

解答

1(a)　$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$ より固有値は $\lambda = -1, 3$ である。次に固有値 $\lambda = -1$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ は

$$(A+I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたす。ここで行列 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ は被約階段行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に変形されるので，$c_2 = \alpha$ とおくと，$c_1 = -2\alpha$ となる。したがって，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり，$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}$.

次に固有値 $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは

$$(A-3I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。ここで行列 $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ は被約階段行列 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に変形されるので，$c_2 = \beta$ とおくと，$c_1 = 2\beta$ となる。したがって，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり，$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t}$. これより一般解は

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t}$$

で与えられる。$\boxed{\text{終}}$

(b) $\det(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda-3)(\lambda-4)$ より固有値は $\lambda = 3, 4$ である。次に固有値 $\lambda = 3$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ は

$$(A-3I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたす。ここで行列 $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ は被約階段行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に変形されるので，$c_2 = \alpha$ とおくと，$c_1 = \alpha$ となる。したがって，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり，$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t}$.

次に固有値 $\lambda = 4$ に対する固有ベクトルは

$$(A-3I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。ここで行列 $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ は被約階段行列 $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に変形されるので，$c_2 = 2\beta$ とおくと，$c_1 = 3\beta$ となる。したがって，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ となり，$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}e^{4t}$. これより一般解は

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}e^{4t}$$

で与えられる。$\boxed{\text{終}}$

(c) $\det(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda)$ より固有値は $\lambda = -1, 1, 2$ である。次に固有値 $\lambda = -1$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ は

$$(A+I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたす。ここで行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は被約階段行列に変形されるので，$c_3 = 2\alpha$ とおくと，$c_1 = \alpha, c_2 = 0$ となる。したがって，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ となり，$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t}$.

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは

$$(A-I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。ここで行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は被約階段行列に変形されるので，$c_1 = \beta$ とおくと，$c_2 = 0, c_3 = 0$ となるので固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり，$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$.

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは

$$(A - 2I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。ここで行列

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は被約階段行列に変形されるので，$c_3 = \gamma$ とおくと，$c_2 = 3\gamma, c_1 = 2\gamma$ となるので固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり，$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$.

これより一般解は

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

で与えられる。$\boxed{\text{終}}$

(d)　$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)(1-\lambda)(2+\lambda)$ より固有値は $\lambda = -2, -1, 1$ である。次に固有値 $\lambda = -2$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ は

$$(A + 2I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたす。ここで行列

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は被約階段行列に変形されるので，$c_3 = 3\alpha$ とおくと，$c_1 = -2\alpha, c_2 = 0$ となる。したがって，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ となり，$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t}$.

$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは

$$(A - I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。ここで行列

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は被約階段行列に変形されるので，$c_3 = 2\beta$ とおくと，$c_2 = -2\beta, c_3 = -5\beta$ となるので固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ となり，$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$.

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは

$$(A - 2I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。ここで行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は被約階段行列に変形されるので，$c_1 = \gamma$ とおくと，$c_2 = 0, c_3 = 0$ となるので固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり，$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$.

これより一般解は

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}$$

で与えられる。$\boxed{\text{終}}$

(e) 微分方程式を x_1', x_2' について解くと，

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= -3x_1 - 4x_2 \end{aligned}$$

これより $\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -3 & -4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$. よって固有値は $\lambda = -3, 2$ である。次に固有値 $\lambda = -3$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ は

$$(A + 3I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたす。ここで行列

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は被約階段行列に変形されるので，$c_2 = 3\alpha$ とおくと，$c_1 = -\alpha$ となる。したがって，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ となり，$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t}$.

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは

$$(A - 2I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。ここで行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は被約階段行列に変形されるので，$c_2 = \beta$ とおくと，$c_1 = -2\beta$ となるので固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり，$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$. これより一般解は

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

で与えられる。$\boxed{\text{終}}$

(f) 微分方程式を x_1', x_2' について解くと，

$$2x_1' + 6x_1 + 4x_2 = 0,\ 2x_2' + 6x_1 + 2x_2 = 0$$

よって

$$\begin{aligned} x_1' &= -3x_1 - 2x_2 \\ x_2' &= -3x_1 - x_2 \end{aligned}$$

これより $\det(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} -3-\lambda & -2 \\ -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0$. よって固有値は $\lambda = -2 \pm \sqrt{7}$ である。次に固有値 $\lambda = -2+\sqrt{7}$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ を求める。ここで行列 $\begin{pmatrix} -1-\sqrt{7} & -2 \\ -3 & 1-\sqrt{7} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{7}}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は被約階段行列に変形されるので，$c_2 = 3\alpha$ とおくと，$c_1 = (1-\sqrt{7})\alpha$ となる。したがって，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix}$ となり，$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix} e^{(-2+\sqrt{7})t}$.

$\lambda = -2-\sqrt{7}$ に対する固有ベクトルを求める。行列 $\begin{pmatrix} -1+\sqrt{7} & -2 \\ -3 & 1+\sqrt{7} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+\sqrt{7}}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は被約階段行列に変形されるので，$c_2 = 3\alpha$ とおくと，$c_1 = (1+\sqrt{7})\alpha$ となる。したがって，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix}$ となり，$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix} e^{(-2-\sqrt{7})t}$.

これより一般解は

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix} e^{(2+\sqrt{7})t} + c_2 \begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix} e^{(-2-\sqrt{7})t}$$

で与えられる。$\boxed{\text{終}}$

3.2　重根と複素数根

演習問題 3.2

1. 次の連立微分方程式を解け。

(a) $\begin{cases} x_1' = & 6x_1 + 8x_2 \\ x_2' = & -x_1 + 2x_2 \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} x_1' = & 2x_1 - x_2 \\ x_2' = & 4x_1 + 6x_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1' = & 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2' = & 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ x_3' = & 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \end{cases}$　　(d) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$

(e) $\begin{cases} 4x_1' + x_1 + 2x_2' + 7x_2 = & 0 \\ x_1' - x_1 + x_2' + x_2 = & 0 \end{cases}$　　(f) $\begin{cases} x_1' + x_1 + 2x_2' + 3x_2 = & 0 \\ x_1' - 2x_1 + 5x_2' = & 0 \end{cases}$

解答

1(a)　$\det(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 6-\lambda & 8 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$. よって固有値は $\lambda = 4 \pm 2i$ である。次に固有値 $\lambda = 4+2i$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ は

$$(A-(4+2i)I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2-2i & 8 \\ -1 & -2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたす。ここで行列 $\begin{pmatrix} 2-2i & 8 \\ -1 & -2-2i \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2+2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は被約階段行列に変形されるので，$c_2 = \alpha$ とおくと，$c_1 = -2(1+i)\alpha$ となる。したがって，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2(1+i) \\ 1 \end{pmatrix}$ である。こ

れより $\mathbf{C}e^{\lambda t}$ の実部と虚部を求めると

$$\begin{aligned}\mathbf{C}e^{\lambda t} &= \begin{pmatrix} -2(1+i) \\ 1 \end{pmatrix} e^{(4+2i)t} = \begin{pmatrix} -2(1+i) \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}(\cos 2t + i\sin 2t) \\ &= \begin{pmatrix} -2(1+i)e^{4t}(\cos 2t + i\sin 2t) \\ e^{4t}(\cos 2t + i\sin 2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2e^{4t}\cos 2t + 2e^{4t}\sin 2t) \\ e^{4t}\cos 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -2e^{4t}\cos 2t - 2e^{4t}\sin 2t) \\ e^{4t}\sin 2t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

これより一般解は次のように表わすことができる。

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} -2\cos 2t + 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} -2\cos 2t - 2\sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^{4t} \quad \boxed{終}$$

(b)　$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 6-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2$ より固有値は $\lambda = 4$ である。次に固有値 $\lambda = 4$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ は

$$(A - 4I)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたす。

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $c_2 = -2\alpha$ とおくと，$c_1 = \alpha$ となる。したがって，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ である。次に，

$$(A - 4I)^2\mathbf{C} = \mathbf{0},\ (A - 4I)\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$$

を満たす $\mathbf{C}$ を見つけると

$$(A - 4I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ は $(A - 4I)^2 = \mathbf{0}$ を満たす。ここでもう一つの条件を満たすように α, β を選ぶと，$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり，2 つめの解

$$\begin{aligned} e^{At}\mathbf{C} &= e^{4t}e^{(A-4I)t}\mathbf{C} = e^{4t}[\mathbf{C} + t(A - 4I)\mathbf{C} + \frac{t^2}{2!}(A - 4I)^2\mathbf{C}] \\ &= e^{4t}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} t\} = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 - 3t \\ 1 + 6t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 - 3t \\ 1 + 6t \end{pmatrix}$ は 1 次独立なので，一般解は次のように表わすことができる。

$$\mathbf{X} = e^{4t}[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 - 3t \\ 1 + 6t \end{pmatrix}] \quad \boxed{終}$$

(c)

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (5-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 12) - 2(-2\lambda + 12) + 2(2\lambda - 12) \\
&= (5-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-6) + 4\lambda - 24 + 4\lambda - 24 \\
&= (5-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-6) + 8(\lambda-6) \\
&= (\lambda-6)(-\lambda^2 + 3\lambda + 18) \\
&= -(\lambda-6)(\lambda^2 - 3\lambda - 18) \\
&= -(\lambda-6)(\lambda+3)(\lambda-6)
\end{aligned}$$

よって固有値は $\lambda = -3, 6$ である。
固有値 $\lambda = -3$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ は $(A + 3I)\mathbf{C} = \mathbf{0}$ の 0 でない解より，Gauss の消去法を用いて求める。

$$\begin{aligned}
A + 3I &= \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より $c_3 = 2\alpha$ とおくと，

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 2\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

これより解 $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-3t}$ を得る。

次に，固有値 $\lambda = 6$ に対する固有ベクトルを求める。

$$A - 6I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より自由度が 2。よって $c_2 = \beta, c_3 = \gamma$ とおくと，

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta + 2\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

これより解

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{6t}, \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$$

を得る。ここで $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ は互いに 1 次独立なので，一般解は

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{6t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}.$$

で与えられる。$\boxed{\text{終}}$

(d)

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) + (-2\lambda + 2) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) + 2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + 1) \end{aligned}$$

より固有値 $\lambda = 1, \pm i$ を得る。

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ を Gauss の消去法を用いて求める。

$$\begin{aligned} A - I &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より $c_2 = \alpha$ とおくと，

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって解 $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$ を得る。

次に $\lambda = i$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ を求める。

$$
\begin{aligned}
A - iI &= \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 1 \\ 1 & 1-i & 0 \\ -2 & 0 & -1-i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1-i \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 2i & 1 \\ 0 & 2-2i & -1-i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1+i}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

より $c_3 = 2\alpha$ とおくと，

$$
\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1-i)\alpha \\ i\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1-i \\ i \\ 2 \end{pmatrix}
$$

ここで解は $\mathbf{X}_2 = \Re \mathbf{C} e^{it}, \mathbf{X}_3 = \Im \mathbf{C} e^{it}$ で与えられるので，$\mathbf{C}e^{it}$ の実部と虚部を求める。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}e^{it} &= \begin{pmatrix} -1-i \\ i \\ 2 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} -1-i \\ i \\ 2 \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos t + \sin t \\ -\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}}_{\text{real part}} - i \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}}_{\text{imaginary part}}
\end{aligned}
$$

よって一般解は

$$
\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos t + \sin t \\ -\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}
$$

で与えられる。$\boxed{\text{終}}$

(e)

$$
\begin{cases} 4x_1' + x_1 + 2x_2' + 7x_2 &= 0 \\ -2x_1' + 2x_1 - 2x_2' - 2x_2 &= 0 \end{cases}
$$

x_1' について解くと，$2x_1' + 3x_1 + 5x_2 = 0$ より

$$
x_1' = -\frac{3}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_2 \tag{3.1}
$$

また x_2' について解くと，$-2x_2' + 5x_1 + 3x_2 = 0$ より

$$
x_2' = \frac{5}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \tag{3.2}
$$

これより

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} - \lambda & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{9}{4} + \frac{25}{4} \\ &= \lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i) \end{aligned}$$

より固有値は $\lambda = \pm 2i$。

固有値 $\lambda = 2i$ に対する固有ベクトルを Gauss の消去法を用いて求める。

$$\begin{aligned} A - 2iI &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - 2i & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} - 2i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} - 2i \\ -\frac{3}{2} - 2i & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5}(3 - 4i) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より $c_2 = \alpha$ とおくと，

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(3 - 4i)\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = -\frac{\alpha}{5} \begin{pmatrix} 3 - 4i \\ -5 \end{pmatrix}$$

これより解 $\mathbf{X}_1 = \Re \mathbf{C} e^{2it}, \mathbf{X}_2 = \Im \mathbf{C} e^{2it}$ を求める。

$$\begin{aligned} \mathbf{C} e^{2it} &= \begin{pmatrix} 3 - 4i \\ -5 \end{pmatrix} e^{2it} = \begin{pmatrix} 3 - 4i \\ -5 \end{pmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 3\cos 2t + 4\sin 2t \\ -5\cos 2t \end{pmatrix}}_{\text{real part}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 3\sin 2t - 4\cos 2t \\ -5\sin 2t \end{pmatrix}}_{\text{imaginary part}} \end{aligned}$$

よって一般解は

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 3\cos 2t + 4\sin 2t \\ -5\cos 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3\sin 2t - 4\cos 2t \\ -5\sin 2t \end{pmatrix}$$

で与えられる。$\boxed{\text{終}}$

(f)

x_2' について解くと，$3x_2' - 3x_1 - 3x_2 = 0$ より

$$x_2' = x_1 + x_2$$

また $x_1' - 2x_1 + 5x_2' = 0$ より

$$x_1' = 2x_1 - 5x_2' = -3x_1 - 5x_2$$

これより $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$. となる。これより固有値と固有ベクトルを求める。

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & -5 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

よって固有値 $\lambda = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$ を得る。

固有値 $\lambda = -1 + i$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ を Gauss の消去法を用いて求める。

$$A + (1-i)I = \begin{pmatrix} -2-i & -5 \\ 1 & 2-i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ -2-i & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $c_2 = \alpha$ とおくと,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2+i)\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

これより解 $\mathbf{X}_1 = \Re\mathbf{C}e^{(-1+i)t}, \mathbf{X}_2 + \Im\mathbf{C}e^{(-1+i)t}$ を求める。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}e^{(-1+i)t} &= \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}e^{it} = \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}(\cos t + i\sin t) \\ &= e^{-t} \underbrace{\begin{pmatrix} -2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\text{real part}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t - 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}}_{\text{imaginary part}} \end{aligned}$$

よって一般解は

$$\mathbf{X} = e^{-t}[c_1 \begin{pmatrix} -2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t - 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}]$$

で与えられる。$\boxed{\text{終}}$

3.3 非同次方程式

演習問題 3.3

1. 次の微分方程式を解け。

(a) $\begin{cases} x_1' = & 2x_1 + x_2 - e^t \\ x_2' = & 3x_1 + 4x_2 - 7e^t \end{cases}$　　(b) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} -3\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{cases} x_1' = & x_1 + x_2 + x_3 + 1 \\ x_2' = & -x_2 \\ x_3' = & -2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3e^{-t} \end{cases}$　　(d) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. 次の微分方程式を連立微分方程式に直して解け。

$y'' + 4y' + 3y = t$

3. 次の微分方程式を消去法を用いて解け。

(a) $\begin{cases} x_1' + x_2' - 2x_1 - 4x_2 & = e^t \\ x_1' + x_2' - x_2 & = e^{4t} \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} x_1'' + x_2' - x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1' + x_2'' - x_1 + x_2 & = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1' + x_2' + x_1 + 5x_2 & = 4t \\ x_1' + x_2' + 2x_1 + 2x_2 & = 2 \end{cases}$　　(d) $\begin{cases} x_1'' - x_2' & = t + 1 \\ x_1' + x_2' - 3x_1 + x_2 & = 2t - 1 \end{cases}$

解答

1(a)

$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X} - \begin{pmatrix} e^t \\ 7e^t \end{pmatrix}$ よりまず $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の解 Φ を求める。

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

より固有値 $\lambda = 1, 5$ を得る。

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ を Gauss の消去法を用いて求める。

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $c_2 = \alpha$ とおくと

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって解 $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$ を得る。

固有値 $\lambda = 5$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ は

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $c_2 = 3\beta$ とおくと

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 3\beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

よって解 $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}$ を得る。これより基本行列 Φ は

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -e^t & e^{5t} \\ e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

で与えられる。

次に $\Phi\mathbf{U}' = \mathbf{F}$ を解き特殊解 $\mathbf{U}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} -e^t & e^{5t} \\ e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 7e^t \end{pmatrix}$$

を Cramer の公式を用いて解くと

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} e^t & e^{5t} \\ 7e^t & 3e^{5t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^t & e^{5t} \\ e^t & 3e^{5t} \end{vmatrix}} = \frac{-4e^{6t}}{-4e^{6t}} = 1$$

よって

$$u_1 = \int 1dt = t \text{ (特殊解を求めるので積分定数をつけない)}$$

また

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} -e^t & e^t \\ e^t & 7e^t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^t & e^{5t} \\ e^t & 3e^{5t} \end{vmatrix}} = \frac{-8e^{2t}}{-4e^{6t}} = 2e^{-4t}$$

よって

$$u_2 = \int 2e^{-4t}dt = -\frac{1}{2}e^{-4t} \text{ (特殊解を求めるので積分定数をつけない)}$$

したがって一般解は

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \Phi\mathbf{C} + \Phi\mathbf{U} \\ &= \begin{pmatrix} -e^t & e^{5t} \\ e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^t & e^{5t} \\ e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{2}e^{-4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で与えられる。$\boxed{\text{終}}$

(b)
$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} - \begin{pmatrix} -3\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$ よりまず $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の解 Φ を求める。

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$$

より固有値 $\lambda = \pm 2i$ を得る。

固有値 $\lambda = 2i$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ を Gauss の消去法を用いて求める。

$$A - 2iI = \begin{pmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $c_2 = \alpha$ とおくと

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって解 $\mathbf{X}_1 = \Re\mathbf{C}e^{2it}, \mathbf{X}_2 = \Im\mathbf{C}e^{2it}$ を得る。ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{C}e^{2it} &= \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} e^{2it} = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}(\cos 2t + i\sin 2t) \\ &= \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これより基本行列 Φ は

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2\sin 2t & -2\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix}$$

で与えられる。

次に $\Phi\mathbf{U}' = \mathbf{F}$ を解き特殊解 $\mathbf{U}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 2\sin 2t & -2\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

を Cramer の公式を用いて解くと

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} -3\cos t & -2\cos 2t \\ 0 & \sin 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\sin 2t & -2\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix}} = \frac{-3\sin 2t\cos t}{2\sin^2 2t + 2\cos^2 2t} = \frac{-3}{4}(\sin 3t + \sin t)$$

よって

$$u_1 = \frac{-3}{4}\int(\sin 3t + \sin t)dt = \frac{3}{4}(\frac{\cos 3t}{4} + \cos t)\ (\text{積分定数をつけない})$$

また

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 2\sin 2t & -3\cos t \\ \cos 2t & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\sin 2t & -2\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix}} = \frac{3\cos 2t \sin t}{2} = \frac{3}{4}(\cos 3t + \cos t)$$

よって

$$u_2 = \frac{3}{4}\int(\cos 3t + \cos t)dt = \frac{3}{4}(\frac{\sin 3t}{3} + \sin t).$$

したがって一般解は

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \Phi\mathbf{C} + \Phi\mathbf{U} \\ &= \begin{pmatrix} 2\sin 2t & -2\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin 2t & -2\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\cos 3t + 3\cos t}{4} \\ \frac{\sin 3t + 3\sin t}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で与えられる。$\boxed{\text{終}}$

(c)

$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3e^{-t} \end{pmatrix}$ よりまず $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ の解 Φ を求める。

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda) = -\lambda(\lambda+1)^2$$

より固有値 $\lambda = -1, 0$ を得る。

固有値 $\lambda = 0$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ を Gauss の消去法を用いて求める。

$$\begin{aligned} A - 0I &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より $c_3 = \alpha$ とおくと,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

これより解 $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る。

固有値 $\lambda = -1$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ を求める。

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より自由度 2 なので，$c_2 = \beta, c_3 = \gamma$ とおくと，

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって解 $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}, \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$ を得る。これより基本行列 Φ は

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{e^{-t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 1 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

で与えられる。

次に $\Phi\mathbf{U}' = \mathbf{F}$ より特殊解 $\mathbf{U}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{e^{-t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 1 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

を Cramer の公式を用いて解くと

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{e^{-t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 2e^{-t} & 0 & e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\frac{e^{-t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 1 & 0 & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{e^{-2t} + e^{-3t}}{-e^{-2t} + \frac{e^{-2t}}{2}} = -2 - 2e^{-t}$$

よって

$$u_1 = \int (-2 - 2e^{-t})dt = -2t + 2e^{-t} \text{ (特殊解を求めるので積分定数をつけない)}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2e^{-t} & e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\frac{e^{-t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 1 & 0 & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{0}{-\frac{e^{-2t}}{2}} = 0$$

よって

$$u_2 = \int 0dt = 0 \text{ (特殊解を求めるので積分定数をつけない)}$$

$$u_3' = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\frac{e^{-t}}{2} & 1 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 1 & 0 & 2e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\frac{e^{-t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 1 & 0 & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{-2e^{-t}-1}{-\frac{e^{-2t}}{2}} = 4e^t + 2e^{2t}$$

よって

$$u_3 = \int (4e^t + 2e^{2t})dt = 4e^t + e^{2t} \text{ (特殊解を求めるので積分定数をつけない)}$$

したがって一般解は

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \Phi\mathbf{C} + \Phi\mathbf{U} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{e^{-t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 1 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -\frac{e^{-t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 1 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2t+2e^{-t} \\ 0 \\ 4e^t + e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で与えられる。$\boxed{\text{終}}$

(d)

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-\lambda^3) - 1 \\ &= \lambda^4 - 1 = (\lambda^2+1)(\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \end{aligned}$$

より固有値 $\lambda = -1, 1, \pm i$ を得る。

固有値 $\lambda = -1$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ を Gauss の消去法を用いて求める。

$$\begin{aligned} A+I &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より $c_4 = \alpha$ とおくと,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって解 $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$ を得る。

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ を求める。

$$\begin{aligned} A - I \quad &= \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より $c_4 = \beta$ とおくと,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって解 $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$ を得る。

固有値 $\lambda = i$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ を求める。

$$\begin{aligned} A - iI \quad &= \quad \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 0 & -i \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $c_4 = \gamma$ とおくと，

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\gamma \\ -\gamma \\ -i\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって

$$\mathbf{X}_3 = \Re \mathbf{C} e^{it} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \mathbf{X}_4 = \Im \mathbf{C} e^{it} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

これより，基本行列 Φ は

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^t & -\sin t & \cos t \\ e^{-t} & e^t & -\cos t & -\sin t \\ -e^{-t} & e^t & \sin t & -\cos t \\ e^{-t} & e^t & \cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

で与えられる。

次に，$\Phi \mathbf{U}' = \mathbf{F}$ より特殊解 $\mathbf{U}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} -e^{-t} & e^t & -\sin t & \cos t \\ e^{-t} & e^t & -\cos t & -\sin t \\ -e^{-t} & e^t & \sin t & -\cos t \\ e^{-t} & e^t & \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を Cramer の公式を用いて解くと

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} t^2 & e^t & -\sin t & \cos t \\ 0 & e^t & -\cos t & -\sin t \\ 0 & e^t & \sin t & -\cos t \\ 0 & e^t & \cos t & \sin t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^{-t} & e^t & -\sin t & \cos t \\ e^{-t} & e^t & -\cos t & -\sin t \\ -e^{-t} & e^t & \sin t & -\cos t \\ e^{-t} & e^t & \cos t & \sin t \end{vmatrix}} = \frac{2t^2 e^t}{-8}$$

よって

$$u_1 = -\frac{1}{4} \int t^2 e^t dt = -\frac{1}{4}(t^2 e^t - 2te^t + 2e^t)$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} -e^{-t} & t^2 & -\sin t & \cos t \\ e^{-t} & 0 & -\cos t & -\sin t \\ -e^{-t} & 0 & \sin t & -\cos t \\ e^{-t} & 0 & \cos t & \sin t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^{-t} & e^t & -\sin t & \cos t \\ e^{-t} & e^t & -\cos t & -\sin t \\ -e^{-t} & e^t & \sin t & -\cos t \\ e^{-t} & e^t & \cos t & \sin t \end{vmatrix}} = \frac{-2t^2e^{-t}}{-8}$$

よって

$$u_2 = \frac{1}{4}\int t^2e^{-t}dt = -\frac{1}{4}(t^2e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-t})$$

$$u_3' = \frac{\begin{vmatrix} -e^{-t} & e^t & t^2 & \cos t \\ e^{-t} & e^t & 0 & -\sin t \\ -e^{-t} & e^t & 0 & -\cos t \\ e^{-t} & e^t & 0 & \sin t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^{-t} & e^t & -\sin t & \cos t \\ e^{-t} & e^t & -\cos t & -\sin t \\ -e^{-t} & e^t & \sin t & -\cos t \\ e^{-t} & e^t & \cos t & \sin t \end{vmatrix}} = \frac{4t^2\sin t}{-8}$$

よって

$$u_3 = -\frac{1}{2}\int t^2\sin t dt = \frac{1}{2}(t^2\cos t - 2t\sin t - 2\cos t)$$

$$u_4' = \frac{\begin{vmatrix} -e^{-t} & e^t & -\sin t & t^2 \\ e^{-t} & e^t & -\cos t & 0 \\ -e^{-t} & e^t & \sin t & 0 \\ e^{-t} & e^t & \cos t & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^{-t} & e^t & -\sin t & \cos t \\ e^{-t} & e^t & -\cos t & -\sin t \\ -e^{-t} & e^t & \sin t & -\cos t \\ e^{-t} & e^t & \cos t & \sin t \end{vmatrix}} = \frac{-4t^2\cos t}{-8}$$

よって

$$u_4 = \frac{1}{2}\int t^2\cos t dt = \frac{1}{2}(t^2\sin t - 2t\cos t + 2\sin t)$$

これより一般解は

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \Phi\mathbf{C} + \Phi\mathbf{U} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^t & -\sin t & \cos t \\ e^{-t} & e^t & -\cos t & -\sin t \\ -e^{-t} & e^t & \sin t & -\cos t \\ e^{-t} & e^t & \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
+ \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{t} & -\sin t & \cos t \\ e^{-t} & e^{t} & -\cos t & -\sin t \\ -e^{-t} & e^{t} & \sin t & -\cos t \\ e^{-t} & e^{t} & \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(t^2 e^t - 2te^t + 2e^t) \\ -\frac{1}{4}(t^2 e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(t^2 \cos t - 2t \sin t - 2\cos t) \\ \frac{1}{2}(t^2 \sin t - 2t \cos t + 2\sin t) \end{pmatrix}
$$

で与えられる。 $\boxed{\text{終}}$

2.

$y_1' = y_2$ とおくと，$y_2' = y'' = -4y' - 3y + t$。よって

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4y_2 - 3y_1 + t \end{cases}$$

ここで $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{Y} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

と書き直せる。

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

より固有値 $\lambda = -3, -1$ を得る。

固有値 $\lambda = -3$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ を Gauss の消去法を用いて求める。

$$A + 3I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $c_2 = 3\alpha$ とおくと，

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

よって解 $\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t}$ を得る。

固有値 $\lambda = -1$ に対する固有ベクトル $\mathbf{C}$ を Gauss の消去法を用いて求める。

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $c_2 = 3\beta$ とおくと，

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって解 $\mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$ を得る。これより基本行列 Φ は

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -e^{-3t} & -e^{-t} \\ 3e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

で与えられる。

次に，$\Phi\mathbf{U}' = \mathbf{F}$ より特殊解 $\mathbf{U}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} -e^{-3t} & -e^{-t} \\ 3e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

より Cramer の公式を用いると

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -e^{-t} \\ t & e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^{-3t} & -e^{-t} \\ 3e^{-3t} & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{te^{-t}}{2e^{-4t}} = \frac{1}{2}te^{3t}.$$

これより

$$u_1 = \frac{1}{2}\int te^{3t}dt = \frac{1}{2}(\frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9}).$$

また

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} -e^{-3t} & 0 \\ 3e^{-3t} & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^{-3t} & -e^{-t} \\ 3e^{-3t} & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{-te^{-3t}}{2e^{-4t}} = -\frac{1}{2}te^{t}.$$

これより

$$u_2 = -\frac{1}{2}\int te^{t}dt = -\frac{1}{2}(te^{t} - e^{t}).$$

よって一般解は

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \Phi\mathbf{C} + \Phi\mathbf{U} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{-3t} & -e^{-t} \\ 3e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{-3t} & -e^{-t} \\ 3e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9}) \\ -\frac{1}{2}(te^{t} - e^{t}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で与えられる。 $\boxed{\text{終}}$

3

(a)

$$\left\{ \begin{array}{ll} (D-2)x_1 + (D-4)x_2 & = e^{t} \\ Dx_1 + (D-1)x_2 & = e^{4t} \end{array} \right. \tag{3.3}$$

より

$$\begin{vmatrix} D-2 & D-4 \\ D & D-1 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} e^{t} & D-4 \\ e^{4t} & D-1 \end{vmatrix}$$

を得る。これを展開すると

$$\begin{aligned} (D^2 - 3D + 2 - D^2 + 4D)x_1 &= (D-1)e^{t} - (D-4)e^{4t} \\ &= e^{t} - e^{t} - 4e^{4t} + 4e^{4t} = 0 \end{aligned}$$

つまり

$$(D+2)x_1 = 0$$

よって $x_1 = c_1e^{-2t}$。同様にして x_2 を求めることができるが，一般に x_2 を求めるには，3.3 の式から Dx_2 を消去してそこに x_1 を代入する方が簡単である。実際にやってみると 3.3 の最初の式から次の式を引くと，$-2x_1 - 3x_2 = e^{t} - e^{4t}$ を得る。よって

$$x_2 = -\frac{1}{3}(2x_1 + e^{4t} - e^{t}) = -\frac{1}{3}(2c_1e^{-2t} + e^{4t} - e^{t}).$$

これより，一般解は

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{-2t} \\ x_2 = -\frac{1}{3}(2c_1 e^{-2t} + e^{4t} - e^t) \end{cases}$$

で与えられる。 $\boxed{\text{終}}$

(b)

$$\begin{cases} (D^2-1)x_1 + (D+1)x_2 & = 1 \\ (D-1)x_1 + (D^2+1)x_2 & = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

より

$$\begin{vmatrix} D^2-1 & D+1 \\ D-1 & D^2+1 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} 1 & D+1 \\ 0 & D^2+1 \end{vmatrix}$$

を得る。これを展開すると

$$(D^4 - 1 - D^2 + 1)x_1 = (D^2+1)1 - (D+1)0 = 1$$

つまり

$$D^2(D^2-1)x_1 = 1.$$

特性方程式は $m^2(m^2-1) = 0$ より，$m = -1, 0, 0, 1$。よって余関数は

$$x_{1c} = c_1 e^{-t} + c_2 + c_3 t + c_4 e^t.$$

で与えられる。 次に特殊解 x_{1p} を未定係数法で求める。$D1 = 0$ より

$$D^3(D^2-1)x_1 = D1 = 0.$$

よって

$$x_{1p} = At^2 + Bt + C$$

と置くことができる。$D^2(D^2-1)x_{1p} = 1$ より，$-2A = 1$。よって $A = -\frac{1}{2}$。これより，

$$x_{1p} = -\frac{1}{2}t^2$$

よって

$$x_1 = x_{1c} + x_{1p} = c_1 e^{-t} + c_2 + c_3 t + c_4 e^t - \frac{1}{2}t^2.$$

次に x_2 を求める。3.4 の式からまず。x_2'' を消去すると

$$(D^3 - 2D + 1)x_1 + Dx_2 - x_2 = 0$$

を得る。これから 3.4 の最初の式を引くと，

$$(D^3 - D^2 - 2D + 2)x_1 - 2x_2 = 0$$

を得る。これより

$$x_2 \quad = \quad \frac{1}{2}(D^3 - D^2 - 2D + 2)x_1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(D^2-2)(D-1)x_1 \\
&= \frac{1}{2}(D^2-2)(-2c_1e^{-t}-c_2+c_3-c_3t-t+\frac{1}{2}t^2) \\
&= \frac{1}{2}(-2c_1e^{-t}+1-2(-2c_1e^{-t}-c_2+c_3-c_3t-t+\frac{1}{2}t^2)) \\
&= \frac{1}{2}(2c_1e^{-t}+2c_2-2c_3+2c_3t+2t-t^2).
\end{aligned}$$

よって一般解は

$$\begin{cases} x_1 = c_1e^{-t}+c_2+c_3t+c_4e^t-\frac{1}{2}t^2 \\ x_2 = c_1e^{-t}+c_2-c_3+c_3t+t-\frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

で与えられる。 $\boxed{\text{終}}$

(c)

$$\begin{cases} (2D+1)x_1+(D+5)x_2 &= 1 \\ (D+2)x_1+(D+2)x_2 &= 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

より

$$\begin{vmatrix} 2D+1 & D+5 \\ D+2 & D+2 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} 4t & D+5 \\ 2 & D+2 \end{vmatrix}$$

を得る。これを展開すると

$$\begin{aligned}
(2D^2+5D+2-D^2-7D-10)x_1 &= (D+2)4t-(D+5)2 \\
&= 4+8t-10 \\
&= 8t-6
\end{aligned}$$

つまり

$$(D^2-2D-8)x_1 = 8t-6.$$

特性方程式は $m^2-2m-8=0$ より，$m=-2,4$。よって余関数は

$$x_{1c} = c_1e^{-2t}+c_2e^{4t}.$$

で与えられる。 次に特殊解 x_{1p} を未定係数法で求める。$D^2(8t-6)=0$ より

$$D^2(D+2)(D-4)x_1 = D^2(8t-6) = 0.$$

よって

$$x_{1p} = At+B$$

と置くことができる。$(D^2-2D-8)x_{1p}=8t-6$ より，$A=-1, B=1$。これより，

$$x_{1p} = -t+1$$

よって

$$x_1 = x_{1c}+x_{1p} = c_1e^{-2t}+c_2e^{4t}-t+1.$$

次に x_2 を求める。3.5 の式からまず。x_2' を消去すると

$$(D-1)x_1+3x_2 = 4t-2$$

を得る。これより

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{3}(4t-2-(D-1)x_1) \\ &= \frac{1}{3}(4t-2-Dx_1+x_1) \\ &= \frac{1}{3}(4t-2+2c_1e^{-2t}-4c_2e^{4t}+1) \\ &= \frac{1}{3}(3c_1e^{-2t}-3c_2e^{4t}+3t) \\ &= c_1e^{-2t}-c_2e^{4t}+t. \end{aligned}$$

よって一般解は

$$\begin{cases} x_1 = c_1e^{-2t}+c_2e^{4t}-t+1 \\ x_2 = c_1e^{-2t}-c_2e^{4t}+t \end{cases}$$

で与えられる。$\boxed{\text{終}}$

(d)

$$\begin{cases} D^2x_1 - Dx_2 & = t+1 \\ (D-3)x_1+(D+1)x_2 & = 2t-1 \end{cases} \tag{3.6}$$

より

$$\begin{vmatrix} D^2 & -D \\ D-3 & D+1 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} t+1 & -D \\ 2t-1 & D+1 \end{vmatrix}$$

を得る。これを展開すると

$$\begin{aligned} (D^3+D^2+D^2-3D)x_1 &= (D+1)(t+1)+D(2t-1) \\ &= 1+t+1+2 \\ &= t+4 \end{aligned}$$

つまり

$$D(D-1)(D+3)x_1 = t+4.$$

特性方程式は $m(m-1)(m+3)=0$ より，$m=0,-3,1$。よって余関数は

$$x_{1c} = c_1+c_2e^{-3t}+c_3e^t.$$

で与えられる。次に特殊解 x_{1p} を未定係数法で求める。$D^2(t+4)=0$ より $D^3(D-1)(D+3)x_1 = D^2(t+4) = 0$。このうち，$m=-3,0,1$ は余関数に用いられているので，

$$x_{1p} = At^2+Bt$$

と置くことができる。$D(D-1)(D+3)x_{1p} = t+4$ より，$-6A=1, 3B=-\frac{14}{3}$。これより，

$$x_{1p} = -\frac{t^2}{6}-\frac{14t}{9}$$

よって

$$x_1 = x_{1c}+x_{1p} = c_1+c_2e^{-3t}+c_3e^t-\frac{t^2}{6}-\frac{14t}{9}.$$

次に x_2 を求める。3.6 の式からまず。x_2' を消去すると

$$(D^2+D-3)x_1+x_2=3t$$

を得る。これより

$$\begin{array}{rcl}
x_2 & = & 3t-(D^2+D-3)x_1 \\
 & = & 3t-(9c_2e^{-3t}+c_3e^t-\dfrac{1}{3} \\
 & + & -3c_2e^{-3t}+c_3e^t-\dfrac{t}{3}-\dfrac{14}{3} \\
 & - & 3(c_1+c_2e^{-3t}+c_3e^t--\dfrac{t^2}{6}-\dfrac{14t}{9})) \\
 & = & 3c_1-3c_2e^{-3t}+c_3e^t-\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{4t}{3}+\dfrac{17}{9}.
\end{array}$$

よって一般解は

$$\begin{cases} x_1=c_1+c_2e^{-3t}+c_3e^t-\frac{t^2}{6}-\frac{14t}{9} \\ x_2=3c_1-3c_2e^{-3t}+c_3e^t-\frac{t^2}{2}-\frac{4t}{3}+\frac{17}{9} \end{cases}$$

で与えられる。 $\boxed{\text{終}}$

第4章　級数による解法

4.1　解析関数

演習問題 4.1

1. 次の級数の収束半径を求めよ。
(a) $\sum \frac{nx^n}{3^n}$　(b) $\sum \frac{n^n x^n}{n!}$
2. 次のことを示せ。
(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$
(b) $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$, $|x| \leq 1$
3. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ のとき，次のことを示せ。
(a) $f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で一様収束する。
(b) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$
(c) $\int_0^{\pi} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^4}$

解答

1.
(a)

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n/3^n}{(n+1)/3^{n+1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3n}{n+1}\right| = 3. \quad \boxed{終}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^n/n!}{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n\right| = \frac{1}{e}. \quad \boxed{終}\end{aligned}$$

2.
(a) $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ とおくと

$$S_n - xS_n = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = 1 - x^{n+1}$$

よって $S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ 。ここで

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} \infty & x > 1 \\ 0 & |x| < 1 \\ 振動 & x < -1 \end{cases}$$

に注意すると

$$S = \lim S_n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1. \boxed{終}$$

(b)

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt \text{ (項別積分可能)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},\ |x| < 1\end{aligned}$$

$x = 1$ のとき $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ は収束するので，

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},\ -1 < x \leq 1 \boxed{終}$$

3.
(a)　$|\frac{\sin nx}{n^3}| \leq \frac{1}{n^3} = M_n$ とおくと，

$$\sum M_n = \sum \frac{1}{n^3} < \infty$$

よって Weierstrass の M-test により一様収束。$\boxed{終}$
(b)　$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ とおくと

$$f'(x) = (\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3})'$$

ここで (a) より $f(x)$ は一様収束するので項別微分が可能。よって

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin nx}{n^3})' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} \boxed{終}$$

(c)　$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ とおくと

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$$

ここで (a) より $f(x)$ は一様収束するので項別積分が可能。よって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n^3}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^4} \boxed{終}$$

4.2　整級数解 (通常点の場合)

演習問題 4.2

1.　次の微分方程式の $x = 0$ のまわりでの整級数解を求めよ。
(a) $y' + y = e^x$　　(b) $y'' + xy = 0$
(c) $xy' - y = x^2 e^x$　(d) $y'' + xy' - 4y = 0$
2.　次の微分方程式の付記した点のまわりでの整級数解を求めよ。
(a) $y'' + (x-2)y = 0,\ a = 2$　(b) $y'' + xy' + 3y = x^2,\ a = 1$

4.2

1.

(a)　$P(x) = 1, Q(x) = 1, R(x) = e^x$ より，$x = 0$ は通常点。よって，解を

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

とおくと，

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

となる。また，$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ より，これらを与えられた方程式に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

を得る。これらを整理すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - \frac{1}{n!}) x^n = 0$$

となるので，ここで x のベキを一番小さな $n-1$ になるようにそろえると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nc_n + c_{n-1} - \frac{1}{(n-1)!}] x^{n-1} = 0.$$

右辺は恒等的に 0 なので，項別微分を行なうと，x^{n-1} の係数はすべて 0 になる。よって漸化式

$$nc_n + c_{n-1} - \frac{1}{(n-1)!} = 0,\ n \geq 1.$$

または

$$c_n = \frac{1}{n!} - \frac{c_{n-1}}{n}$$

を得る。ここで，c_0 は初期条件 $y(0)$ で決まるので，この場合は任意の定数と考えられる。よって，$c_1, c_2, \ldots$ を順次求めると

$$c_1 = 1 - c_0,\ c_2 = \frac{c_0}{2},\ c_3 = \frac{1}{3!} - \frac{c_0}{3!}, \cdots$$

これより，

$$c_{2n} = \frac{c_0}{(2n)!)}, c_{2n+1} = \frac{1 - c_0}{(2n+1)!}.$$

これを $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ に代入すると

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} x^{2n+1} \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

となりこの方程式の解は次の初等関数で表わせる。

$$y = c_0 e^{-x} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad \boxed{終}$$

(b)　$P(x)=0, Q(x)=x, R(x)=0$ より，$x=0$ は通常点。よって，解を

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

とおくと，

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

となる。これらを与えられた方程式に代入すると

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}=0$$

を得る。ここで x のベキを一番小さな $n-2$ になるようにそろえると，

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}+\sum_{n=3}^{\infty} c_{n-3} x^{n-2}=0.$$

次に級数のインデックスを一番大きなものにそろえると，

$$2c_2+\sum_{n=3}^{\infty}[n(n-1)c_n+c_{n-3}]x^{n-2}=0$$

右辺は恒等的に 0 なので，項別微分を行なうと，x^{n-1} の係数はすべて 0 になる。よって漸化式

$$c_2=0,\ n(n-1)c_n+c_{n-3}=0,\ n \geq 3.$$

または

$$c_2=0,\ c_n=-\frac{c_{n-3}}{n(n-1)}$$

を得る。ここで，c_0, c_1 は初期条件 $y(0), y'(0)$ で決まるので，この場合は任意の定数と考えられる。よって，$c_2, c_3, \ldots$ を順次求めると

$$c_3=\frac{c_0}{3 \cdot 2},\ c_4=\frac{-c_1}{4 \cdot 3},\ c_5=0, \cdots$$

これより

$$c_{3n}=\frac{c_{3n}}{c_{3n-3}} \frac{c_{3n-3}}{c_{3n-6}} \cdots \frac{c_3}{c_0} c_0=\frac{(-1)^n(3n-2)(3n-5) \cdots 4 \cdot 1}{(3n)!} c_0,$$

$$c_{3n+1}=\frac{c_{3n+1}}{c_{3n-2}} \frac{c_{3n-2}}{c_{3n-5}} \cdots \frac{c_4}{c_1} c_1=\frac{(-1)^n(3n-1)(3n-4) \cdots 5 \cdot 2}{(3n+1)!} c_1,$$

これを $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ に代入すると

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n} x^{3n}+\sum_{n=0}^{\infty} c_{3n+1} x^{3n+1}$$

ただし，

$$c_{3n} = \frac{(-1)^n(3n-2)(3n-5)\cdots 4\cdot 1}{(3n)!}c_0, c_{3n+1} = \frac{(-1)^n(3n-1)(3n-4)\cdots 5\cdot 2}{(3n+1)!}c_1,$$

となる． 終

(c) $P(x) = x, Q(x) = -1, R(x) = x^2e^x$ より，$x = 0$ は通常点。よって，解を

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

とおくと，

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

となる。これを与えられた方程式に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$$

を得る。ここで x のベキを一番小さな n になるようにそろえると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!} = 0.$$

次に級数のインデックスを一番大きなものにそろえると，

$$c_1x - c_0 - c_1x + \sum_{n=2}^{\infty}[nc_n - c_n - \frac{1}{(n-2)!}]x^n = 0.$$

右辺は恒等的に 0 なので，項別微分を行なうと，x^n の係数はすべて 0 になる。よって漸化式

$$c_0 = 0,\ (n-1)c_n - \frac{1}{(n-2)!} = 0,\ n \geq 2.$$

または

$$c_0 = 0,\ c_n = \frac{1}{(n-1)!}$$

を得る。ここで，c_1 は初期条件 $y'(0)$ で決まるので，この場合は任意の定数と考えられる。よって，

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= c_1x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n \\ &= c_1x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \\ &= c_1x + x(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - 1) \end{aligned}$$

となりこの方程式の解は次の初等関数で表わせる。

$$y = c_1 x + x(e^x - 1). \quad \boxed{\text{終}}$$

(d)　$P(x) = x, Q(x) = -4, R(x) = 0$ より，$x = 0$ は通常点。よって，解を

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

とおくと，

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

となる。これらを与えられた方程式に代入すると

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

を得る。ここで x のベキを一番小さな n になるようにそろえると，

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) c_{n-2} x^{n-2} - 4 \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n-2} = 0.$$

次に級数のインデックスを一番大きなものにそろえると，

$$2c_2 - 4c_0 + \sum_{n=3}^{\infty} [n(n-1) c_n + (n-6) c_{n-2}] x^{n-2} = 0.$$

右辺は恒等的に 0 なので，項別微分を行なうと，x^n の係数はすべて 0 になる。よって漸化式

$$2c_2 - 4c_0 = 0, \ n(n-1) c_n + (n-6) c_{n-2} = 0, \ n \geq 3$$

または

$$c_2 = 2c_0, \ c_n = -\frac{(n-6) c_{n-2}}{n(n-1)}, \ n \geq 3$$

を得る。ここで，c_0, c_1 は初期条件 $y(0), y'(0)$ で決まるので，この場合は任意の定数と考えられる。よって，$c_2, c_3, \ldots$ を順次求めると

$$c_2 = 2c_0, \ c_3 = \frac{-c_1}{2}, \cdots$$

これより

$$c_{2n} = \frac{c_{2n}}{c_{2n-2}} \frac{c_{2n-2}}{c_{2n-4}} \frac{c_{2n-4}}{c_{2n-6}} c_{2n-6}, n \leq 2 \ c_{2n} = 0, n \geq 3$$

また

$$c_{2n+1} = \frac{c_{2n+1}}{c_{2n-1}} \frac{c_{2n-1}}{c_{2n-3}} \cdots \frac{c_3}{c_1} c_1 = \frac{3(-1)^n c_1}{2^n n! (2n+1)(2n-1)(2n-3)} x^{2n+1}$$

よって

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= c_0 + 2c_0 x^2 - \frac{c_0}{3} x^4 - c_1 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{2^n n!(2n+1)(2n-1)(2n-3)} x^{2n+1} \end{aligned}$$

となる． $\boxed{\text{終}}$

2

(a) $P(x)=0, Q(x)=x-2, R(x)=0$ より，$a=2$ は通常点。よって，解を

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-2)^n$$

とおくと，

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-2)^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-2)^{n-2}$$

となる。これらを与えられた方程式に代入すると

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-2)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-2)^{n+1} = 0$$

を得る。ここで $(x-2)$ のベキを一番小さな $n-2$ になるようにそろえると，

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} c_{n-3} (x-2)^{n-2} = 0.$$

次に級数のインデックスを一番大きな $n=3$ にそろえると，

$$2c_2(x-2) + \sum_{n=3}^{\infty} [n(n-1)c_n + c_{n-3}](x-2)^{n-2} = 0.$$

右辺は恒等的に 0 なので，項別微分を行なうと，$(x-2)^n$ の係数はすべて 0 になる。よって漸化式

$$c_2 = 0,\ n(n-1)c_n + c_{n-3} = 0,\ n \geq 3$$

または

$$c_2 = 0,\ c_n = -\frac{c_{n-3}}{n(n-1)},\ n \geq 3$$

を得る。ここで，c_0, c_1 は初期条件 $y(0), y'(0)$ で決まるので，この場合は任意の定数と考えられる。よって，$c_2, c_3, c_4, \ldots$ を順次求めると

$$c_2 = 0,\ c_3 = \frac{-c_1}{3 \cdot 2}, c_4 = \frac{-c_1}{4 \cdot 3} \cdots$$

これより

$$\begin{aligned} c_{3n} &= \frac{c_{3n}}{c_{3n-3}} \frac{c_{3n-3}}{c_{3n-6}} \cdots \frac{c_3}{c_0} c_0 \\ &= \frac{(-1)}{3n(3n-1)} \cdot \frac{(-1)}{(3n-3)(3n-4)} \cdots \frac{(-1)}{3 \cdot 2} c_0 \\ &= \frac{(-1)^n (3n-2)(3n-5) \cdots 4 \cdot 1 c_0}{(3n)!} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} c_{3n+1} &= \frac{c_{3n+1}}{c_{3n-2}}\frac{c_{3n-2}}{c_{3n-5}}\cdots\frac{c_4}{c_1}c_1 \\ &= \frac{(-1)}{(3n+1)(3n)}\cdot\frac{(-1)}{(3n-2)(3n-3)}\cdots\frac{(-1)}{4\cdot 3}c_0 \\ &= \frac{(-1)^n(3n-1)(3n-4)\cdots 2c_1}{(3n+1)!} \\ c_{3n+2} &= \frac{c_{3n+2}}{c_{3n-1}}\frac{c_{3n-1}}{c_{3n-4}}\cdots\frac{c_5}{c_2}c_2 = 0. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n}(x-2)^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n+1}(x-2)^{3n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n+2}(x-2)^{3n+2} \\ &= c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n-2)(3n-5)\cdots 4\cdot 1}{(3n)!}(x-2)^{3n} \\ &+ c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n-1)(3n-4)\cdots 2}{(3n+1)!}(x-2)^{3n+1} \end{aligned}$$

となる. $\boxed{\text{終}}$

(b)　$P(x) = x, Q(x) = 3, R(x) = x^2$ より，$a = 1$ は通常点。よって，解を

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n$$

とおくと,

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-1)^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-1)^{n-2}$$

となる。これらを与えられた方程式に代入すると

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-1)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3c_n(x-1)^n = x^2$$

を得る。ここで $(x-1)$ のベキを一番小さな $n-2$ になるようにそろえると,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty}(n-2)c_{n-2}(x-1)^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} 3c_{n-2}(x-1)^{n-2} \\ =\ &(x-1)^2 + 2(x-1) + 1. \end{aligned}$$

次に級数のインデックスを一番大きな $n = 3$ にそろえると,

$$2c_2 + 3c_0 + \sum_{n=3}^{\infty}[n(n-1)c_n + (n-2)c_{n-2} + 3c_{n-2}](x-1)^{n-2} = (x-1)^2 + 2(x-1) + 1.$$

両辺は恒等的に等しいので,

$$2c_2 + 3c_0 = 1, 6c_3 + c_1 + 3c_1 = 2, 12c_4 + 2c_2 + 3c_2 = 1,$$

$$n(n-1)c_n + (n+1)c_{n-2} = 0,\ n \geq 5$$

ここで，c_0, c_1 は初期条件 $y(0), y'(0)$ で決まるので，この場合は任意の定数と考えられる。よって，$c_2, c_3, c_4, \ldots$ を順次求めると

$$c_2 = \frac{1-3c_0}{2}, c_3 = \frac{1-3c_1}{3}, c_4 = \frac{-1+5c_0}{8},\ c_n = -\frac{(n+1)c_{n-2}}{n(n-1)},\ n \geq 5$$

を得る。これより

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= \frac{c_{2n}}{c_{2n-2}}\frac{c_{2n-2}}{c_{2n-4}}\cdots\frac{c_6}{c_4}c_4 \\
&= \frac{(-1)(2n+1)}{2n(2n-1)}\cdot\frac{(-1)(2n-1)}{(2n-2)(2n-3)}\cdots\frac{(-1)7}{6\cdot 5}c_4 \\
&= \frac{(-1)^n(2n+1)}{2^n n!}\frac{4\cdot 3}{-5}\cdot\frac{2\cdot 1}{-3}c_4 \\
&= \frac{(-1)^n(2n+1)}{2^n n!}\frac{4\cdot 3}{-5}\cdot\frac{2\cdot 1}{-3}(\frac{-1+5c_0}{8}) \\
&= \frac{(-1)^n(2n+1)}{2^n n!}(c_0 - \frac{1}{5})
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
c_{2n+1} &= \frac{c_{2n+1}}{c_{2n-1}}\frac{c_{2n-1}}{c_{2n-3}}\cdots\frac{c_5}{c_3}c_3 \\
&= \frac{(-1)(2n+2)}{(2n+1)(2n)}\cdot\frac{(-1)(2n)}{(2n-1)(2n-2)}\cdots\frac{(-1)6}{5\cdot 4}c_3 \\
&= \frac{(-1)^n 2^n (n+1)!}{(2n+1)!}(\frac{3\cdot 2}{-4})c_3 \\
&= \frac{(-1)^n 2^n (n+1)!}{(2n+1)!}(\frac{3\cdot 2}{-4}\cdot\frac{2-4c_1}{6}) \\
&= \frac{(-1)^n 2^n (n+1)!}{(2n+1)!}(c_1 - \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(x-1)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}(x-1)^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{2^n n!}(c_0 - \frac{1}{5})(x-1)^{2n} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n (n+1)!}{(2n+1)!}(c_1 - \frac{1}{2})(x-1)^{2n+1}
\end{aligned}$$

となる. $\boxed{終}$

4.3 Frobenius 法 (確定特異点の場合)

演習問題 4.3

1. 次の微分方程式の特異点をみつけ分類せよ。
(a) $x^2y'' + xy' + y = e^x$
(b) $x(x-1)^3y'' + xy' + (x-1)^2y = 0$
(c) $(2-x)y'' + xy' + \frac{y}{(x-2)^2} = 0$
2. 次の微分方程式の $x = 0$ のまわりでの級数解を 1 つ求めよ。
(a) $x^2y'' + xy' + (x^2-4)y = 0$
(b) $xy'' + y' + xy = 0$
(c) $4x^2y'' - 2x(x-2)y' - (3x+1)y = 0$
3. 次の微分方程式の付記した点のまわりでの整級数解を求めよ。
(a) $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,\ a = 1$
この方程式は 3 次の **Legendre の方程式**といいます。
(b) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0,\ a = 1$
(c) $x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0,\ a = 0$
この方程式は 0 次の **Bessel の方程式**といいます.

4.3

1.
(a)　標準形に直すと

$$y'' + \frac{x}{x^2}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{e^x}{x^2}$$

よって $P(x) = 1/x, Q(x) = 1/x^2, R(x) = e^x/x^2$。これより $x = 0$ は特異点。次に $x = 0$ が確定特異点か不確定特異点を調べる。

$xP(x) = 1, x^2Q(x) = 1$ より $xP(x), x^2Q(x)$ は $x = 0$ で共に解析的。よって $x = 0$ は確定特異点。$\boxed{終}$
(b)　標準形に直すと

$$y'' + \frac{x}{x(x-1)^3}y' + \frac{(x-1)^2}{x(x-1)^3}y = 0$$

よって $P(x) = 1/(x-1)^3, Q(x) = 1/(x(x-1)), R(x) = 0$。これより $x = 0, 1$ は特異点。次に $x = 0, 1$ が確定特異点か不確定特異点を調べる。

$xP(x) = x/(x-1)^3, x^2Q(x) = x/(x-1)$ より $xP(x), x^2Q(x)$ は $x = 0$ で共に解析的。よって $x = 0$ は確定特異点。次に

$(x-1)P(x) = 1/(x-1)^2, (x-1)^2Q(x) = x - 1/x$ より $(x-1)P(x))$ は $x = 1$ で解析的でない。よって $x = 1$ は不確定特異点。$\boxed{終}$
(c)　標準形に直すと

$$y'' + \frac{x}{2-x}y' + \frac{1}{(x-2)^2(2-x)}y = 0$$

よって $P(x) = x/(2-x), Q(x) = -1/(x-2)^2, R(x) = 0$。これより $x = 2$ は特異点。次に $x = 2$ が確定特異点か不確定特異点を調べる。

$(x-2)P(x) = x, (x-2)^2Q(x) = -1$ より $(x-2)P(x), (x-2)^2Q(x)$ は $x = 2$ で共に解析的。よって $x = 2$ は確定特異点。$\boxed{終}$
2.
(a)　$L(y) = x^2y'' + xy' + (x^2-4)y = 0$ を標準形に直すと

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2-4}{x^2}y = 0.$$

これより $P(x) = \frac{1}{x},\ Q(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$。よって $x=0$ は確定特異点。そこで解を $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r},\ c_0 \neq 0$ とおく。これを微分することにより得られる

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1},\ y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

を $L(y)=0$ に代入すると

$$L(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + (x^2-4)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

となる。ここで x のベキを必ず一番小さいものにそろえると

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r)c_n x^{n+r} - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^{n+r} - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0.$$

次に級数のインデックスを一番大きなものにそろえると

$$\underbrace{(r^2-4)c_0 x^r}_{n=0} + \underbrace{((r+1)^2-4)c_1 x^{r+1}}_{n=1} + \sum_{n=2}^{\infty}[((n+r)^2-4)c_n + c_{n-2}]x^{n+r} = 0$$

となる。これより決定方程式 $r^2-4=0$ を解くと $r=\pm 2$ となる。

ここで $r=2$ のときの解を求める。右辺は恒等的に零なので，左辺の x^{n+r} の係数は零である。よって

$$((r+1)^2-4)c_1 = 0 \text{ より } r=2 \text{ のとき } c_1 = 0.$$

また

$$((n+r)^2-4)c_n + c_{n-2} = 0\ n \geq 2$$

より漸化式

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{(n+r)^2-4},\ n \geq 2$$

を得る。ここで $r=2$ とおくと

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(n+4)}$$

となるので,

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{c_{2n}}{c_{2n-2}}\frac{c_{2n-2}}{c_{2n-4}}\cdots\frac{c_2}{c_0}c_0 \\ &= \frac{-1}{2n(2n+4)}\frac{-1}{(2n-2)(2n+2)}\cdots\frac{-1}{2\cdot 6}c_0 \\ &= \frac{(-1)^n c_0}{2^n n! 2^{n-1}(n+2)!} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n-1}n!(n+2)!} \end{aligned}$$

よって

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n c_0}{2^{2n-1}n!(n+2)!}x^{2n+2}.\boxed{\text{終}}$$

(b) $L(y) = xy'' + y' + xy = 0$ を標準形に直すと

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0.$$

これより $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = 1$。よって $x = 0$ は確定特異点。そこで解を $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$, $c_0 \neq 0$ とおく。これを微分することにより得られる

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1},\ y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

を $L(y) = 0$ に代入すると

$$L(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = 0$$

となる。ここで x のベキを一番小さいものにそろえると

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r-1} = 0.$$

次に級数のインデックスを一番大きなものにそろえると

$$\underbrace{r^2 c_0 x^{r-1}}_{n=0} + \underbrace{(r+1)^2 c_1 x^r}_{n=1} + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+r)(n+r)c_n + c_{n-2}]x^{n+r-1} = 0$$

となる。これより決定方程式 $r^2 = 0$ を解くと $r = 0$ となる。

ここで $r = 0$ のときの解を求める。右辺は恒等的に零なので，左辺の x^{n+r-1} の係数は零である。よって

$$(r+1)^2 c_1 = 0 \text{ より } r = 0 \text{ のとき } c_1 = 0.$$

また

$$(n+r)(n+r)c_n + c_{n-2} = 0 \ n \geq 2$$

より漸化式

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{(n+r)(n+r)},\ n \geq 2$$

を得る。ここで $r = 0$ とおくと

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n^2}$$

となるので，

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{c_{2n}}{c_{2n-2}}\frac{c_{2n-2}}{c_{2n-4}}\cdots\frac{c_2}{c_0}c_0 \\ &= \frac{-1}{(2n)^2}\frac{-1}{(2n-2)^2}\cdots\frac{-1}{2^2}c_0 \\ &= \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n}(n!)^2} \end{aligned}$$

よって

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n c_0}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}.\boxed{\text{終}}$$

(c)　$L(y) = 4x^2y'' - 2x(x-2)y' - (3x+1)y = 0$ を標準形に直すと

$$y'' - \frac{x-2}{2x}y' - \frac{3x+1}{4x^2}y = 0.$$

これより $P(x) = -\frac{x-2}{2x}$, $Q(x) = -\frac{3x+1}{4x^2}$。よって $x = 0$ は確定特異点。そこで解を $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$, $c_0 \neq 0$ とおく。これを微分することにより得られる

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1},\ y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

を $L(y) = 0$ に代入すると

$$\begin{aligned} L(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)c_n x^{n+r+1} \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} 3c_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

となる。ここで x のベキを一番小さいものにそろえると

$$\sum_{n=0}^{\infty}[4(n+r)(n+r)-1]c_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty}[2(n+r-1)+3]c_{n-1}x^{n+r} = 0.$$

次に級数のインデックスを一番大きなものにそろえると

$$\underbrace{(4r^2-1)c_0x^r}_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty}[(4(n+r)^2-1)c_n - (2(n+r-1)+3)c_{n-1}]x^{n+r} = 0$$

となる。これより決定方程式 $4r^2 - 1 = 0$ を解くと $r = \pm 1/2$ となる。

　ここで $r = 1/2$ のときの解を求める。右辺は恒等的に零なので，左辺の x^{n+r} の係数は零である。よって

$$(4(n+r)^2-1)c_n - (2(n+r-1)+3)c_{n-1}\ n \geq 1$$

より漸化式

$$c_n = \frac{2(n+r-1)+3)c_{n-1}}{(4(n+r)^2-1)},\ n \geq 1$$

を得る。ここで $r = 1/2$ とおくと

$$c_n = \frac{2(n+1)c_{n-1}}{4n(n+1)} = \frac{c_{n-1}}{2n}$$

となるので,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{c_n}{c_{n-1}}\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}\cdots\frac{c_1}{c_0}c_0 \\ &= \frac{1}{2n}\frac{1}{2(n-1)}\cdots\frac{1}{2}c_0 \\ &= \frac{c_0}{2^n n!} \end{aligned}$$

よって

$$y_1(x) = |x^{1/2}|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_0}{2^n n!}x^n. \boxed{\text{終}}$$

3.

(a)　$L(y) = (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ を標準形に直すと

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2}y = 0.$$

これより $P(x)=-\frac{2x}{1-x^2}$, $Q(x)=\frac{n(n+1)}{1-x^2}$。よって $x=0$ は確定特異点。そこで解を $y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, $c_0\neq 0$ とおく。これを微分することにより得られる

$$y'=\sum_{k=1}^{\infty}nc_kx^{k-1},\ y''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}$$

を $L(y)=0$ に代入すると

$$\begin{aligned}
L(y) &= (1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-2x\sum_{k=0}^{\infty}kc_kx^{k-1}+n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k^2-k+2k-n(n+1))x^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-\sum_{k=0}^{\infty}c_k(n-k)(n+k+1)x^k=0
\end{aligned}$$

となる。ここで x のベキを一番小さいものにそろえると

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty}c_{k-2}(n-k+2)(n+k-1)x^{k-2}=0$$

これより，c_0,c_1 を任意の定数とするとき，$k\geq 2$ で

$$c_k=\frac{(n+k-1)(n-k+2)}{k(k-1)}c_{k-2}$$

となる．この漸化式より，c_k を求める．

$$\begin{aligned}
c_{2m} &= -\frac{(n+2m-1)(n-2m+2)}{2m(2m-1)}c_{2m-2}=\cdots \\
&= (-1)^m\frac{(n+2m-1)(n+2m-3)\cdots(n+2-1)(n-2+2)(n-2m+4)(n-2m+2)}{2m(2m-1)\cdots 3\cdot 2}c_0 \\
c_{2m+1} &= -\frac{(n-2m+1)(n+2m)}{(2m+1)(2m)}c_{2m-1}=\cdots \\
&= (-1)^m\frac{(n+2m)(n+2m-1)\cdots(n+2)(n-2+1)(n-2m+3)(n-2m+1)}{2m(2m-1)\cdots 3\cdot 2}c_1
\end{aligned}$$

ここで，$c_0=1,c_0=0$ とすると，$c_{2m+1}=0\ (m=0,1,2,\cdots)$ となる．対応する解を $y_1(x)$ とすると，

$$y_1(x)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\left((n+2m-1)(n+2m-3)\cdots(n+1)n\cdots(n-2m+4)(n-2m+2)\right)x^{2m}$$

また，$c_0=0,c_1=1$ とすると，$a_{2m}=0\ (m=0,1,2,\cdots)$ となる．対応する解を $y_2(x)$ とすると，

$$y_2(x)=x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left((n+2m)(n+2m-2)\cdots(n+2)(n-1)\cdots(n-2m+3)(n-2m+1)\right)x^{2m+1}$$

比較判定法により，$|x|<1$ でこの級数は収束することが分かる．

$\boxed{\text{終}}$

(b)　$(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$ を標準形に直すと

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{12}{1-x^2}y=0.$$

これより $P(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$, $Q(x) = \frac{12}{1-x^2}$．よって $x = 1$ は確定特異点．そこで $t = x - 1$ とおくと，$x = t + 1$ より

$$\begin{aligned} & (1-x^2)y'' - 2xy' + 12y \\ = \quad & (t^2+2t)y'' + 2(t+1)y' - 12y = 0 \end{aligned}$$

となる．これより $t = 0$ は確定特異点となるので，解を $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r}$, $c_0 \neq 0$ とおく．これを微分することにより得られる

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n t^{n+r-1},\ y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r-2}$$

を $L(y) = 0$ に代入すると

$$\begin{aligned} L(y) \quad = \quad & \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r-1} \\ + \quad & \sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)c_n t^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)c_n t^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}12c_n t^{n+r} \\ = \quad & \sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r+1)-12]c_n t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}[2(n+r)^2 c_n]t^{n+r-1} = 0 \end{aligned}$$

となる．ここで t のベキを一番小さいものにそろえると

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r-1)(n+r)-12]c_{n-1}t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)^2 c_n t^{n+r-1}$$

次にインデックスを一番大きなものにそろえると

$$L(y) = 2r^2 c_0 t^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+r-1)(n+r)-12]c_{n-1} + 2(n+r)^2 c_n]t^{n+r-1} = 0$$

となる．これより決定方程式 $2r^2 = 0$ を解くと $r = 0$ となる．

ここで $r = 0$ のときの解を求める．右辺は恒等的に零なので，左辺の t^{n+r-1} の係数は零である．よって

$$((n+r)(n+r-1)-12)c_{n-1} + 2(n+r)^2 c_n = 0 \ n \geq 1$$

より漸化式

$$c_n = -\frac{((n+r)(n+r-1)-12)c_{n-1}}{2(n+r)^2},\ n \geq 1$$

を得る．ここで $r = 0$ とおくと

$$c_n = -\frac{(n(n-1)-12)c_{n-1}}{2n^2} = -\frac{(n+3)(n-4)c_{n-1}}{2n^2}$$

となる．これより c_1, c_2, c_3, c_4 を求めると

$$c_1 = 6, c_2 = \frac{5}{4}c_1 = \frac{15}{2}c_0, c_3 = \frac{1}{3}c_2 = \frac{5}{2}c_0, c_4 = 0, \cdots$$

よって

$$y_1(t) = c_0(1 + 6t + \frac{15}{2}t^2 + \frac{5}{2}t^3).$$

次にこれと 1 次独立な解 y_2 を求める．y_2 は階数低減法で求められる．

(階数低減法による)

$y_2(t) = y_1 v(t)$ とおき $L(y) = 0$ に代入すると

$$y_1 v''(t) + [2y_1' + \frac{2t+2}{t^2+2t} y_1] v'(t) = 0$$

ここで $w = v'$ とおくと

$$\frac{w'}{w} = -[2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{2t+2}{t^2+2t}]$$

$$\log w = -2\log_{y_1} - \log{(t^2+2t)} = -(\log y_1^2 (t^2+2t))$$

よって

$$w = \exp -(\log y_1^2 (t^2+2t)) = \frac{1}{y_1^2(t^2+2t)}$$

ここで $y_1 = 1 + 6t + 15t^2/2 + 5t^3/2$ を用いると

$$w = \frac{1}{(1+6t+15t^2/2+5t^3/2)^2(t^2+2t)} = \frac{1}{2t} - \frac{25}{4} + \frac{397t}{8} - \frac{5109t^2}{16} + \cdots$$

これより

$$\begin{aligned} v(t) &= \int \frac{1}{2t} - \frac{25}{4} + \frac{397t}{8} - \frac{5109t^2}{16} + \cdots dt \\ &= \frac{1}{2}\log t - \frac{25t}{4} + \frac{397t^2}{16} - \frac{5109t^3}{32} + \cdots \end{aligned}$$

で与えられる．よって

$$y_2 = y_1(\frac{1}{2}\log t - \frac{25t}{4} + \frac{397t^2}{16} - \frac{5109t^3}{32} + \cdots) \quad \boxed{終}$$

別解

$y_2 = y_1 \log|t| + t\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$ で与えられるので，これを $L(y) = (t^2+2t)y'' + 2(t+1)y' - 12y = 0$ に代入し C_n を求める．計算の都合上 $c_0 = 1$ とおくと．

$$\begin{aligned} y_2' &= y_1' \log|t| + \frac{y_1}{t} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)C_n t^n \\ y_2'' &= y_1'' \log|t| + \frac{2y_1'}{t} - \frac{y_1}{t^2} + \sum_{n=1} n(n+1)C_n t^{n-1} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} L(y_2) &= (t^2+2t)[y_1''\log|t| + \frac{2y_1'}{t} - \frac{y_1}{t^2} + \sum_{n=1} n(n+1)C_n t^{n-1}] \\ &+ (2t+2)[y_1'\log|t| + \frac{y_1}{t} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)C_n t^n] \\ &- 12[y_1\log|t| + t\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n] \\ &= \log|t| L(y_1) + (t^2+t)(\frac{2y_1'}{t} - \frac{y_1}{t^2}) + (2t+2)(\frac{y_1}{t}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)C_n t^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n(n+1)C_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)C_n t^{n+1} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)C_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 12C_n t^{n+1}
\end{aligned}
$$

ここで $L(y_1) = 0$ に注意し，t のベキを一番小さいのでそろえると

$$
\begin{aligned}
L(y_2) &= 2ty_1' + 4y_1' + y_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)nC_{n-1}t^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2n(n+1)C_n t^n \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} 2nC_{n-1}t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)C_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 12C_{n-1}t^n = 0
\end{aligned}
$$

次にインデックスを一番大きなものにそろえると

$$
\begin{aligned}
L(y_2) &= 2ty_1' + 4y_1' + y_1 + 2C_0 + [4C_1 + (2-12)C_0]t \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty}[((n+1)n - 12)C_{n-1} + (2n+2)(n+1)C_n]t^n = 0
\end{aligned}
$$

ここで $y_1 = 1 + 6t + \frac{15}{2}t^2 + \frac{5}{2}t^3$ を用いると

$$
2ty_1' + 4y_1' + y_1 = 25 + 78t + \frac{135t^2}{2} + \frac{35t^3}{2}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
L(y_2) &= 25 + 78t + \frac{135t^2}{2} + \frac{35t^3}{2} \\
&+ 2C_0 + [4C_1 + (2-12)C_0]t \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty}[((n+1)n - 12)C_{n-1} + 2(n+1)^2 C_n]t^n = 0
\end{aligned}
$$

これより

$$
C_0 = \frac{25}{2}, 4C_1 - 10C_0 + 78 = 0, -2C_1 + 12C_2 + \frac{135}{2} = 0, 32C_3 + \frac{35}{2} = 0,
$$

$$
C_n = -\frac{(n-3)(n+4)}{2(n+1)^2}
$$

よって

$$
C_0 = \frac{25}{2}, C_1 = \frac{47}{4}, C_2 = \frac{11}{3}, C_3 = -\frac{35}{64}, C_4 = -\frac{2}{25}, \ldots
$$

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 \log|t| + \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+1} \\
&= y_1 \log|t| + \frac{25}{2}t + \frac{47}{4}t^2 + \frac{11}{3}t^3 - \frac{35}{64}t^4 - \cdots
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

(c) $L(y) = x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$ を標準形に直すと

$$
y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - m^2}{x^2}y = 0.
$$

これより $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{x^2-m^2}{x^2}$。よって $x=0$ は確定特異点。そこで解を $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$, $c_0 \neq 0$ とおく。これを微分することにより得られる

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1},\ y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

を $L(y) = 0$ に代入すると

$$\begin{aligned} L(y) &= x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + (x^2-m^2)\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} - m^2\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)^2-m^2]c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r+2} = 0 \end{aligned}$$

となる。ここで x のベキを一番小さいものにそろえると

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)^2-m^2]c_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^{n+r} = 0$$

次にインデックスを一番大きなものにそろえると

$$(r^2-m^2)c_0 + (1+r)^2 - m^2)c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{[(n+r)^2-m^2]c_n + c_{n-2}\right\}x^{n+r} = 0$$

ここで，右辺は恒等的に零なので，

1. $c_0(r^2-m^2=0) \Rightarrow r = \pm m, c_0 \neq 0$
2. $(1+r)^2-m^2)c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$
3. $[(n+r)^2-m^2]c_n + c_{n-2} = 0\ n \geq 2$

より漸化式

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{(n+r)^2-m^2},\ n \geq 2$$

を得る．これより

$$\begin{aligned} &c_{2k+1} = 0\ (k = 0, 1, 2, \cdots) \\ &c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{2k(2k+2m)} = \cdots = -\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}c_0 \end{aligned}$$

したがって，$r_1 = m$ に対する解 y_1 は

$$y_1 = c_0 x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}(\frac{x}{2})^{2k}$$

となる．

一般に，$c_0 = \frac{1}{2^m\Gamma(m+1)}$ とおいたものを $J_m(x)$ で表し，m **次の第 1 種ベッセル関数 (Bessel function)** という．ここで，ガンマ関数の性質 $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$ を用いると

$$\Gamma(m+k+1) = (m+k)\Gamma(m+k) = \cdots = (m+k)(m+k-1)\cdots(m+1)\Gamma(m+1)$$

となるので，

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(m+k+1)} (\frac{x}{2})^{2k+m}$$

　次に $r_2 = -m$ に対する解 y_2 を求める．$r_1 - r_2 = 2m$ より，m が整数でなければ，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-m}$ の形の解が存在する．この場合，2.3. より

$$c_{2k+1} = 0 \ (k = 0, 1, 2, \cdots),\ c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{2k(2k-2m)}$$

となるので，$c_0 = \frac{2^m}{\Gamma(1-m)}$ と選ぶと，2 つ目の解

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(m-k+1)} (\frac{x}{2})^{2k-m}$$

が得られる．さらに，m が整数でなければ $\Gamma(k-m+1)$ は定義され，$J_{-m}(x)$ はベッセル方程式の解である．$J_{-m}(x)$ を $(-m)$ **次の第１種ベッセル関数**という．

　m が整数でないとき，

$$\lim_{x \to 0} J_m(x) = 0,\ \lim_{x \to 0} J_{-m}(x) = \infty$$

より，$J_m(x)$ と $J_{-m}(x)$ の比は定数ではない．したがって，$J_m(x)$ と $J_{-m}(x)$ はベッセル方程式の 1 次独立な解である．$\boxed{\text{終}}$

第5章　ラプラス変換

5.1　ラプラス変換の定義

演習問題 5.1

1. 次の関数のラプラス変換を求めよ。

$(a)\ f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 4 \\ t, & 4 < t \end{cases}$　　$(b)\ f(t) = t^2 - 2t - 5$

$(c)\ f(t) = te^{-t}$　　$(d)\ f(t) = e^{2t}\cos t$

$(e)\ f(t) = t^n$

(a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^4 2e^{-st}dt + \int_4^\infty \underbrace{t}_{u}\underbrace{e^{-st}dt}_{dv} \left(\begin{array}{ll} u = t & dv = e^{-st}dt \\ du = dt & v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{array} \right) \\
&= -\frac{2}{s}e^{-st}\ |_0^4 - \frac{t}{s}e^{-st}\ |_4^{\infty-} + \frac{1}{s}\int_4^\infty e^{-st}dt \\
&= -\frac{2}{s}(e^{-4s} - 1) + \frac{4}{s}e^{-4s} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\ |_4^{\infty-} \\
&= \frac{2}{s}(e^{-4s} + 1) + \frac{1}{s^2}e^{-4s}\ \boxed{終}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty (t^2 - 2t - 5)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \underbrace{t^2}_{u}\underbrace{e^{-st}dt}_{dv} \left(\begin{array}{ll} u = t^2 & dv = e^{-st}dt \\ du = 2tdt & v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{array} \right) \\
&- 2\int_0^\infty te^{-st}dt - 5\int_0^\infty e^{-st}dt \\
&= -\frac{t^2}{s}e^{-st}\ |_0^{\infty-} + \frac{2}{s}\int_0^\infty te^{-st}dt \\
&- 2\int_0^\infty te^{-st}dt + \frac{5}{s}e^{-st}\ |_0^{\infty-} \\
&= \frac{5}{s} + (\frac{2}{s} - 2)\int_0^\infty \underbrace{t}_{u}\underbrace{e^{-st}dt}_{dv} \left(\begin{array}{ll} u = t & dv = e^{-st}dt \\ du = dt & v = -\frac{1}{s}e^{-st}dt \end{array} \right) \\
&= (\frac{2}{s} - 2)(\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt) - \frac{5}{s} \\
&= (\frac{2}{s} - 2)(-\frac{1}{s^2})e^{-st}\ |_0^{\infty-} + \frac{5}{s} = (\frac{2}{s} - 2)\frac{1}{s^2} - \frac{5}{s}\ \boxed{終}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty te^{-t}e^{-st}dt = \int_0^\infty \underbrace{t}_{u}\underbrace{e^{-(1+s)t}dt}_{dv} \quad \begin{pmatrix} u=t & dv=e^{-(1+s)t}dt \\ du=dt & v=-\frac{1}{s+1}e^{-(1+s)t}\end{pmatrix} \\ &= -\frac{t}{1+s}e^{-(1+s)t}\,|_0^{\infty-} + \frac{1}{1+s}\int_0^\infty e^{-(1+s)t}dt \\ &= -\frac{e^{-(1+s)t}}{(1+s)^2}\,|_0^{\infty-} = \frac{1}{(1+s)^2} \quad \boxed{終}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{2t}\cos t\} &= \int_0^\infty e^{2t}\cos te^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(2-s)t}\cos tdt \\ &= \int_0^\infty e^{(2-s)t}(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2})dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{(2-s+i)t}+e^{(2-s-i)t})dt \\ &= \frac{1}{2}(\frac{e^{(2-s-i)t}}{2-s+i}+\frac{e^{(2-s-i)t}}{2-s-i})\,|_0^{\infty-} \\ &= -\frac{1}{2}(\frac{1}{2-s+i}+\frac{1}{2-s-i}) \\ &= -\frac{1}{2}(\frac{2(2-s)}{(2-s)^2+1}) = \frac{s-2}{(s-2)^2+1} \quad \boxed{終}\end{aligned}$$

(e)

$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty t^n e^{-st}dt = I_n$ とおくと

$$I_n = -\frac{t^n}{s}e^{-st}\,|_0^{\infty-} + \frac{n}{s}\underbrace{\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt}_{I_{n-1}} = \frac{n}{s}I_{n-1}$$

また $I_0 = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ より

$$\frac{I_n}{I_0} = \frac{I_n}{I_{n-1}}\frac{I_{n-1}}{I_{n-2}}\cdots\frac{I_2}{I_1}\frac{I_1}{I_0} = \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\frac{n-2}{s}\cdots\frac{1}{s}$$

よって

$$I_n = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \boxed{終}$$

5.2　ラプラス変換の存在

演習問題 5.2

1. 次の関数は指数位数であることを示せ。

(a) $\sin 3t$　　(b) e^{100t}

(c) $\log(1+t)$　(d) t^3e^{7t}

(a)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin 3t}{e^{at}} = 0\ (a>0) \quad \boxed{終}$$

(b)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{e^{100t}}{e^{at}} = 0 \ (a > 100) \quad \boxed{終}$$

(c)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log(1+t)}{e^{at}} = \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{1+t}}{ae^{at}} = 0 \ (a > 0) \quad \boxed{終}$$

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{t^3e^{7t}}{e^{at}} &= \lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^{(a-7)t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{3t^2}{(a-7)e^{(a-7)t}} \\ &= \cdots = \lim_{t\to\infty}\frac{6}{(a-7)^3e^{(a-7)t}} = 0 \ (a > 7) \quad \boxed{終}\end{aligned}$$

5.3　基本法則

演習問題 5.3.1

1. 次の関数のラプラス変換を求めよ。

(a) $f(t) = t^2 + 3t - 4$　　(b) $f(t) = e^{3t+4}$

(c) $f(t) = \sin^2 t$　　(d) $f(t) = e^{2t}\sin t$

(e) $f(t) = t^3e^{3t}$　　(f) $f(t) = \cos(t+a)$

(g) $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 3 \\ 0, & 3 < t < 6 \\ 2, & t > 6 \end{cases}$　　(h) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

(i) $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 2 \\ t^2, & 2 < t < 4 \\ t, & 4 < t < 8 \\ 3, & t > 8 \end{cases}$

解答

(a)

$$\mathcal{L}\{t^2 + 3t - 4\} = \mathcal{L}\{t^2\} + 3\mathcal{L}\{t\} - \mathcal{L}\{4\} = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2} - \frac{4}{s} \quad \boxed{終}$$

(b)

$$\mathcal{L}\{e^{3t+4}\} = \mathcal{L}\{e^{3t}e^4\} = e^4\mathcal{L}\{e^{3t}\} = \frac{e^4}{s-3} \quad \boxed{終}$$

(c)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin^2 t\} &= \mathcal{L}\{\frac{1-\cos 2t}{2}\} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos 2t\}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}) \quad \boxed{終}\end{aligned}$$

(d) 公式より $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1} = F(s)$。よって第一移動法則より

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\sin t\} = F(s-2) = \frac{1}{(s-2)^2+1} \quad \boxed{終}$$

(e) 公式より $\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4} = F(s)$。よって第一移動法則より

$$\mathcal{L}\{t^3 e^{3t}\} = F(s-3) = \frac{6}{(s-3)^4} \quad \boxed{終}$$

(f) 加法定理より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(t+a)\} &= \mathcal{L}\{\cos t\cos a - \sin t\sin a\}\\ &= \cos a\mathcal{L}\{\cos t\} - \sin a\mathcal{L}\{\sin t\}\\ &= \frac{s\cos a}{s^2+1} - \frac{\sin a}{s^2+1} \quad \boxed{終}\end{aligned}$$

(g) $f(t)$ を単位ステップ関数 $u_a(t)$ を用いて表すと,

$$f(t) = 2u_0(t) - 2u_3(t) + 2u_6(t)$$

よって

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 2\mathcal{L}\{u_0(t)\} - 2\mathcal{L}\{u_3(t)\} + 2\mathcal{L}\{u_6(t)\} = \frac{2}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s} + \frac{2e^{-6s}}{s} \quad \boxed{終}$$

(h) $f(t) = u_{\frac{\pi}{2}}(t)\sin t$ より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)\sin t\} = e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}\{\sin(t+\frac{\pi}{2})\}\\ &= e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}\{\cos t\} = e^{-\frac{\pi}{2}s}(\frac{s}{s^2+1}) \quad \boxed{終}\end{aligned}$$

(i) $f(t) = 2u_0(t) + (t^2-2)u_2(t) + (t-t^2)u_4(t) + (3-t)u_8(t)$ より第 2 移動法則を用いると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= 2\mathcal{L}\{u_0(t)\} + \mathcal{L}\{(t^2-2)u_2(t)\} + \mathcal{L}\{(t-t^2)u_4(t)\} + \mathcal{L}\{(3-t)u_8(t)\}\\ &= \frac{2}{s} + e^{-2s}\mathcal{L}\{(t+2)^2-2\} + e^{-4s}\mathcal{L}\{(t+4-(t+4)^2)\} + e^{-8s}\mathcal{L}\{3-(t+8)\}\\ &= \frac{2}{s} + e^{-2s}\mathcal{L}\{t^2+4t+2\} + e^{-4s}\mathcal{L}\{-(t^2+7t+12)\} + e^{-8s}\mathcal{L}\{-t-5\}\\ &= \frac{2}{s} + e^{-2s}(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s}) - e^{-4s}(\frac{2}{s^3} + \frac{7}{s^2} + \frac{12}{s}) - e^{-8s}(\frac{1}{s^2} + \frac{5}{s}) \quad \boxed{終}\end{aligned}$$

演習問題 5.3.2

1. 次の初期値問題の解のラプラス変換を求めよ。
(a) $y'' + 4y' - 5y = e^t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
(b) $y'' + 4y' + 4y = e^{-t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
(c) $y'' + 4y' - 5y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < \pi \\ \cos t, & t > \pi \end{cases}$$

解答

(a) 両辺にラプラス変換を施すと

$$\mathcal{L}\{y'' + 4y' - 5y\} = \mathcal{L}\{e^t\}$$

微分法則を用いて変形すると

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) - 5Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

初期値 $y(0)=0, y'(0)=1$ を代入すると

$$s^2Y(s)-1+4sY(s)-5Y(s)=\frac{1}{s-1}$$

これを $Y(s)$ について解くと

$$Y(s)(s^2+4s-5)=\frac{1}{s-1}+1=\frac{s}{s-1}$$

より

$$Y(s)=\frac{s}{(s-1)(s^2+4s-5)} \quad \boxed{終}$$

(b) 両辺にラプラス変換を施すと

$$\mathcal{L}\{y''+4y'+4y\}=\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

微分法則を用いて変形すると

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4(sY(s)-y(0))+4Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

初期値 $y(0)=1, y'(0)=1$ を代入すると

$$s^2Y(s)-s-1+4sY(s)-4+4Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

これを $Y(s)$ について解くと

$$Y(s)(s^2+4s+4)=\frac{1}{s+1}+s+5=\frac{1+s^2+6s+5}{s+1}$$

より

$$Y(s)=\frac{s^2+6s+6}{(s+1)(s^2+4s+4)} \quad \boxed{終}$$

(c) 両辺にラプラス変換を施すと

$$\mathcal{L}\{y''+4y'-5y\}=\mathcal{L}\{f(t)\}$$

微分法則を用いて変形すると

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4(sY(s)-y(0))-5Y(s)=\mathcal{L}\{2u_0(t)+(\cos t-2)u_\pi(t)\}$$

初期値 $y(0)=0, y'(0)=0$ を代入すると

$$s^2Y(s)+4sY(s)-5Y(s)=\frac{2}{s}+e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\cos(t+\pi)-2\}$$

これを $Y(s)$ について解くと

$$Y(s)(s^2+4s-5)=\frac{2}{s}+e^{-\pi s}(\frac{-s}{s^2+1}-\frac{2}{s})$$

よって

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+4s-5}(\frac{2(1-e^{-\pi s})}{s}-\frac{se^{-\pi s}}{s^2+1}) \quad \boxed{終}$$

5.4 ラプラス逆変換

演習問題 5.4

1. 次の関数の逆変換をもとめよ。

(a) $F(s) = \frac{5}{(s-2)^6}$ (b) $F(s) = \frac{s}{(s+2)^2+1}$ (c) $F(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$ (d) $F(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$

(e) $F(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ (f) $F(s) = \frac{3s^2+4}{s^4+s^2}$ (g) $F(s) = \frac{1+e^{-2s}}{(s^2+1)(s^2+4)}$

解答

(a) 逆変換公式 $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s-a)^n}] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$ を用いる。

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{5}{(s-2)^6}\} = 5\frac{t^5e^{2t}}{5!} = \frac{t^5e^{2t}}{4!} \quad \boxed{終}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s+2)^2+1}\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+2-2}{(s+2)^2+1}\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{(s+2)^2+1}\} \\
&= e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\sin t \quad \boxed{終}
\end{aligned}$$

(c) 部分分数分解を行なうと

$$\frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = (s+1)\frac{1}{(s+1)(s+2)}\ |_{s=-1} = 1,\ B = (s+2)\frac{1}{(s+1)(s+2)}\ |_{s=-2} = -1$$

よって

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+3s+2}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{-1}{s+2}\} = e^{-t} - e^{-2t} \quad \boxed{終}$$

(d)

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+1}{s^2+2s+2}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\} = e^{-t}\cos t \quad \boxed{終}$$

(e) 部分分数分解を行なうと

$$\frac{s^2}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$$A = (s+1)\frac{s^2}{(s+1)(s+2)(s+3)}\ |_{s=-1} = \frac{1}{2}$$

$$B = (s+2)\frac{s^2}{(s+1)(s+2)(s+3)}\ |_{s=-2} = -4$$

$$C = (s+3)\frac{s^2}{(s+1)(s+2)(s+3)}\ |_{s=-3} = \frac{9}{2}$$

よって

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2}{(s+1)(s+2)(s+3)}\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1/2}{s+1} + \frac{-4}{s+2} + \frac{9/2}{s+3}\} \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} - 4\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+4}\} + \frac{9}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+3}\} \\
&= \frac{e^{-t}}{2} - 4e^{-2t} + \frac{9e^{-3t}}{2} \quad \boxed{終}
\end{aligned}$$

(f) 部分分数分解を行なうと

$$\frac{3s^2+4}{s^4+s^2} = \frac{3s^2+4}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$B = s^2(\frac{3s^2+4}{s^2(s^2+1)}\ |_{s=0} = 4$$

$$A = (\frac{3s^2+4}{s^2+1})'\ |_{s=0} = \frac{6s(s^2+1)-(3s^2+4)(2s)}{(s^2+1)^2}\ |_{s=0} = 0$$

$$Cs+D\ |_{s=i} = \frac{3s^2+4}{s^2}\ |_{s=i} = -1 \to Ci+D = -1 \to C=0, D=-1$$

よって

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{3s^2+4}{s^4+s^2}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{4}{s^2}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = 4t - \sin t \quad \boxed{終}$$

(g) 部分分数分解を行なうと

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1+e^{-2s}}{(s^2+1)(s^2+4)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{(s^2+1)(s^2+4)}\}$$

ここで

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}\}$$

とおく

$$As+B\ |_{s=i} = (s^2+1)(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)})\ |_{s=i} = \frac{1}{3} \to Ai+B = \frac{1}{3} \to A=0, B=\frac{1}{3}$$

$$Cs+D\ |_{s=2i} = \frac{1}{s^2+1}\ |_{s=2i} = -\frac{1}{3} \to Ci+D = -\frac{1}{3} \to C=0, D=-\frac{1}{3}$$

よって

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1/3}{s^2+1} + \frac{-1/3}{s^2+4}\} = \frac{\sin t}{3} - \frac{\sin 2t}{6}$$

第 2 移動法則より

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{(s^2+1)(s^2+4)}\} = u_2(t)f(t-2) = u_2(t)(\frac{\sin(t-2)}{3} - \frac{\sin 2(t-2)}{6})$$

したがって

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1+e^{-2s}}{(s^2+1)(s^2+4)}\} = \frac{\sin t}{3} - \frac{\sin 2t}{6} + u_2(t)(\frac{\sin(t-2)}{3} - \frac{\sin 2(t-2)}{6}) \quad \boxed{終}$$

5.5　微分方程式への応用

演習問題 5.5

1. 次の初期値問題を解け。

(a) $y'' + 4y' - 5y = e^t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(b) $y'' + 4y' + 4y = e^{-t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

(c) $y'' + 4y' - 5y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < \pi \\ \cos t, & t > \pi \end{cases}$$

$(d)\ \begin{cases} y_1' + y_2 = 0 \\ y_1 + y_2' = 0,\ y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 0 \end{cases}$

$(e)\ \begin{cases} y_1' - y_2' - y_2 = -e^t \\ y_1 + y_2' - y_2 = e^{2t},\ y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1 \end{cases}$

$(f)\ \begin{cases} y_1'' + 2y_2' + y_1 = \sin t \\ y_2'' + 2y_1' + y_2 = 0,\ y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = y_2'(0) = 0 \end{cases}$

解答

5.5(a)　両辺にラプラス変換を施すと

$$\mathcal{L}\{y'' + 4y' - 5y\} = \mathcal{L}\{e^t\}$$

微分法則を用いて変形すると

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) - 5Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

初期値 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ を代入すると

$$s^2Y(s) - 1 + 4sY(s) - 5Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

これを $Y(s)$ について解くと

$$Y(s)(s^2 + 4s - 5) = \frac{1}{s-1} + 1 = \frac{s}{s-1}$$

より

$$Y(s) = \frac{s}{(s-1)(s^2+4s-5)}$$

ここで $Y(s)$ の逆変換を求めると $y(t)$ が得られる。つまり

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s-1)(s^2+4s-5)}\}$$

部分分数分解を用いて

$$\frac{s}{(s-1)(s^2+4s-5)} = \frac{s}{(s-1)^2(s+5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+5}$$

$$B = (s-1)^2(\frac{s}{(s-1)^2(s+5)})\ |_{s=1} = \frac{1}{6}, A = (\frac{s}{s+5})'\ |_{s=1} = -\frac{5}{36}$$

$$C = (s+5)(\frac{s}{(s-1)^2(s+5)})\ |_{s=-5} = -\frac{5}{36}$$

よって

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{5/36}{s-1} + \frac{1/6}{(s-1)^2} + \frac{-5/36}{s+5}\} = \frac{5e^t}{36} + \frac{te^t}{6} - \frac{5e^{-5t}}{36}\ \boxed{終}$$

5.5(b)　両辺にラプラス変換を施すと

$$\mathcal{L}\{y'' + 4y' + 4y\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

微分法則を用いて変形すると

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

初期値 $y(0)=1, y'(0)=1$ を代入すると

$$s^2Y(s)-s-1+4sY(s)-4+4Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

これを $Y(s)$ について解くと

$$Y(s)(s^2+4s+4)=\frac{1}{s+1}+s+5=\frac{1+s^2+6s+5}{s+1}$$

より

$$Y(s)=\frac{s^2+6s+6}{(s+1)(s^2+4s+4)}$$

ここで $Y(s)$ の逆変換を求めると $y(t)$ が得られる。つまり

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2+6s+6}{(s+1)(s^2+4s+4)}\}$$

部分分数分解を用いて

$$\frac{s^2+6s+6}{(s+1)(s^2+4s+4)}=\frac{s^2+6s+6}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{(s+2)^2}$$

$$A=(s+1)(\frac{s^2+6s+6}{(s+1)(s+2)^2})\mid_{s=-1}=1$$

$$C=(s+2)^2(\frac{s^2+6s+6}{(s+1)(s+2)^2})\mid_{s=-2}=2$$

$$B=(\frac{s^2+6s+6}{s+1})'\mid_{s=-2}=\frac{(2s+6)(s+1)-(s^2+6s+6)}{(s+1)^2}\mid_{s=-2}=0$$

よって

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}+\frac{2}{(s+2)^2}\}=e^{-t}+2te^{-2t}\ \boxed{終}$$

5.5(c) 両辺にラプラス変換を施すと

$$\mathcal{L}\{y''+4y'-5y\}=\mathcal{L}\{f(t)\}$$

微分法則を用いて変形すると

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4(sY(s)-y(0))-5Y(s)=\mathcal{L}\{2u_0(t)+\cos(t-2)u_\pi(t)\}$$

初期値 $y(0)=0, y'(0)=0$ を代入すると

$$s^2Y(s)+4sY(s)-5Y(s)=\frac{2}{s}+e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\cos(t+\pi)-2\}$$

これを $Y(s)$ について解くと

$$Y(s)(s^2+4s-5)=\frac{2}{s}+e^{-\pi s}(\frac{-s}{s^2+1}-\frac{2}{s})$$

よって

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+4s-5}(\frac{2}{s}-e^{-\pi s}(\frac{3s^2+2}{s(s^2+1)}))$$

ここで $Y(s)$ の逆変換を求めると $y(t)$ が得られる。つまり

$$y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+4s-5)}\} - \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\pi s}\frac{3s^2+2}{s(s^2+1)(s^2+4s-5)}\}$$

ここで注意することは

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{3s^2+2}{s(s^2+1)(s^2+4s-5)}\}$$

とおくと第 2 移動法則より

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\pi s}\frac{3s^2+2}{s(s^2+1)(s^2+4s-5)}\} = u_\pi(t)f(t-\pi)$$

で表わせることである。 そこで，部分分数分解を用いると

$$\frac{3s^2+2}{s(s^2+1)(s^2+4s-5)} = \frac{3s^2+2}{s(s^2+1)(s-1)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} + \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s+5}$$

ここで

$$A = s(\frac{3s^2+2}{s(s^2+1)(s-1)(s+5)})\mid_{s=0} = -\frac{2}{5}$$

$$Bs+C\mid_{s=i} = \frac{3s^2+2}{s(s-1)(s+5)}\mid_{s=i} = \frac{-1}{i(i-1)(i+5)} = \frac{1}{4+6i} = \frac{4-6i}{52}$$

よって

$$B = \frac{-6}{52} = -\frac{3}{26}, C = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$D = \frac{3s^2+2}{s(s^2+1)(s+5)}\mid_{s=1} = \frac{5}{12}, E = \frac{3s^2+2}{s(s^2+1)(s-1)}\mid_{s=-5} = \frac{77}{780}$$

これより

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{3s^2}{s(s^2+1)(s^2+4s-5)}\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{-2/5}{s} + \frac{-3s/26+1/13}{s^2+1} + \frac{5/12}{s-1} + \frac{77/780}{s+5}\} \\ &= -\frac{2}{5} - \frac{3\cos t}{26} + \frac{\sin t}{13} + \frac{5e^t}{12} + \frac{77e^{-5t}}{780} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\pi s}\frac{3s^2+2}{s(s^2+1)(s^2+4s-5)}\} \\ = \;& u_\pi(t)(-\frac{2}{5} - \frac{3\cos(t-\pi)}{26} + \frac{\sin(t-\pi)}{13} + \frac{5e^{t-\pi}}{12} + \frac{77e^{-5(t-\pi)}}{780}) \end{aligned}$$

　また

$$\frac{1}{s(s^2+4s-5)} = \frac{1}{s(s-1)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+5}$$

$$A = s(\frac{1}{s(s-1)(s+5)})\mid_{s=0} = -\frac{1}{5}, B = \frac{1}{s(s+5)}\mid_{s=1} = \frac{1}{6}, C = \frac{1}{s(s-1)}\mid_{s=-5} = \frac{1}{30}$$

よって

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+4s-5)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{-1/5}{s} + \frac{1/6}{s-1} + \frac{1/30}{s+5}\} = -\frac{1}{5} + \frac{e^t}{6} + \frac{e^{-5t}}{30}.$$

これより

$$2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+4s-5)}\} = 2(-\frac{1}{5}+\frac{e^t}{6}+\frac{e^{-5t}}{30})$$

これらをまとめると

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+4s-5)}\} - \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\pi s}\frac{3s^2+2}{s(s^2+1)(s^2+4s-5)}\} \\ &= 2(-\frac{1}{5}+\frac{e^t}{6}+\frac{e^{-5t}}{30}) \\ &- u_\pi(t)(-\frac{2}{5}-\frac{3\cos(t-\pi)}{26}+\frac{\sin(t-\pi)}{13}+\frac{5e^{t-\pi}}{12}+\frac{77e^{-5(t-\pi)}}{780}) \ \boxed{終} \end{aligned}$$

5.5(d) 両辺にラプラス変換を施すと,

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{y_1'\}+\mathcal{L}\{y_2\}=0 \\ \mathcal{L}\{y_1\}+\mathcal{L}\{y_2'\}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sY_1(s)-y_1(0)+Y_2(s)=0 \\ Y_1(s)+sY_2(s)-y_2(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sY_1(s)-2+Y_2(s)=0 \\ Y_1(s)+sY_2(s)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sY_1(s)+Y_2(s)=2 \\ Y_1(s)+sY_2(s)=0 \end{cases}$$

Cramer の公式を用いて $Y_1(s), Y_2(s)$ について解くと

$$Y_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{vmatrix}} = \frac{2s}{s^2-1} = \frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}$$

$$Y_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{vmatrix}} = \frac{-2}{s^2-1} = \frac{-1}{s+1}+\frac{1}{s-1}$$

これより $y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}\} = e^{-t}+e^t$

$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{-1}{s+1}+\frac{1}{s-1}\} = -e^{-t}+e^t$ $\boxed{終}$

5.5(e) 両辺にラプラス変換を施すと,

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{y_1'\}-\mathcal{L}\{y_2'\}-\mathcal{L}\{y_2\}=-\mathcal{L}\{e^t\} \\ \mathcal{L}\{y_1\}+\mathcal{L}\{y_2'\}-\mathcal{L}\{y_2\}=\mathcal{L}\{e^{2t}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sY_1(s)-y_1(0)-(sY_2(s)-y_2(0))-Y_2(s)=-\frac{1}{s-1} \\ Y_1(s)+sY_2(s)-y_2(0)-Y_2(s)=\frac{1}{s-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sY_1(s)-(sY_2(s)-1)-Y_2(s)=-\frac{1}{s-1} \\ Y_1(s)+sY_2(s)-1-Y_2(s)=\frac{1}{s-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sY_1(s)-(s+1)Y_2(s)=-\frac{1}{s-1}-1=-\frac{s}{s-1} \\ Y_1(s)+(s-1)Y_2(s)=\frac{1}{s-2}+1=\frac{s-1}{s-2} \end{cases}$$

ここで Cramer の公式を用いて $Y_1(s), Y_2(s)$ を求めると

$$Y_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{s}{s-1} & -(s+1) \\ \frac{s-1}{s-2} & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -(s+1) \\ 1 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{-s + \frac{s^2-1}{(s-2)}}{s^2+1} = \frac{2s-1}{(s-2)(s^2+1)}$$

$$Y_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & -\frac{s}{s-1} \\ 1 & \frac{s-1}{s-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -(s+1) \\ 1 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{s^2-s}{s-2} + \frac{s}{s-1}}{s^2+1} = \frac{(s^2-s)(s-1)+s(s-2)}{(s-2)(s-1)(s^2+1)}$$

となる。次に逆変換を用いて $y_1(t), y_2(t)$ を求める。

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2s-1}{(s-2)(s^2+1)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{A}{(s-2)} + \frac{Bs+C}{s^2+1}\}$$

$$A = \frac{2s-1}{s^2+1} \mid_{s=2} = \frac{3}{5}$$

$$Bs + C \mid_{s=i} = \frac{2s-1}{s-2} \mid_{s=i} = \frac{2i-1}{i-2} = \frac{(2i-1)(i+2)}{-5} = \frac{-4+3i}{-5} \Rightarrow$$

$$B = -\frac{3}{5}, C = \frac{4}{5}$$

これより,

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{3/5}{(s-2)} + \frac{-3s/5+4/5}{s^2+1}\} = \frac{3}{5}e^{2t} - \frac{3}{5}\cos t + \frac{4}{5}\sin t$$

次に y_2 を求める。

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{(s^2-s)(s-1)+s(s-2)}{(s-2)(s-1)(s^2+1)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}\}$$

$$A = \frac{(s^2-s)(s-1)+s(s-2)}{(s-1)(s^2+1)} \mid_{s=2} = \frac{2}{5}, B = \frac{(s^2-s)(s-1)+s(s-2)}{(s-2)(s^2+1)} \mid_{s=1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} Cs + D \mid_{s=i} &= \frac{(s^2-s)(s-1)+s(s-2)}{(s-2)(s-1)} \mid_{s=i} \\ &= \frac{(-1-i)(i-1)+i(i-2)}{(i-2)(i-1)} = \frac{1-2i}{1-3i} = \frac{7+i}{10} \\ &\Rightarrow C = \frac{1}{10}, D = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2/5}{s-2} + \frac{1/2}{s-1} + \frac{s/10+7/10}{s^2+1}\} \\ &= \frac{2}{5}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{10}\cos t + \frac{7}{10}\sin t \ \boxed{終} \end{aligned}$$

5.5(f)　両辺にラプラス変換を施すと,

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{y_1''\} + 2\mathcal{L}\{y_2'\} + \mathcal{L}\{y_1\} = \mathcal{L}\{\sin t\} \\ \mathcal{L}\{y_2''\} + 2\mathcal{L}\{y_1'\} + \mathcal{L}\{y_2\} = 0 \end{cases}$$

微分法則を用いて書き直すと

$$\begin{cases} s^2Y_1(s) - sy_1(0) - y_1'(0) + 2(sY_2(s) - y_2(0)) + Y_1(s) = \frac{1}{s^2+1} \\ s^2Y_2(s) - sy_2(0) - y_2'(0) + 2(sY_1(s) - y_1(0)) + Y_2(s) = 0 \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} (s^2+1)Y_1(s) + 2sY_2(s) = \frac{1}{s^2+1} \\ 2sY_1(s) + (s^2+1)Y_2(s) = 0 \end{cases}$$

となる。ここで Cramer の公式を用いて $Y_1(s), Y_2(s)$ を求めると

$$Y_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s^2+1} & 2s \\ 0 & s^2+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+1 & 2s \\ 2s & s^2+1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{(s^2-1)^2}$$

$$Y_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s^2+1 & \frac{1}{s^2+1} \\ 2s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+1 & 2s \\ 2s & s^2+1 \end{vmatrix}} = \frac{-2s}{(s^2-1)^2(s^2+1)}$$

を得る。次に逆変換を用いて $y_1(t), y_2(t)$ を求める。

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s^2-1)^2}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2}\}$$

$$B = \frac{1}{(s+1)^2}\mid_{s=1} = \frac{1}{4}, A = (\frac{1}{(s+1)^2})'\mid_{s=1} = -\frac{1}{4}$$

$$D = \frac{1}{(s-1)^2}\mid_{s=-1} = \frac{1}{4}, C = (\frac{1}{(s-1)^2})'\mid_{s=-1} = \frac{1}{4}$$

より

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{-1/4}{(s-1)} + \frac{1/4}{(s-1)^2} + \frac{1/4}{s+1} + \frac{1/4}{(s+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}te^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}te^{-t} \end{aligned}$$

となる。次に

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{-2s}{(s^2-1)^2(s^2+1)}\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2} + \frac{Es+F}{s^2+1}\} \end{aligned}$$

$$B = \frac{-2s}{(s+1)^2(s^2+1)}\mid_{s=1} = -\frac{1}{4}, A = (\frac{-2s}{(s+1)^2(s^2+1)})'\mid_{s=1} = \frac{1}{4}$$

$$D = \frac{-2s}{(s-1)^2(s^2+1)}\mid_{s=-1} = \frac{1}{4}, C = (\frac{-2s}{(s-1)^2(s^2+1)}')\mid_{s=-1} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} Es + F\mid_{s=i} &= \frac{-2s}{(s^2-1)^2}\mid_{s=i} = \frac{-2i}{4} \\ &\Rightarrow E = \frac{1}{2}, F = 0 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{-1/4}{(s-1)} + \frac{-1/4}{(s-1)^2} + \frac{1/4}{s+1} + \frac{1/4}{(s+1)^2} + \frac{s/2}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}te^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}te^{-t} + \frac{1}{2}\cos t \ \boxed{\text{終}} \end{aligned}$$

5.6　合成法則と積分方程式

演習問題 5.6

1。 次の積分方程式を解け。
(a) $y(t) = e^{-t} + 2\int_0^t e^{-3\tau}y(t-\tau)d\tau$
(b) $y(t) = \cos t + \int_0^t y(t-\tau)e^{-2\tau}d\tau$
(c) $y(t) = 2t + 1 + \int_0^t y(t-\tau)e^{-\tau}d\tau$

5.6(a) 両辺にラプラス変換を施すと

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\} + 2\mathcal{L}\{\int_0^t e^{-3\tau}y(t-\tau)d\tau\}$$

これより

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s+1} + 2\mathcal{L}\{e^{-3t} * y(t)\} \\ &= \frac{1}{s+1} + 2\mathcal{L}\{e^{-3t}\}\mathcal{L}\{y(t)\} \\ &= \frac{1}{s+1} + 2(\frac{1}{s+3})Y(s) \end{aligned}$$

$$Y(s)(1 - \frac{2}{s+3}) = -\frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2}$$

次に逆変換を行なうと

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+3}{(s+1)^2}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2}\}$$

$$B = (s+3)\mid_{s=-1} = 2, A = (s+3)'\mid_{s=-1} = 1$$

よって

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}\} = e^{-t} + 2te^{-t} \ \boxed{\text{終}}$$

5.6(b) 両辺にラプラス変換を施すと

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\cos t\} + \mathcal{L}\{\int_0^t y(t-\tau)e^{-2\tau}d\tau\}$$

これより

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s}{s^2+1} + \mathcal{L}\{y(t) * e^{-2t}\} \\ &= \frac{s}{s^2+1} + \mathcal{L}\{y(t)\}\mathcal{L}\{e^{-2t}\} \\ &= \frac{s}{s^2+1} + Y(s)(\frac{1}{s+2}) \end{aligned}$$

$$Y(s)(1-\frac{1}{s+2}) = \frac{s}{s^2+1}$$
$$Y(s) = \frac{s(s+2)}{(s+1)(s^2+1)}$$

ここで逆変換を行なうと

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s(s+2)}{(s+1)(s^2+1)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{(s^2+1)}\}$$
$$A = \frac{s(s+2)}{s^2+1}\ |_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} Bs+C\ |_{s=i} &= \frac{s(s+2)}{s+1}\ |_{s=i} = \frac{-1+2i}{i+1} \\ &= \frac{1+3i}{2} \\ &\Rightarrow\ B = \frac{3}{2},\ C = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{-1/2}{s+1} + \frac{3s/2-1/2}{s^2+1}\} = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t\ \boxed{終}$$

5.6(c) 両辺にラプラス変換を施すと

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{2t+1\} + \mathcal{L}\{\int_0^t y(t-\tau)e^{-\tau}d\tau\}$$

これより

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} + \mathcal{L}\{y(t) * e^{-t}\} \\ &= \frac{s+2}{s^2} + \mathcal{L}\{y(t)\}\mathcal{L}\{e^{-t}\} \\ &= \frac{s+2}{s^2} + Y(s)(\frac{1}{s+1}) \end{aligned}$$

$$Y(s)(1-\frac{1}{s+1}) = \frac{s+2}{s^2}$$
$$Y(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s^3}$$

ここで逆変換を行なうと

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{(s+1)(s+2)}{s^3}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3}\}$$
$$C = (s+1)(s+2)\ |_{s=0} = 2, B = ((s+1)(s+2))'\ |_{s=0} = 3$$
$$A = \frac{((s+1)(s+2))''}{2}\ |_{s=0} = 1$$

よって

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s^3}\} = 1 + 3t + t^2\ \boxed{終}$$

第6章　フーリエ級数

6.1　内積空間

演習問題 6.1

1. 次の集合のうち直交系はどれか。また直交系は対応する正規直交系を求めよ。
$(a)\{(1,3),(6,-2)\}$　　$(b)\{(1,2,2),(-2,2,-1),(2,1,-2)\}$
$(c)\{\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}, 2\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}-\frac{1}{3}\mathbf{k}, 3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}\}$
2. $f(x), g(x)$ を $PC[a,b]$ の関数とするとき，次の不等式を証明せよ。
$|(f,g)| \leq ||f||||g||$　この結果は Schwarz の不等式と呼ばれる。
3. $PC[0,2]$ において，次の関数のノルムを求めよ。
(a) $f(x)=x$　$(b)f(x)=\sin\pi x$　$(c)f(x)=\cos\pi x$
4. 次にあげる 3 個の多項式は Legendre の多項式と呼ばれるものです。
$P_0(x)=1,\ \ P_1(x)=x,\ \ P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}.$
これらは $PC[-1,1]$ で直交系をなすことを示せ。

解答

1(a)　直交系とは互いのベクトルが直交している集合より，

$$(1,3)\cdot(6,-2)=6-6=0$$

よって $(1,3)\perp(6,-2)$
また正規直交系とはそれぞれが単位ベクトルで直交系をなしているものより，正規直交系に直すと

$$\{\frac{(1,3)}{\sqrt{10}}, \frac{(6,-2)}{2\sqrt{10}}\}\ \boxed{終}$$

1(b)

$$(1,2,2)\cdot(-2,2,-1)=-2+4-2=0$$
$$(1,2,2)\cdot(2,1,-2)=2+2-4=0$$
$$(-2,2,-1)\cdot(2,1,-2)=-4+2+2=0$$

より

$$(1,2,2)\perp(-2,2,-1),(1,2,2)\perp(2,1,-2),(-2,2-1)\perp(2,1,-2).$$

また正規直交系に直すと

$$\{\frac{(1,2,2)}{3}, \frac{(-2,2,-1)}{3}, \frac{(2,1,-2)}{3}\}\ \boxed{終}$$

1(c)　$\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}\cdot 2\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}-\frac{1}{3}\mathbf{k}=2+1-1\neq 0$ よって 直交系でない $\boxed{終}$
2.

$$\begin{aligned} 0\leq ||(f-\lambda g)||^2 &= (f-\lambda g, f-\lambda g) \\ &= ||f||^2-2\lambda(f,g)+\lambda^2||g||^2 \end{aligned}$$

これは λ についての 2 次式で 0 より大きいので，その判別式 Δ は 0 以下になる。よって

$$\Delta = |(f,g)|^2 - ||f||^2\ ||g||^2 \le 0$$

これより

$$|(f,g)| \le ||f||\ ||g|| \quad \boxed{終}$$

3(a)　$||f|| = \{\int_a^b [f(x)]^2 dx\}^{1/2}$ より

$$||f|| = \{\int_0^2 x^2 dx\}^{1/2} = \{\frac{x^3}{3}|_0^2\}^{1/2} = \sqrt{\frac{8}{3}} \quad \boxed{終}$$

3(b)　$||f|| = \{\int_a^b [f(x)]^2 dx\}^{1/2}$ より

$$\begin{aligned} ||f|| &= \{\int_0^2 [\sin \pi x]^2 dx\}^{1/2} = \{\int_0^2 \frac{1-\cos 2\pi x}{2} dx\}^{1/2} \\ &= \{\frac{x}{2} - \frac{\sin 2\pi x}{4\pi}|_0^2\}^{1/2} = 1 \quad \boxed{終} \end{aligned}$$

3(c)　$||f|| = \{\int_a^b [f(x)]^2 dx\}^{1/2}$ より

$$\begin{aligned} ||f|| &= \{\int_0^2 [\cos \pi x]^2 dx\}^{1/2} = \{\int_0^2 \frac{1+\cos 2\pi x}{2} dx\}^{1/2} \\ &= \{\frac{x}{2} + \frac{\sin 2\pi x}{4\pi}|_0^2\}^{1/2} = 1 \quad \boxed{終} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (P_0, P_1) &= \int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2}\ |_{-1}^1 = 0 \\ (P_0, P_2) &= \int_{-1}^1 \frac{3x^2-1}{2} dx = \frac{x^3 - x}{2}\ |_{-1}^1 = 0 \\ (P_1, P_2) &= \int_{-1}^1 x\frac{3x^2-1}{2} dx = \frac{3x^4}{8} - \frac{x^2}{4}\ |_{-1}^1 = 0 \end{aligned}$$

より P_0, P_1, P_2 は直交型をなすことがわかる。 $\boxed{終}$

6.2　フーリエ級数

演習問題 6.2

次の関数のフーリエ級数をもとめよ。またフーリエ級数のグラフを描け。

1.　$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 < x < \pi \end{cases}$

2.　$f(x) = |\sin x| \in PC[-\pi, \pi]$

3.　$f(x) = x \in PC[-\pi, \pi]$

4. $f(x) = x^2 \in PC[-\pi, \pi]$ のフーリエ級数を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ を示せ}$$

5. $f(x) = x \in PC[-\pi, \pi]$ のフーリエ級数を用いて

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \text{ を示せ}$$

解答

1.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0} 1dx + \int_{0}^{\pi} 2dx] = \frac{1}{\pi}[\pi + 2\pi] = 3$$

次に，$\int_0^\pi \cos nxdx = 0$ より

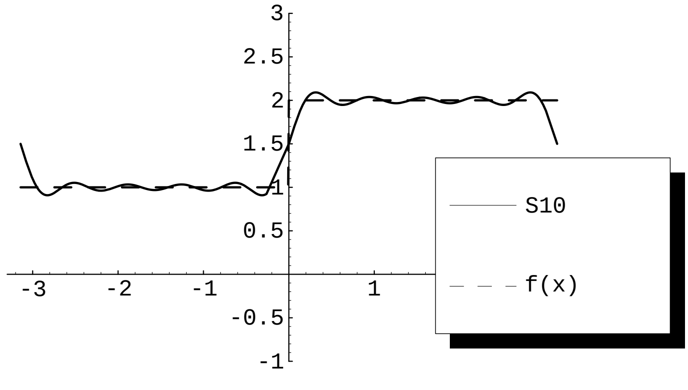
$$a_n = \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0} \cos nxdx + \int_{0}^{\pi} 2\cos nxdx] = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0} \sin nxdx + \int_{0}^{\pi} 2\sin nxdx] \\ &= \frac{1}{\pi}[-\frac{\cos nx}{n} \mid_{-\pi}^{0} - \frac{2\cos nx}{n} \mid_{0}^{\pi}] \\ &= \frac{1}{\pi}[\frac{-1+\cos n\pi}{n} - \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n}] \\ &= \frac{1}{\pi}[\frac{1-\cos n\pi}{n}] = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \end{aligned}$$

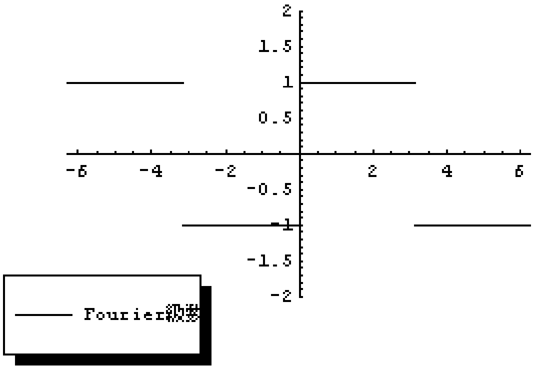
したがって，$f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin nx$$

第 n 部分和のグラフは



また，フーリエ級数のグラフは



終

2.　$f(x) = |\sin x|$ は偶関数より $b_n = 0$。

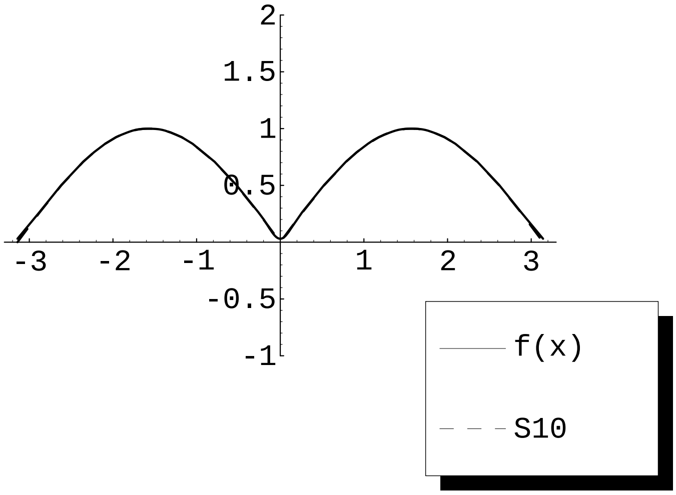
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}[-\cos x \mid_0^{\pi}] = \frac{4}{\pi}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} [\frac{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x}{2} dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi}[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \mid_0^{\pi}] & (n \neq 1) \\ 0 & n = 1 \end{cases} \\
&= \frac{1}{\pi}[-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}] \\
&= \frac{1}{\pi}[-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} + \frac{-2}{n^2-1}] \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{n((-1)^{n-1} - (-1)^{n+1}) + (-1)^{n+1} + (-1)^{n-1} - 2}{n^2-1}] \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{2(-1)^{n+1} - 2}{n^2-1}] \\
&= \frac{2}{\pi}[\frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^2-1}] \\
&= \frac{2}{\pi}[\frac{-2}{4m^2-1}] \quad (n = 2m)
\end{aligned}$$

よって

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2-1} \cos 2mx.$$

またフーリエ級数のグラフは



$\boxed{終}$

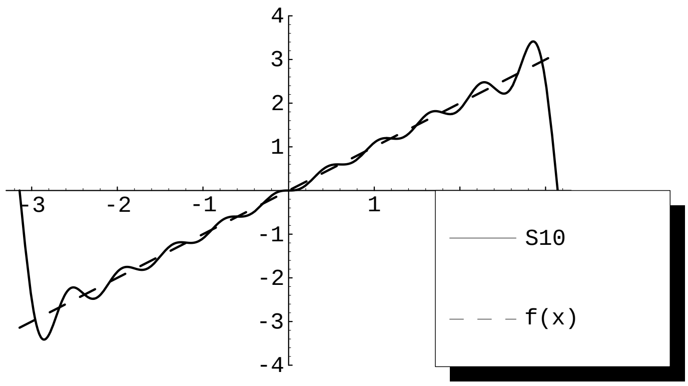
3.　$f(x) = x$ は奇関数より $a_n = 0$ $(n \geq 0)$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}[-\frac{x\cos nx}{n} \mid_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}[\frac{1}{n^2}\sin nx \mid_0^\pi \\ &= \frac{-2\pi\cos n\pi}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

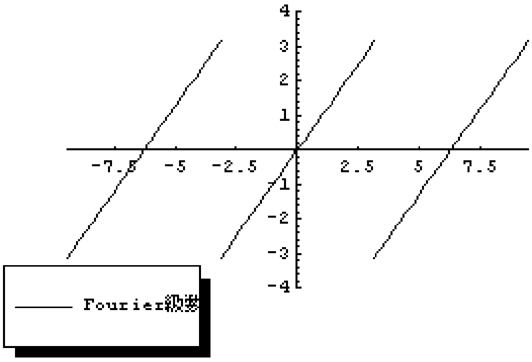
よって

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

第 n 部分和のグラフは



またフーリエ級数のグラフは



$\boxed{終}$

4. $f(x) = x^2$ より $f(x)$ は偶関数。よって $b_n = 0$。また

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}(\frac{x^3}{3}\ |_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \quad \left(\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = \cos nx dx \\ du = 2x dx & v = \frac{\sin nx}{n} \end{array}\right. \\
&= \frac{2}{\pi}[\frac{x^2 \sin nx}{n}\ |_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx dx] \quad \left(\begin{array}{ll} u = x & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array}\right. \\
&= \frac{-4}{n\pi}[\frac{-x\cos nx}{n}\ |_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx dx] \\
&= \frac{-4}{n\pi}[\frac{-\pi \cos n\pi}{n} \\
&= \frac{4(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

ここで Dirichlet 条件より

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

となるので $x = \pi$ とおくと，$\cos n\pi = (-1)^n$ より

$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

また $x = 0$ とおくと，

$$0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\ \boxed{終}.$$

5. $f(x) = x$ は奇関数より $a_n = 0 \ (n \geq 0)$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}[-\frac{x\cos nx}{n} \mid_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}[\frac{1}{n^2}\sin nx \mid_0^{\pi} \\ &= \frac{-2\pi \cos n\pi}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

よって

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

また $f(x)$ は Dirichlet 条件を満たすので

$$\frac{\pi}{2} = f(\frac{\pi}{2}) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

ここで

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^m & n = 2m+1 \\ 0 & n = 2m \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m+2}}{2m+1}(-1)^m \\ &= 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \end{aligned}$$

よって

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4} \ \boxed{終}.$$

6.3 正弦級数，余弦級数, 複素形フーリエ級数

演習問題 6.3

1. 次の関数の $f_e(x), f_o(x)$ を求め，そのグラフを描け。

$(a)\ f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 < x < 1 \\ 1-x, & 1 < x < 2 \end{cases}$ $\quad (b) f(x) = e^x \ x \in (0, \pi)$

2. 次の関数のフーリエ余弦，正弦級数を求めよ。

$(a)\ f(x) = x^2 \ x \in [0, 1]$ $\quad (b)\ f(x) = \sin \frac{x}{2} \ x \in [0, \pi]$

$(c)\ f(x) = \cos x \ x \in [0, \pi]$

3. 次の関数の複素形フーリエ級数を求めよ。

$(a)\ f(x) = |x| \ x \in [-\pi, \pi]$ $\quad (b)\ f(x) = x^2 \ x \in [-\pi, \pi]$

解答

1.

$$(a)\ f_e(x) = \begin{cases} x+1, & -2<x<-1 \\ -x-1, & -1<x<0 \\ x-1, & 0<x<1 \\ 1-x, & 1<x<2 \end{cases} \qquad f_o(x) = \begin{cases} -x-1, & -2<x<-1 \\ x+1, & -1<x<0 \\ x-1, & 0<x<1 \\ 1-x, & 1<x<2 \end{cases}$$

$$(b)\ f_e(x) = \begin{cases} e^{-x}, & -\pi<x<0 \\ e^{x}, & 0<x<\pi \end{cases} \qquad f_o(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & -\pi<x<0 \\ e^{x}, & 0<x<\pi \end{cases} \qquad \boxed{終}$$

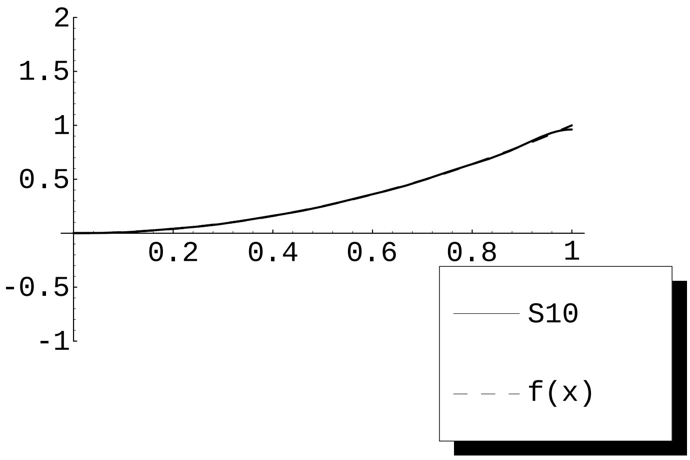
2(a)　まず $f(x)$ のフーリエ余弦級数を求める。

$$f_e(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \\
a_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx \\
&= 2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx \quad \begin{pmatrix} u = x^2 & dv = \cos n\pi x \\ du = 2xdx & v = \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \end{pmatrix} \\
&= 2[\frac{x^2 \sin n\pi x}{n\pi}\ |_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x \sin n\pi x dx] \quad \begin{pmatrix} u = x & dv = \sin n\pi x \\ du = dx & v = -\frac{\cos n\pi x}{n\pi} \end{pmatrix} \\
&= 2[\frac{\sin n\pi}{n\pi} - \frac{2}{n\pi}(-\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\ |_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x dx)] \\
&= -\frac{4}{n\pi}(\frac{-\cos n\pi}{n\pi} + \frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\ |_0^1) \\
&= -\frac{4}{n\pi}(\frac{-\cos n\pi}{n\pi} + \frac{\sin n\pi}{(n\pi)^2}) \\
&= \frac{4\cos n\pi}{(n\pi)^2} = \frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2}
\end{aligned}$$

より

$$f_e(x) \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x.$$



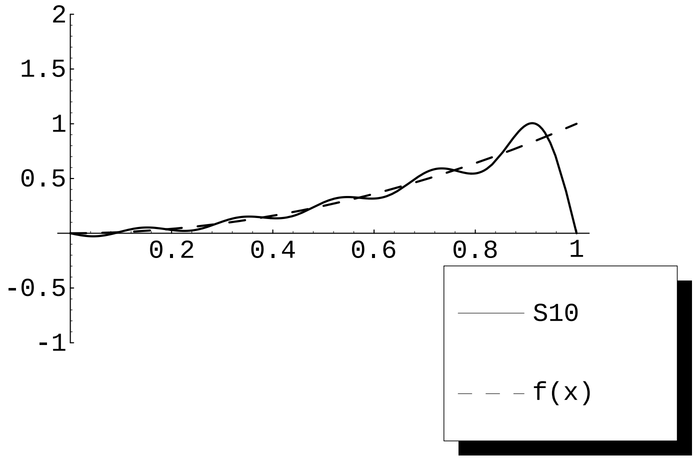
次に $f(x)$ のフーリエ正弦級数を求める。

$$f_o(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx \\
&= 2\int_0^1 x^2 \sin n\pi x dx \quad \begin{pmatrix} u = x^2 & dv = \sin n\pi x dx \\ du = 2xdx & v = -\frac{\cos n\pi x}{n\pi} \end{pmatrix} \\
&= 2[\frac{-x^2\cos n\pi x}{n\pi}\ |_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\cos n\pi x dx] \quad \begin{pmatrix} u = x & dv = \cos n\pi x dx \\ du = dx & v = \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \end{pmatrix} \\
&= 2[\frac{-\cos n\pi}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}(\frac{x\sin n\pi x}{n\pi}\ |_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x dx)] \\
&= 2[\frac{-\cos n\pi}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}(\frac{\sin n\pi}{n\pi} + \frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^2}\ |_0^1)] \\
&= 2[\frac{-\cos n\pi}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}(\frac{\cos n\pi - 1}{(n\pi)^2})] \\
&= 2[\frac{-(-1)^n}{n\pi} + \frac{2((-1)^n - 1)}{(n\pi)^3}]
\end{aligned}$$

より

$$f_o(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2((-1)^n - 1)}{(n\pi)^3}]\sin n\pi x$$



終

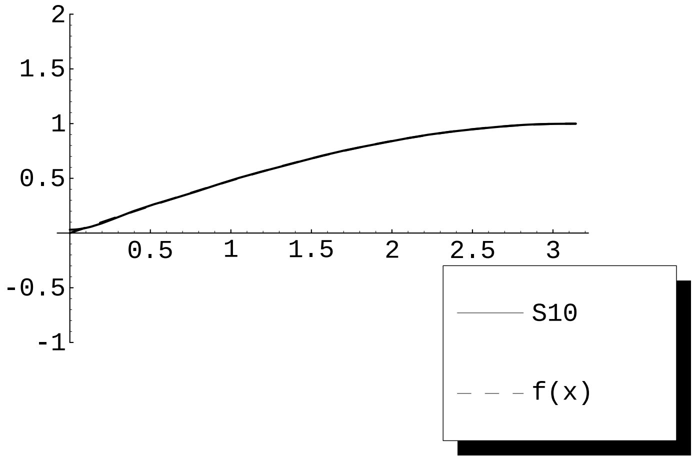
(b)　まず $f(x)$ のフーリエ余弦級数を求める。

$$f_e(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}dx = \frac{2}{\pi}(-2\cos\frac{x}{2}\ |_0^{\pi}) \\
&= \frac{2}{\pi}(-2\cos\frac{\pi}{2}+2) = \frac{4}{\pi}. \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\cos nxdx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin(n-\frac{1}{2})x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{-\cos(n+\frac{1}{2})x}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\cos(n-\frac{1}{2})x}{n-\frac{1}{2}}\ |_0^{\pi}] \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{-\cos(n+\frac{1}{2})\pi+1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\cos(n-\frac{1}{2})\pi-1}{n-\frac{1}{2}}] \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{\sin n\pi+1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{-\sin n\pi-1}{n-\frac{1}{2}}] \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{-1}{n^2-\frac{1}{4}}] = \frac{4}{\pi}[\frac{-1}{4n^2-1}]
\end{aligned}$$

より

$$f_e(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx$$



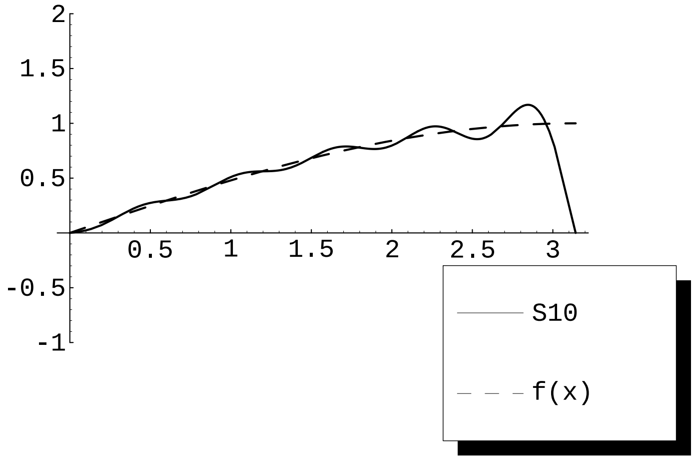
次に $f(x)$ のフーリエ正弦級数を求める。

$$f_o(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\cos(n-\frac{1}{2})x - \cos(n+\frac{1}{2})x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{\sin(n-\frac{1}{2})x}{n-\frac{1}{2}} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{n+\frac{1}{2}} |_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{\sin(n-\frac{1}{2})\pi}{n-\frac{1}{2}} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi}{n+\frac{1}{2}}] \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{-\cos n\pi}{n-\frac{1}{2}} - \frac{\cos n\pi}{n+\frac{1}{2}}] \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{-2n\cos n\pi}{n^2-\frac{1}{4}}] \\
&= \frac{8}{\pi}[\frac{n(-1)^{n+1}}{4n^2-1}]
\end{aligned}$$

より

$$f_o(x) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\sin nx$$



終

(c)　まず $f(x)$ のフーリエ余弦級数を求める。

$$f_e(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x dx = \frac{2}{\pi}(-\sin x \mid_0^{\pi}) = 0. \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(n+1)x + \cos(n-1)x) dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi}[\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1} \mid_0^{\pi} & n \neq 1 \\ \frac{1}{\pi}[\frac{\sin 2x}{2} + x \mid_0^{\pi} & n = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi}[\frac{\sin(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\pi}{n-1} = 0 & n \neq 1 \\ \frac{1}{\pi}(\pi) & n = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

より

$$f_e(x) \sim \cos x$$

次に $f(x)$ のフーリエ正弦級数を求める。

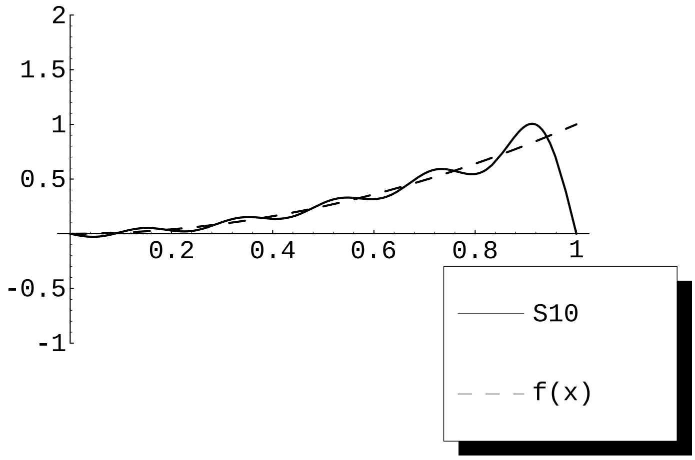
$$f_o(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\sin(n+1)x + \sin(n-1)x) dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi}[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \mid_0^{\pi} & n \neq 1 \\ \frac{1}{\pi}[-\frac{\cos 2x}{2} \mid_0^{\pi} & n = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi}[-\frac{\cos(n+1)\pi+1}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\pi-1}{n-1}] & n \neq 1 \\ \frac{1}{\pi}[-\frac{\cos 2\pi}{2} + \frac{1}{2}] & n = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi}[-\frac{2n\cos(n+1)\pi+2n}{n^2-1}] & n \neq 1 \\ 0 & n = 1 \end{cases} \\
&= \frac{2}{\pi}[\frac{(1-n(-1)^{n+1})}{n^2-1}] \quad n \geq 2
\end{aligned}
$$

より

$$f_0(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(1-n(-1)^{n+1})}{n^2-1}\sin nx$$



$\boxed{終}$

3 (a) $f(x)$ の複素系フーリエ級数を求める。

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

より

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{\pi}{2} \\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}[\int_{-\pi}^{\pi}|x|(\cos nx + i\sin nx)dx] \\
&= \frac{1}{2\pi}[\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nxdx] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx] \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{x\sin nx}{n}\ |_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\infty}\sin nxdx] \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{\cos nx}{n^2}\ |_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}
\end{aligned}
$$

より

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}e^{inx} \quad \boxed{\text{終}}$$

(b)　$f(x)$ の複素系フーリエ級数を求める。

$$e^{-in\pi} = \cos n\pi - i\sin n\pi = (-1)^n = e^{in\pi}$$

に注意する。

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3} \\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx \quad \left(\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = e^{-inx}dx \\ du = 2xdx & v = -\frac{e^{-inx}}{in} \end{array}\right. \\
&= \frac{1}{2\pi}[\frac{-x^2e^{-inx}}{in} \mid_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{in}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx \quad \left(\begin{array}{ll} u = x & dv = e^{-inx}dx \\ du = dx & v = -\frac{e^{-inx}}{in} \end{array}\right. \\
&= \frac{1}{2\pi}[\frac{-\pi^2e^{-in\pi} + (-\pi)^2e^{in\pi}}{in} \\
&+ \frac{2}{in}(\frac{-xe^{-inx}}{in} \mid_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}dx)] \\
&= \frac{1}{2\pi}[\frac{2(-\pi e^{-in\pi} - \pi e^{in\pi})}{(in)^2} - \frac{2}{(in)^2}e^{-inx} \mid_{-\pi}^{\pi}] \\
&= \frac{1}{2\pi}[\frac{-4\pi e^{-in\pi}}{(in)^2} - \frac{2}{(in)^3}(e^{-inx} - e^{in\pi})] \\
&= \frac{1}{2\pi}[\frac{-4\pi(-1)^n}{(in)^2}] = \frac{2(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

より

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}e^{-inx} \quad \boxed{\text{終}}$$

6.4　Sturm-Liouville 問題

演習問題 6.4

1. 次の Sturm-Liouville 問題を解け。
(a) $y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = 0, y'(L) = 0$
(b) $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0, y'(L) = 0$
(c) $(xy')' + (\lambda/x)y = 0,\ y(1) = 0, y(e) = 0$
2. 次の微分方程式は Chebyshev の微分方程式とよばれるものです。

$$(1 - x^2)y'' - xy' + p^2y = 0 \quad -1 < x < 1$$

ここで p が負でない整数のとき，この方程式は多項式の解を持ちます。この解を $x = 1$ のとき 1 になるようにし $T_n(x)$ で表わします。これを位数 n の Chebyshev の多項式といいます。最初の幾つかの Chebyshev の多項式を表わすと次のようになります。

$$T_0 = 1, T_1 = x, T_2 = 2x^2 - 1, T_3 = 4x^3 - 3x, \ldots$$

ここで Chebyshev の多項式全体の集合は区間 $[-1,1]$ で直交系をなすことを示せ。

解答

1(a) $\lambda=0$ のとき， $y''=0$ より

$$y=c_1x+c_2.$$

ここで境界条件 $y'(0)=y'(L)=0$ を用いると $c_1=0$ となり，$y\equiv c_2$。
次に， $\lambda<0$ のとき，$\lambda=-\alpha^2$ $(\alpha>0)$ とおくと

$$y''-\alpha^2y=0.$$

特性方程式を求めると $m^2-\alpha^2=0$ より，$m=\pm\alpha$。よって

$$y=c_1e^{\alpha x}+c_2e^{-\alpha x}.$$

ここで境界条件 $y'(0)=y'(L)=0$ を用いると

$$\begin{aligned} 0 &= y'(0)=c_1\alpha-c_2\alpha \\ 0 &= y'(L)=c_1\alpha^{\alpha L}-c_2\alpha e^{-\alpha L} \end{aligned}$$

最初の式より $c_1=c_2$。また 2 つめの式より

$$c_1\alpha(e^{\alpha L}-e^{-\alpha L})=0$$

となるので，$c_1=c_2=0$。よって $y\equiv 0$。
最後に $\lambda>0$ のとき，$\lambda=\beta^2$ $(\beta>0)$ とおくと

$$y''+\beta^2y=0.$$

特性方程式を求めると $m^2+\beta^2=0$ より，$m=\pm\beta i$。よって

$$y=c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x.$$

ここで境界条件 $y'(0)=y'(L)=0$ を用いると

$$\begin{aligned} 0 &= y'(0)=c_2\beta \\ 0 &= y'(L)=-c_1\beta\sin\beta L+c_2\beta\cos\beta L \end{aligned}$$

となる。これより $c_2=0, c_1\beta\sin\beta L=0$ を得る。ここで $c_1=0$ ならば自明でない解が存在しない。そこで自明でない解が存在するためには，$\beta=n\pi/L$。よって

$$\lambda_n=\beta^2=(\frac{n\pi}{L})^2,\ y_n=\cos(n\pi x/L)$$

となり，

$$y=\begin{cases} c_2, & \lambda=0 \\ 0, & \lambda<0 \\ c_1\cos\frac{n\pi x}{L}, & \lambda>0 \end{cases} \quad \boxed{終}$$

(b) $\lambda=0$ のとき， $y''=0$ より

$$y=c_1x+c_2.$$

ここで境界条件 $y(0) = y'(L) = 0$ を用いると

$$0 = y(0) = c_2,\ 0 = y'(0) = c_1$$

となり，$y \equiv 0$。
次に，$\lambda < 0$ のとき，$\lambda = -\alpha^2$ $(\alpha > 0)$ とおくと

$$y'' - \alpha^2 y = 0.$$

特性方程式を求めると $m^2 - \alpha^2 = 0$ より，$m = \pm\alpha$。よって

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}.$$

ここで境界条件 $y(0) = y'(L) = 0$ を用いると

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = c_1 + c_2 \\ 0 &= y'(L) = c_1 \alpha^{\alpha L} - c_2 \alpha e^{-\alpha L} \end{aligned}$$

最初の式より $c_1 = -c_2$。また 2 つめの式より

$$c_1 \alpha (e^{\alpha L} + e^{-\alpha L}) = 0$$

となるので，$c_1 = c_2 = 0$。よって $y \equiv 0$。
最後に $\lambda > 0$ のとき，$\lambda = \beta^2$ $(\beta > 0)$ とおくと

$$y'' + \beta^2 y = 0.$$

特性方程式を求めると $m^2 + \beta^2 = 0$ より，$m = \pm\beta i$。よって

$$y = c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x.$$

ここで境界条件 $y(0) = y'(L) = 0$ を用いると

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = c_1 \\ 0 &= y'(L) = -c_1 \beta \sin\beta L + c_2 \beta \cos\beta L \end{aligned}$$

となる。これより $c_1 = 0, c_2\beta\cos\beta L = 0$ を得る。ここで $c_2 = 0$ ならば自明でない解が存在しない。そこで自明でない解が存在するためには，$\beta = (2n-1)\pi/2L$。よって $y \equiv c_2 \sin((2n-1)\pi x/2L)$ となる。これより

$$y = \begin{cases} 0, & \lambda \leq 0 \\ c_2 \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, & \lambda > 0 \end{cases} \quad \boxed{終}$$

(c)

$$(xy')' + (\lambda/x)y = y' + xy'' + \frac{\lambda}{x} y = 0$$

より

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, y(1) = 0,\ y(e) = 0$$

$\lambda = 0$ のとき，$x^2 y'' + xy' = 0$。これは Cauchy-Euler の方程式より $y = x^m, x = e^t$ とおくと，$m(m-1) + m = 0$ より $m^2 = 0$。よって

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

これより

$$y = c_1 t + c_2 = c_1 + c_2 \log x.$$

ここで境界条件 $y(1) = y(e) = 0$ を用いると

$$0 = y(1) = c_1,\ 0 = y(e) = c_2$$

となり，$y \equiv 0$。
次に， $\lambda < 0$ のとき，$\lambda = -\alpha^2$ $(\alpha > 0)$ とおくと

$$x^2 y'' + xy' - \alpha^2 y = 0.$$

ここで $y = x^m, x = e^t$ とおくと，$m(m-1) + m - \alpha^2 = 0$ より $m^2 - \alpha^2 = 0$。よって

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \alpha^2 y = 0$$

これより

$$y = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t} = c_1 x^{\alpha} + c_2 x^{-\alpha}$$

ここで境界条件 $y(1) = y(e) = 0$ を用いると

$$\begin{aligned} 0 &= y(1) = c_1 + c_2 \\ 0 &= y(e) = c_1 e^{\alpha} + c_2 e^{-\alpha} \end{aligned}$$

最初の式より $c_1 = -c_2$。また 2 つめの式より

$$c_1(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0$$

となるので，$c_1 = c_2 = 0$。よって $y \equiv 0$。
最後に $\lambda > 0$ のとき，$\lambda = \beta^2$ $(\beta > 0)$ とおくと

$$x^2 y'' + xy' + \beta^2 y = 0.$$

ここで $y = x^m, x = e^t$ とおくと，$m(m-1) + m + \beta^2 = 0$ より $m^2 + \beta^2 = 0$。よって $m = \pm\beta i$。これより

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t \\ &= c_1 \cos(\beta \log x) + c_2 \sin(\beta \log x) \end{aligned}$$

ここで境界条件 $y(1) = y(e) = 0$ を用いると

$$\begin{aligned} 0 &= y(1) = c_1 \\ 0 &= y(e) = c_2 \sin \beta \end{aligned}$$

となる。ここで $c_2 = 0$ ならば自明でない解が存在しない。そこで自明でない解が存在するためには，$\beta = n\pi$。
よって $y \equiv c_2 \sin(n\pi \log x)$ となる。まとめると

$$y = \begin{cases} 0 & , \lambda \leq 0 \\ c_2 \sin(n\pi \log x) & , \lambda > 0 \end{cases} \qquad \boxed{終}$$

第 7 章　偏微分方程式

7.1　偏微分方程式の解

演習問題 7.1

1. 次の関数は Laplace 方程式 $u_{xx}+u_{yy}=0$ を満たすことを示せ。
   $(a)\ u(x,y)=x^2-y^2$　　$(b)\ u(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$
   $(c)\ u(x,y)=ax+by+c$　$(d)\ u(x,y)=\cos x\cosh y$
2. 次の関数は拡散方程式 $u_{xx}-u_t=0, t>0$ を満たすことを示せ。
   $(a)\ u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-x^2/4t}$　　$(b)\ u(x,t)=\int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty}e^{-\tau^2}d\tau$
   $(c)\ u(x,t)=ax+b+c(x^2+2t)$　$(d)\ u(x,t)=e^{-t}\cos x$
3. 次の関数が解となる偏微分方程式を求めよ。
   $(a)\ u(x,y)=\sin(x^2-y^2)$　$(b)\ u(x,y)=\cos(x^2+y^2)+x^2$
4. $f(x^2+y^2)$ は $yu_x-xu_y=0$ の解であることを示せ。
5. $u(x,y)=f(x+y)+g(x-y)$ は $u_{xx}-u_{yy}=0$ の解であることを示せ。
6. 2 次元 Laplace 方程式を極座標で表わせ。

解答

1.

(a)　$u_x=2x, u_{xx}=2, u_y=-2y, u_{yy}=-2$ より $u_{xx}+u_{yy}=0.$ $\boxed{終}$

(b)

$$u_x=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2})=\frac{-y}{x^2+y^2}, u_y=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(\frac{1}{x})=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$u_{xx}=\frac{y(2x)}{(x^2+y^2)^2},\ \ u_{yy}=\frac{-x(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

よって $u_{xx}+u_{yy}=0.$ $\boxed{終}$

(c)　$u_x=a, u_y=b, u_{xx}=0, u_{yy}=0$ より $u_{xx}+u_{yy}=0.$ $\boxed{終}$

(d)　$u_x=-\sin x\cosh y.u_y=\cos x\sinh y, u_{xx}=-\cos x\cosh y, u_{yy}=\cos x\cosh y$ より $u_{xx}+u_{yy}=0.$ $\boxed{終}$

2.

(a)

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{\sqrt{t}}(\frac{-2x}{4t})e^{-x^2/4t}=\frac{x}{t^{3/2}}e^{-x^2}4t \\
u_{xx} &= \frac{-1}{2t^{3/2}}e^{-x^2/4t}-\frac{x}{2t^{3/2}}(\frac{-2x}{4t})e^{-x^2/4t} \\
&= \frac{-1}{2t^{3/2}}e^{-x^2/4t}+\frac{x^2}{4t^{5/2}}e^{-x^2/4t} \\
&= (\frac{-1}{2t^{3/2}}+\frac{x^2}{4t^{5/2}})e^{-x^2/4t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{-1}{2t^{3/2}} e^{-x^2/4t} + \frac{1}{\sqrt{t}}(\frac{x^2}{4t^2}) e^{-x^2/4t} \\ &= (\frac{-1}{2t^{3/2}} + \frac{x^2}{4t^{5/2}}) e^{-x^2/4t} \end{aligned}$$

よって $u_{xx} - u_t = 0$. $\boxed{終}$

(b)

$$\begin{aligned} u_x &= e^{-x/(2\sqrt{t})^2} \frac{\partial(-\frac{x}{2\sqrt{t}})}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-x^2/4t} \\ u_{xx} &= -\frac{1}{2\sqrt{t}}(\frac{-2x}{4t}) e^{-x^2/4t} = \frac{x}{4t^{3/2}} e^{-x^2/4t} \\ u_t &= e^{-x/(2\sqrt{t})^2} \frac{\partial(-\frac{x}{2\sqrt{t}})}{\partial t} = \frac{x}{4t^{3/2}} e^{-x/(2\sqrt{t})^2} \end{aligned}$$

よって $u_{xx} - u_t = 0$ $\boxed{終}$

(c)

$$\begin{aligned} u_x &= a + 2cx, u_{xx} = 2c \\ u_t &= 2c \end{aligned}$$

よって $u_{xx} - u_t = 0$. $\boxed{終}$

(d)

$$\begin{aligned} u_x &= e^{-t}(-\sin x) = -e^{-t} \sin x \\ u_{xx} &= -e^{-t} \cos x, u_t = -e^{-t} \cos x \end{aligned}$$

よって $u_{xx} - u_t = 0$. $\boxed{終}$

3.

(a) $u(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$ より

$$u_x = 2x \cos(x^2 - y^2),\ u_y = -2y \cos(x^2 - y^2)$$

よって $yu_x + xu_y = 0$. $\boxed{終}$

(b) $u(x, y) = \cos(x^2 + y^2) + x^2$ より

$$u_x = -2x \sin(x^2 + y^2) + 2x,\ u_y = -2y \sin(x^2 + y^2)$$

よって $yu_x - xu_y - 2xy = 0$. $\boxed{終}$

4. $u(x, y) = f(x^2 + y^2),\ t = x^2 + y^2$ とおくと

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{du}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} = 2x \frac{du}{dt} \\ u_y &= \frac{du}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} = 2y \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

よって $yu_x - xu_y = 0$. $\boxed{終}$

5. $u(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$ において，$v = x+y,\ w = x-y$ とおくと

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial f(v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g(w)}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f(v)}{\partial v} + \frac{\partial g(w)}{\partial w} \\
u_{xx} &= \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 g(w)}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 g(w)}{\partial w^2} \\
u_y &= \frac{\partial f(v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g(w)}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f(v)}{\partial v} - \frac{\partial g(w)}{\partial w} \\
u_{yy} &= \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 g(w)}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 g(w)}{\partial w^2}
\end{aligned}$$

よって $u_{xx} - u_{yy} = 0.$ $\boxed{終}$

6. $u_{xx}+u_{yy} = 0$ を極座標を用いて表わす。まず $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より $r^2 = x^2+y^2, \theta = \tan^{-1}(y/x)$。これより $u(x,y) = U(r,\theta)$ とおくと

$$\begin{aligned}
u_x &= U_r r_x + U_\theta \theta_x \\
&= U_r \frac{x}{r} + U_\theta \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} \\
&= U_r \frac{x}{r} - U_\theta \frac{y}{x^2+y^2} \\
u_{xx} &= (U_{rr} r_x + U_{r\theta}\theta_x)\frac{x}{r} + U_r \frac{1}{r} \\
&+ (U_{\theta r} r_x + U_{\theta\theta}\theta_x)\frac{-y}{x^2+y^2} + U_\theta \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
&= (U_{rr}\frac{x}{r} + U_{r\theta}(\frac{-y}{x^2+y^2}))\frac{x}{r} + U_r \frac{1}{r} \\
&+ (U_{\theta r}\frac{x}{r} + U_{\theta\theta}(\frac{-y}{x^2+y^2}))\frac{y}{x^2+y^2} + U_\theta \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
u_y &= U_r r_y + U_\theta \theta_y \\
&= U_r \frac{y}{r} + U_\theta \frac{1/x}{1+(y/x)^2} \\
&= U_r \frac{y}{r} - U_\theta \frac{x}{x^2+y^2} \\
u_{yy} &= (U_{rr} r_y + U_{r\theta}\theta_y)\frac{y}{r} + U_r \frac{1}{r} \\
&+ (U_{\theta r} r_y + U_{\theta\theta}\theta_y)\frac{x}{x^2+y^2} + U_\theta \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
&= (U_{rr}\frac{y}{r} + U_{r\theta}(\frac{x}{x^2+y^2}))\frac{y}{r} + U_r \frac{1}{r} \\
&+ (U_{\theta r}\frac{y}{r} + U_{\theta\theta}(\frac{x}{x^2+y^2}))\frac{x}{x^2+y^2} + U_\theta \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

これより

$$u_{xx} + u_{yy} = U_{rr}\frac{x^2+y^2}{r^2} + U_r \frac{1}{r} + U_{\theta\theta}(\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}) = 0$$

よって

$$U_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0 \quad \boxed{終}$$

7.2 偏微分方程式の 3 つの解法

演習問題 7.2

1. 変数変換を用いて次の偏微分方程式を解け。
 (a) $u_x + 2u_y - u = 0$ 　(b) $u_x + u_y = 0$
 (c) $u_x + u_y = xu + yu$ 　(d) $u_x - u_y - u = 2x + y$

2. $u(x, y) = ce^{ax}e^{by}$ を用いて次の偏微分方程式を解け。
 (a) $u_x + 2u_y - u = 0$ 　$(b) u_{xx} - u_{yy} + u_y = 0$
 (c) $u_{xy} + u_x + u_{yy} = 0$ 　(d) $u_x + u_y + u = 0$

3. D'Alember 法を用いて次の偏微分方程式を解け。
 (a) $u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} = 0$ 　(b) $u_{xy} + 4u_{yy} = e^{2x+y}$
 (c) $u_{xy} - u_{yy} = 0$ 　(d) $u_{xx} = 25u_{yy}$

 1.

(a) $\xi = x, \eta = 2x - y$ とおくと $u(x, y) = U(\xi, \eta)$ より

$$\begin{aligned} u_x &= U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = U_\xi + 2U_\eta \\ u_y &= U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y = -U_\eta \end{aligned}$$

よって

$$u_x + 2u_y - u = U_\xi - U = 0.$$

これは 1 階の線形微分方程式なので積分因子 μ を求めると

$$\mu = e^{\int -1 d\xi} = e^{-\xi}$$

これより

$$e^{-\xi}(U_\xi - U) = 0.$$

書き直すと

$$\frac{\partial(e^{-\xi}U)}{\partial \xi} = 0$$

よって

$$e^{-\xi}U = \int 0 d\xi = \phi(\eta)$$

これより

$$u(x, y) = U(\xi, \eta) = e^{\xi}\phi(\eta) = e^{x}\phi(2x - y) \quad \boxed{\text{終}}$$

 (b) $\xi = x, \eta = x - y$ とおくと $u(x, y) = U(\xi, \eta)$ より

$$u_x + u_y = U_\xi = 0.$$

$$U = \int 0 d\xi = \phi(\eta).$$

これより

$$u(x, y) = U(\xi, \eta) = \phi(\eta) = \phi(x - y). \quad \boxed{\text{終}}$$

 (c) $\xi = x, \eta = x - y$ とおくと $u(x, y) = U(\xi, \eta)$ より

$$u_x + u_y = U_\xi = \xi U + (\xi - \eta)U.$$

書き直すと

$$U_\xi - (2\xi - \eta)U = 0.$$

これは 1 階の線形微分方程式なので積分因子 μ を求めると

$$\mu = e^{\int -(2\xi-\eta)d\xi} = e^{-\xi^2+\xi\eta}$$

これより

$$e^{-\xi^2+\xi\eta}(U_\xi - (2\xi - \eta)U) = 0.$$

書き直すと

$$\frac{\partial(e^{-\xi^2+\xi\eta}U)}{\partial\xi} = 0$$

よって

$$e^{-\xi^2+\xi\eta}U = \int 0 d\xi = \phi(\eta)$$

これより

$$u(x,y) = U(\xi,\eta) = e^{\xi^2-\xi\eta}\phi(\eta) = e^{x^2-x(x-y)}\phi(x-y) = e^{xy}\phi(x-y). \quad \boxed{終}$$

(d) $\xi = x, \eta = -x - y$ とおくと $u(x,y) = U(\xi,\eta)$ より

$$u_x - u_y - u = U_\xi - U = 2\xi + (-\xi - \eta).$$

これは 1 階の線形微分方程式なので積分因子 μ を求めると

$$\mu = e^{\int -1 d\xi} = e^{-\xi}$$

これより

$$e^{-\xi}(U_\xi - U) = e^{-\xi}(\xi - \eta).$$

書き直すと

$$\frac{\partial(e^{-\xi}U)}{\partial\xi} = e^{-\xi}(\xi - \eta).$$

よって

$$e^{-\xi}U = \int e^{-\xi}(\xi - \eta)d\xi = -\xi e^{-\xi} - e^{-\xi} + e^{-\xi}\eta + \phi(\eta)$$

これより

$$\begin{aligned} u(x,y) &= U(\xi,\eta) = -\xi - 1 + \eta + e^{\xi}\phi(\eta) \\ &= -x - 1 - x - y + e^x\phi(-x-y) = -2x - y - 1 + e^x\phi(-x-y) \quad \boxed{終} \end{aligned}$$

2.

(a) $u(x,y) = ce^{ax}e^{by}$ とおくと

$$u_x + 2u_y - u = cae^{ax}e^{by} + 2cbe^{ax}e^{by} - ce^{ax}e^{by} = ce^{ax}e^{by}(a + 2b - 1) = 0$$

よって $a = 1 - 2b$ とおくと，どんな b に対しても $e^{(1-2b)x}e^{by} = e^x e^{(-2x+y)b}$ は解になるので，任意の関数 $e^x\phi(-2x+y)$ をもちいて表わすと

$$u(x,y) = ce^{(1-2b)x}e^{by} = ce^x e^{(-2x+y)b} = e^x\phi(-2x+y) \quad \boxed{終}$$

(b)　$u(x,y) = ce^{ax}e^{by}$ とおくと

$$\begin{aligned} u_{xx} + 2u_{yy} + u_y &= ca^2e^{ax}e^{by} - cb^2e^{ax}e^{by} + cbe^{ax}e^{by} \\ &= ce^{ax}e^{by}(a^2 - b^2 + b) = 0 \end{aligned}$$

よって $a = \pm\sqrt{b^2 - b}$。$a = \sqrt{b^2 - b}$ とおくと，どんな b に対しても $e^{\sqrt{b^2-b}x+by}$ は解。また $a = -\sqrt{b^2 - b}$ とおくと，どんな b に対しても $e^{-\sqrt{b^2-b}x+by}$ は解である。解の 1 次結合はまた解なので任意の関数 g, h を用いて

$$u(x,y) = g(\sqrt{b^2 - b}x + by) + h(-\sqrt{b^2 - b}x + by) \quad \boxed{終}$$

(c)　$u(x,y) = ce^{ax}e^{by}$ とおくと

$$\begin{aligned} u_{xy} + u_x + u_{yy} &= cabe^{ax}e^{by} + cae^{ax}e^{by} + cb^2e^{ax}e^{by} \\ &= ce^{ax}e^{by}(ab + a + b^2) = 0 \end{aligned}$$

よって $a = \frac{-b^2}{b+1}$ と表わせるので

$$u(x,y) = ce^{\frac{-b^2}{b+1}x+by}. \quad \boxed{終}$$

(d)　$u(x,y) = ce^{ax}e^{by}$ とおくと

$$\begin{aligned} u_x + u_y + u &= cae^{ax}e^{by} + cbe^{ax}e^{by} + ce^{ax}e^{by} \\ &= ce^{ax}e^{by}(a + b + 1) = 0 \end{aligned}$$

よって $a = -1 - b$ と表わせるので

$$u(x,y) = ce^{-(1+b)x+by} = ce^{-x}e^{(-x+y)b} = e^{-x}\phi(-x+y). \quad \boxed{終}$$

3.

(a)　$v = x + my,\ w = x + ny$ とおくと $u(x,y) = U(v,w)$ より

$$\begin{aligned} u_x &= U_v v_x + U_w w_x = U_v + U_w \\ u_y &= U_v v_y + U_w w_y = mU_v + nU_w \\ u_{xx} &= U_{vv}v_x + U_{wv}v_x + U_{vw}w_x + U_{ww}w_x = U_{vv} + 2U_{vw} + U_{ww} \\ u_{xy} &= U_{vv}v_y + U_{wv}v_y + U_{vw}w_y + U_{ww}w_y = mU_v + (m+n)U_{vw} + nU_{ww} \\ u_{yy} &= mU_v v_y + nU_{wv}v_y + mU_{vw}w_y + nU_{ww}w_y = m^2U_{vv} + 2mnU_{vw} + n^2U_{ww} \end{aligned}$$

これより

$$\begin{array}{rll} & u_{xx} & = U_{vv} + 2U_{vw} + U_{ww} \\ -5(& u_{xy} & = mU_{vv} + (m+n)U_{vw} + nU_{ww} \\ +6(& u_{yy} & = m^2U_{vv} + 2mnU_{vw} + n^2U_{ww} \\ \hline & 0 & = (1 - 5m + 6m^2)U_{vv} + (2 - 5(m+n) + 12mn)U_{vw} + (1 - 5n + 6n^2)U_{ww} \end{array}$$

ここで m, n を $1 - 5t + 6t^2 = 0$ の解とすると $(1-2t)(1-3t) =$. よって $m = 1/3,\ n = 1/2$ とおくと

$$(2 - 5(m+n) + 12mn)U_{vw} = -\frac{1}{6}U_{vw} = 0$$

となる。これより $U_{vw} = 0$ となるので w について積分すると

$$U_v = \int 0 dw = c(v)$$

次に v について積分すると

$$\begin{aligned} u(x,y) &= U(v,w) = \int c(v)dv = g(v) + h(w) \\ &= g(x + \frac{1}{3}y) + h(x + \frac{1}{2}y) \quad \boxed{終} \end{aligned}$$

(b) $v = x + my,\ w = x + ny$ とおくと $u(x,y) = U(v,w)$ より

$$\begin{array}{rll} & u_{xy} & = mU_{vv} + (m+n)U_{vw} + nU_{ww} \\ 4(& u_{yy} & = m^2U_{vv} + 2mnU_{vw} + n^2U_{ww} \\ \hline & e^{2x+y} & = (m+4m^2)U_{vv} + (m+n+8mn)U_{vw} + (n+4n^2)U_{ww} \end{array}$$

ここで m,n を $t + 4t^2 = 0$ の解とすると $t = 0,\ -1/4.$ よって $m = 0,\ n = -4$ とおくと

$$(m+n+8mn)U_{vw} = -\frac{1}{4}U_{vw} = e^{2x+y} = e^{2v+4v-4w}$$

となる。これより $U_{vw} = -4e^{6v-4w}$ となるので w について積分すると

$$U_v = \int -4e^{6v-4w}dw = -4e^{6v}\int e^{-4w}dw = e^{6v}e^{-4w} + c(v)$$

次に v について積分すると

$$\begin{aligned} u(x,y) &= U(v,w) = \int (e^{6v}e^{-4w} + c(v))dv = \frac{1}{6}e^{-4w}e^{6v} + g(v) + h(w) \\ &= \frac{1}{6}e^{2x+y} + g(x) + h(x - \frac{1}{4}) \quad \boxed{終} \end{aligned}$$

(c) $v = x + my,\ w = x + ny$ とおくと $u(x,y) = U(v,w)$ より

$$\begin{array}{rll} & u_{xy} & = mU_{vv} + (m+n)U_{vw} + nU_{ww} \\ -(& u_{yy} & = m^2U_{vv} + 2mnU_{vw} + n^2U_{ww} \\ \hline & 0 & = (m-m^2)U_{vv} + (m+n-2mn)U_{vw} + (n-n^2)U_{ww} \end{array}$$

ここで m,n を $t - t^2 = 0$ の解とすると $t = 0,\ 1.$ よって $m = 0,\ n = 1$ とおくと

$$(m+n-2mn)U_{vw} = U_{vw} = 0$$

となる。これを w について積分すると

$$U_v = \int 0dw = c(v)$$

次に v について積分すると

$$\begin{aligned} u(x,y) &= U(v,w) = \int c(v)dv = g(v) + h(w) \\ &= g(x) + h(x+y) \quad \boxed{終} \end{aligned}$$

(d) $v = x + my,\ w = x + ny$ とおくと $u(x,y) = U(v,w)$ より

$$\begin{array}{rll} & u_{xx} & = U_{vv} + 2U_{vw} + U_{ww} \\ -25(& u_{yy} & = m^2U_{vv} + 2mnU_{vw} + n^2U_{ww} \\ \hline & 0 & = (1-25m^2)U_{vv} + (2-50mn)U_{vw} + (1-25n^2)U_{ww} \end{array}$$

ここで m,n を $1 - 25t^2 = 0$ の解とすると $t = \pm 1/5.$ よって $m = 1/5,\ n = -1/5$ とおくと

$$(2-50mn)U_{vw} = 4U_{vw} = 0$$

となる。これより $U_{vw}=0$ となるので w について積分すると

$$U_v = \int 0 dw = c(v)$$

次に v について積分すると

$$\begin{aligned} u(x,y) &= U(v,w) = \int c(v)dv = g(v) + h(w) \\ &= g(x+\frac{y}{5}) + h(x-\frac{y}{5}) \quad \boxed{終} \end{aligned}$$

7.3　3 つの境界値問題

演習問題 7.3.1

1. 次の境界値問題

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < L,\ 0 < y < K \\ &u(0,y) = 0,\ u(L,y) = 0,\ 0 < y < K \\ &u(x,0) = 0,\ u(x,K) = f(x),\ 0 < x < L \end{aligned}$$

の解は次の無限級数で与えられることを示せ。

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L} \sinh\frac{n\pi y}{L} \end{aligned}$$

ただし，$C_n \sinh\frac{n\pi K}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$

2. Laplace 方程式を次の条件の元で解け。

(a)

$$\begin{aligned} &u(0,y) = 0 = u(L,y),\ 0 < y < K \\ &u_y(x,0) = 0,\ u(x,K) = f(x),\ 0 < x < L \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} &u(0,y) = g(y),\ u(L,y) = 0,\ 0 < y < K \\ &u(x,0) = 0 = u(x,K),\ 0 < x < L \end{aligned}$$

3. Laplace 方程式の境界条件が

$$\begin{aligned} &u_x(0,y) = 0 = u_x(L,y),\ 0 < y < K \\ &u(x,0) = 0,\ u_y(x,K) = f(x)\ 0 < x < L \end{aligned}$$

のとき

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) \\ &= D_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\frac{n\pi x}{L} \sinh\frac{n\pi y}{L}, \end{aligned}$$

ただし，

$$D_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$D_n \frac{nx}{L}\cosh\frac{n\pi K}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ n \geq 1$$

で与えられることを示せ。

解答

1.　変数分離法を用いる。$u(x,y) = X(x)Y(y)$ とおき，Laplace 方程式に代入すると

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda.$$

これよりただちに次の微分方程式を得る。

$$X'' - \lambda X = 0,\quad Y'' + \lambda Y = 0.$$

ここで u の境界条件を用いると，すべての $0 < y < K$ に対して

$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0,$$

$$u(L,y) = X(L)Y(y) = 0$$

となる。これは $Y(y)$ が 0 でないならば，$X(0) = X(L) = 0$ を意味する。よってこれより Sturm-Liouville 問題

$$X'' - \lambda X = 0,\quad X(0) = X(L) = 0$$

を得る。すでに学んだように，この問題は固有値 $\lambda_n = -n^2\pi^2/L^2$，固有関数 $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ を持っている。さらに，固有値が $\lambda_n = -n^2\pi^2/L^2$ のとき，

$$Y'' + \lambda_n Y = 0$$

の一般解は

$$Y_n(y) = C_n\cosh\frac{n\pi y}{L} + D_n\sinh\frac{n\pi y}{L}$$

で与えられる。

$X_n(x)$ と $Y_n(y)$ の積

$$u_n(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{L}(C_n\cosh\frac{n\pi y}{L} + D_n\sinh\frac{n\pi y}{L})$$

は Laplace 方程式を満たし，さらに境界条件を満たしている。よって重ね合わせの原理より

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}(C_n\cosh\frac{n\pi y}{L} + D_n\sinh\frac{n\pi y}{L}).$$

ここで初期条件 $u(x,0) = 0$ より，

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi x}{L} \equiv 0.$$

よって $C_n = 0$。最後に境界条件 $u(x,K) = f(x)$ より

$$u(x,K) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}(D_n\sinh\frac{n\pi K}{L}) \equiv f(x).$$

この条件が満たされるためには，この級数が $f(x)$ に収束するように D_n を選ばなければならない。ところがこれは皆さんがよく知っている関数 $f(x)$ の $[0,L]$ でのフーリエ正弦級数展開である。よって

$$D_n \sinh\frac{n\pi K}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

で与えられる。よって

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L},$$

ただし，$D_n \sinh\frac{n\pi K}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$。 $\boxed{\text{終}}$

2(a)　変数分離法を用いる。$u(x,y) = X(x)Y(y)$ とおき，Laplace 方程式に代入すると

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda.$$

これよりただちに次の微分方程式を得る。

$$X'' - \lambda X = 0, \quad Y'' + \lambda Y = 0.$$

ここで u の境界条件を用いると，すべての $0 < y < K$ に対して

$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0,$$

$$u(L,y) = X(L)Y(y) = 0$$

となる。これは $Y(y)$ が 0 でないならば，$X(0) = X(L) = 0$ を意味する。よってこれより Sturm-Liouville 問題

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0$$

を得る。すでに学んだように，この問題は固有値 $\lambda_n = -n^2\pi^2/L^2$，固有関数 $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ を持っている。さらに，固有値が $\lambda_n = -n^2\pi^2/L^2$ のとき，

$$Y'' + \lambda_n Y = 0$$

の一般解は

$$Y_n(y) = C_n\cosh\frac{n\pi y}{L} + D_n\sinh\frac{n\pi y}{L}$$

で与えられる。

$X_n(x)$ と $Y_n(y)$ の積

$$u_n(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{L}(C_n\cosh\frac{n\pi y}{L} + D_n\sinh\frac{n\pi y}{L})$$

は Laplace 方程式を満たし，さらに境界条件を満たしている。よって重ね合わせの原理より

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}(C_n\frac{n\pi}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L} + D_n\frac{n\pi}{L}\cosh\frac{n\pi y}{L}).$$

ここで $u(x,y)$ が y について項別微分可能であるとすると，

$$u_y(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}(C_n\cosh\frac{n\pi y}{L} + D_n\sinh\frac{n\pi y}{L}.)$$

初期条件 $u_y(x,0)=0$ より，

$$u_y(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} \equiv 0.$$

よって $D_n=0$。最後に境界条件 $u(x,K)=f(x)$ より

$$u(x,K)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}(C_n\cosh\frac{n\pi K}{L}) \equiv f(x).$$

この条件が満たされるためには，この級数が $f(x)$ に収束するように C_n を選ばなければならない。ところがこれは関数 $f(x)$ の $[0,L]$ でのフーリエ正弦級数展開である。よって

$$C_n\cosh\frac{n\pi K}{L}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

で与えられる。よって

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{L}\cosh\frac{n\pi y}{L},$$

ただし，$C_n\cosh\frac{n\pi K}{L}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$。 $\boxed{終}$

(b) 変数分離法を用いる。$u(x,y)=X(x)Y(y)$ とおき，Laplace 方程式に代入すると

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda.$$

これよりただちに次の微分方程式を得る。

$$X''-\lambda X=0,\quad Y''+\lambda Y=0.$$

ここで u の境界条件を用いると，すべての $0<x<L$ に対して

$$u(x,0)=X(x)Y(0)=0,$$

$$u(x,K)=X(x)Y(K)=0$$

となる。これは $X(x)$ が 0 でないならば，$Y(0)=Y(K)=0$ を意味する。よってこれより Sturm-Liouville 問題

$$Y''+\lambda Y=0,\quad Y(0)=Y(K)=0$$

を得る。すでに学んだように，この問題は固有値 $\lambda_n=n^2\pi^2/K^2$，固有関数 $Y_n(x)=\sin(n\pi y/K)$ を持っている。さらに，固有値が $\lambda_n=n^2\pi^2/K^2$ のとき，

$$X''-\lambda_n X=0$$

の一般解は

$$X_n(y)=C_n\cosh\frac{n\pi x}{K}+D_n\sinh\frac{n\pi x}{K}$$

で与えられる。

$X_n(x)$ と $Y_n(y)$ の積

$$u_n(x,y)=C_n\cosh\frac{n\pi x}{K}\sin\frac{n\pi y}{K}+D_n\sinh\frac{n\pi x}{K}\sin\frac{n\pi y}{K}$$

は Laplace 方程式を満たし，さらに境界条件を満たしている。よって重ね合わせの原理より

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cosh\frac{n\pi x}{K}+D_n\sinh\frac{n\pi x}{K}\right)\sin\frac{n\pi y}{K}.$$

ここで境界条件 $u(L,y)=0$ より

$$u(L,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cosh\frac{n\pi L}{K}+D_n\sinh\frac{n\pi L}{K})\sin\frac{n\pi y}{K}\equiv 0.$$

よって

$$D_n\sinh\frac{n\pi L}{K}=-C_n\cosh\frac{n\pi L}{K}$$

これより

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh n\pi L/K}(C_n\sinh\frac{n\pi L}{K}\cosh\frac{n\pi x}{K} \\
&- C_n\cosh\frac{n\pi L}{K}\sinh\frac{n\pi x}{K})\sin\frac{n\pi y}{K} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{\sinh n\pi L/K}\sinh\frac{n\pi(L-x)}{K}\sin\frac{n\pi y}{K} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\frac{n\pi(L-x)}{K}\sin\frac{n\pi y}{K}
\end{aligned}$$

次に初期条件 $u(0,y)=g(x)$ より，

$$u(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\frac{n\pi L}{K}\sin\frac{n\pi y}{K}\equiv g(y).$$

この条件が満たされるためには，この級数が $g(y)$ に収束するように B_n を選ばなければならない。ところがこれは関数 $g(y)$ の $[0,K]$ でのフーリエ正弦級数展開である。よって

$$B_n\sinh\frac{n\pi L}{K}=\frac{2}{K}\int_0^K g(y)\sin\frac{n\pi y}{K}dy$$

で与えられる。よって

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\frac{n\pi(L-x)}{K}\sin\frac{n\pi y}{K}$$

ただし，$B_n\sinh\frac{n\pi L}{K}=\frac{2}{K}\int_0^K g(y)\sin\frac{n\pi y}{K}dy$。 $\boxed{\text{終}}$

3. 変数分離法を用いる。$u(x,y)=X(x)Y(y)$ とおき，Laplace 方程式に代入すると

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda.$$

これよりただちに次の微分方程式を得る。

$$X''-\lambda X=0,\quad Y''+\lambda Y=0.$$

ここで u の境界条件を用いると，すべての $0 < y < K$ に対して

$$u_x(0,y) = X'(0)Y(y) = 0,$$

$$u_x(L,y) = X'(L)Y(y) = 0$$

となる。これは $Y(y)$ が 0 でないならば，$X'(0) = X'(L) = 0$ を意味する。よってこれより

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X'(0) = X'(L) = 0$$

を得る。これも Sturm-Liouville 問題である。

　$\lambda = 0$ のとき $X'' = 0$ より $X = c_1 x + c_2$。ここで境界値 $X'(0) = X'(L) = 0$ を用いると

$$X'(0) = c_1, X'(L) = c_1 = 0$$

より $X = c_2$.

　$\lambda < 0$ のとき，$\lambda = -\beta^2$ とおくと，

$$X'' + \beta^2 X = 0$$

よって $X = c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x$。ここで境界値 $X'(0) = X'(L) = 0$ を用いると $X'(0) = c_2\beta = 0$ より，$c_2 = 0$。次に $X'(L) = -\beta c_1 \sin\beta L = 0$ より $\sin\beta L = 0$。よって固有値は

$$\lambda_n = -\beta^2 = -(\frac{n\pi}{L})^2$$

また固有関数は

$$X_n = \sin(\frac{n\pi}{L})$$

　$\lambda > 0$ のとき，$\lambda = \alpha^2$ とおくと，

$$X'' - \alpha^2 X = 0$$

よって $X = c_1 \cosh\alpha x + c_2 \sinh\alpha x$。ここで境界値 $X'(0) = X'(L) = 0$ を用いると $X'(0) = c_2\alpha = 0$ より，$c_2 = 0$。次に，$X'(L) = \alpha c_1 \sinh\alpha L = 0$ より，$c_2 = 0$。

　これより固有値 $\lambda_n = -\beta^2 = -(\frac{n\pi}{L})^2$，固有関数 $X_n = \sin(\frac{n\pi x}{L})$ を得る。

$$\lambda = -\beta^2 = -(\frac{n\pi}{L})^2$$

次に，$Y'' + \lambda Y = 0$ より

$$Y'' - (\frac{n\pi}{L})^2 Y = 0$$

よって，

$$Y_n = C_n \cosh\frac{n\pi y}{L} + D_n \sinh\frac{n\pi y}{L}$$

で与えられる。

　$X_n(x)$ と $Y_n(y)$ の積

$$u_n(x,y) = C_n \cosh\frac{n\pi y}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} + D_n \sinh\frac{n\pi y}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

は Laplace 方程式を満たし，さらに境界条件を満たしている。よって重ね合わせの原理より

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh\frac{n\pi y}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} + D_n \sinh\frac{n\pi y}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

ここで境界条件 $u(x,0)=0$ より

$$u(x,0)=\sum C_n \sin\sin\frac{n\pi x}{L}\equiv 0.$$

よって

$$C_n=0$$

次に，$u_y(x,K)=f(x)$ より

$$f(x)=u_y(x,K)=\sum D_n\frac{n\pi}{L}\cosh\frac{n\pi K}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

これは関数 $f(y)$ の $[0,L]$ でのフーリエ正弦級数展開である。よって

$$D_n\frac{n\pi}{L}\cosh\frac{n\pi K}{L}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

で与えられる。よって

$$u(x,y) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n\sinh\frac{n\pi y}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

ただし，$C_n\sinh\frac{n\pi L}{K}=\frac{2}{K}\int_0^K g(y)\sin\frac{n\pi y}{K}dy$。 $\boxed{終}$

7.3.1 波動方程式

演習問題 7.3.2

1. 次の境界値問題を解け。
(a) 両端が固定された長さ $1m$ の水平に張られた弾性弦の初期形状が $\sin\pi x$ で与えられている。弦の初速度が 0 のとき，この弦の垂直方向の変位を変数分離法を用いて求めよ。
(b) 両端が固定された長さ $1m$ の水平に張られた弾性弦に初速度 $1m/sec$ を与えたとき，この弦の垂直方向の変位を変数分離法を用いて求めよ。
2. D'Alembert 法は非有限区間での波動方程式にも用いることができ

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\tau)d\tau$$

は次の初期値問題の解であることを示せ。

$$u_{tt}=c^2u_{xx}\ (-\infty<x<\infty,\ t>0),$$

$$u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x).$$

3. 2 の結果を用いて次の初期値問題を解け。

$$u_{tt}=c^2u_{xx}\ (-\infty<x<\infty,\ t>0),$$

$$u(x,0)=e^{-x^2},\ \ u_t(x,0)=1.$$

4. 2 次元波動方程式 $u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy})$ を次の条件の元で解け。

初期条件： $u(x,y,0) = f(x,y) = \sin \pi x \sin \pi y,\ u_t(x,y,0) = 0$.
(a) 境界条件： $u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0\ (0 < x < 1)$,
$u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0\ (0 < y < 1)$.

初期条件： $u(x,y,0) = f(x,y) = 0,\ u_t(x,y,0) = g(x,y)$.
(b) 境界条件： u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0 (0 ¡ x ¡ 1),
$u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0\ (0 < y < 1)$.

解答

1(a) まず弾性弦の垂直方向の変位を $u(x,t)$ とすると，$u(x,t)$ は一次元波動方程式 $u_{xx} = (1/c^2)u_{tt}$ $(0 < x < 1, t > 0)$ を満たす。次に，初期条件は

$$u(x,0) = \sin \pi x, u_t(x,0) = 0$$

と表わせる。また両端が固定されているので，境界条件は

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

となる。ここで変数分離法を用いる。$u(x,t) = X(x)T(t)$ とおき，一次元波動方程式に代入すると

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = \lambda.$$

これよりただちに次の微分方程式を得る。

$$X'' - \lambda X = 0, \quad T'' - c^2 \lambda T = 0.$$

ここで u の境界条件を用いると，すべての t に対して

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u(1,t) = X(1)T(t) = 0$$

となる。これは $T(t)$ が 0 でないならば，$X(0) = X(1) = 0$ を意味する。よってこれより Sturm-Liouville 問題

$$X'' - \lambda X = 0,\ X(0) = X(1) = 0$$

を得る。すでに学んだように，この問題は固有値 $\lambda_n = -n^2\pi^2$，固有関数 $X_n(x) = \sin n\pi x$ をもっている。また，固有値 $\lambda_n = -n^2\pi^2$ のとき，

$$T'' - c^2 \lambda_n T = 0$$

の一般解は

$$T_n = C_n \cos n\pi ct + D_n \sin n\pi ct$$

ここで X_n と T_n の積

$$u_n(x,t) = \sin n\pi x(C_n \cos n\pi ct + D_n \sin n\pi ct)$$

は一次元波動方程式をみたし，さらに境界条件を満たしている。よって重ね合わせの原理より

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x(C_n \cos n\pi ct + D_n \sin n\pi ct)$$

ここで初期条件 $u(x,0)=\sin\pi x$ より

$$\sin\pi x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x$$

これより $C_1=1, C_n=0(n\geq 2)$。次に $u_t(x,0)=0$ より

$$0 = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(n\pi c)\sin n\pi x$$

これより $D_n(n\pi c)=0$。よって

$$u(x,t)=\sin\pi x\cos\pi ct \quad \boxed{\text{終}}$$

(b)　まず弾性弦の垂直方向の変位を $u(x,t)$ とすると，$u(x,t)$ は一次元波動方程式 $u_{xx}=(1/c^2)u_{tt}$ $(0<x<1, t>0)$ を満たす。次に，初期条件は初速度 1m/sec より

$$u(x,0)=0, u_t(x,0)=1$$

と表わせる。また両端が固定されているので，境界条件は

$$u(0,t)=u(1,t)=0$$

となる。ここで変数分離法を用いる。$u(x,t)=X(x)T(t)$ とおき，一次元波動方程式に代入すると

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{c^2T}=\lambda.$$

これよりただちに次の微分方程式を得る。

$$X''-\lambda X=0,\quad T''-c^2\lambda T=0.$$

ここで u の境界条件を用いると，すべての t に対して

$$u(0,t)=X(0)T(t)=0,$$

$$u(1,t)=X(1)T(t)=0$$

となる。これは $T(t)$ が 0 でないならば，$X(0)=X(1)=0$ を意味する。よってこれより Sturm-Liouville 問題

$$X''-\lambda X=0,\ X(0)=X(1)=0$$

を得る。すでに学んだように，この問題は固有値 $\lambda_n=-n^2\pi^2$，固有関数 $X_n(x)=\sin n\pi x$ をもっている。また，固有値 $\lambda_n=-n^2\pi^2$ のとき，

$$T''-c^2\lambda_n T=0$$

の一般解は

$$T_n=C_n\cos n\pi ct+D_n\sin n\pi ct$$

ここで X_n と T_n の積

$$u_n(x,t)=\sin n\pi x(C_n\cos n\pi ct+D_n\sin n\pi ct)$$

は一次元波動方程式をみたし，さらに境界条件を満たしている。よって重ね合わせの原理より

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x (C_n \cos n\pi ct + D_n \sin n\pi ct)$$

ここで初期条件 $u(x,0) = 0$ より

$$0 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x$$

これより $C_n = 0 (n \geq 1)$。次に $u_t(x,0) = 1$ より

$$1 = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n (n\pi c) \sin n\pi x$$

ここで $b_n = n\pi c D_n$ とおくと

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 \sin n\pi x dx \\ &= 2 \int_0^1 \sin n\pi x dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos n\pi x \ |_0^1 \\ &= -\frac{2}{n\pi} (\cos n\pi - 1) = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} \end{aligned}$$

よって

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2 c} \sin n\pi x \sin n\pi ct \quad \boxed{終}$$

2 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $(-\infty < x < \infty,\ t > 0)$ において，$v = x + mt,\ w = x + nt$ とおくと $u(x,t) = U(v,w)$ より

$$\begin{array}{rll} & u_{tt} & = m^2 U_{vv} + 2mn U_{vw} + n^2 U_{ww} \\ -c^2(& u_{xx} & = U_{vv} + 2U_{vw} + U_{ww} \\ \hline & 0 & = (m^2 - c^2) U_{vv} + (2mn - 2c^2) U_{vw} + (n^2 - c^2) U_{ww} \end{array}$$

ここで m, n を $t^2 - c^2 = 0$ の解とすると $t = \pm c$. よって $m = c,\ n = -c$ とおくと

$$(2mn - 2c^2) U_{vw} = -4c^2 U_{vw} = 0$$

となる。これを w について積分すると

$$U_v = \int 0 dw = c(v)$$

次に v について積分すると

$$\begin{aligned} u(x,y) &= U(v,w) = \int c(v) dv = \phi(v) + \psi(w) \\ &= \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \end{aligned}$$

ここで初期条件 $u(x,0) = f(x)$ より，$v = x = w$. したがって，$u(x,0) = U(v,v)$ となるので，

$$\begin{aligned} f(v) &= u(x,0) = \phi(v) + \psi(v) \\ u_t(x,t) &= = U_v v_t + U_w w_t = cU_v - cU_w \end{aligned}$$

これより $g(v) = u_t(x,0) = cU_v(v,v) - cU_w(v,v)$ となる．まとめると，

$$\begin{array}{rcl} U(v,w) &=& \phi(v) + \psi(w) \\ \phi(v) + \psi(v) &=& f(v) \\ \phi'(v) - \psi'(v) &=& \frac{1}{c}g(v) \end{array}$$

ここで，最後の式を積分すると，

$$\phi(v) - \psi(v) = \frac{1}{c}\int^{v} g(\tau)d\tau$$

これと，$\phi(v) + \psi(v) = f(v)$ の連立方程式を解くと，

$$\phi(v) = \frac{1}{2}\left(f(v) + \frac{1}{c}\int^{v} g(\tau)d\tau\right)$$

$$\psi(v) = \frac{1}{2}\left(f(v) - \frac{1}{c}\int^{v} g(\tau)d\tau\right)$$

これより

$$\begin{array}{rcl} u(x,t) = U(v,w) &=& \phi(v) + \psi(w) = \frac{1}{2}[f(v) + f(w) + \frac{1}{c}\int^{v} g(\tau)d\tau) - \frac{1}{c}\int^{w} g(\tau)d\tau)] \\ &=& \frac{1}{2}[f(x+ct) + g(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)d\tau \ \boxed{終} \end{array}$$

3.　$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + g(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)d\tau$
ここで $f(x) = u(x,0) = e^{-x^2}, g(x) = u_t(x,0) = 1$ より

$$\begin{array}{rcl} u(x,t) &=& \frac{1}{2}[e^{-(x+ct)^2} + e^{-(x-ct)^2}] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} d\tau \\ &=& \frac{1}{2}(e^{-(x+ct)^2} + e^{-(x-ct)^2}) + \frac{1}{2c}(2ct) \\ &=& \frac{1}{2}(e^{-(x+ct)^2} + e^{-(x-ct)^2}) + t \ \boxed{終} \end{array}$$

4(a).　$u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$ を仮定し，これを 2 次元波動方程式に代入すると

$$\frac{T''}{c^2T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}$$

左辺は x, y と独立で，右辺は t と独立なので，両辺とも定数となり，この定数を $-\lambda^2$ とおくと

$$\frac{T''}{cT} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

これより

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda^2$$

となり，ここでも左辺と右辺は定数となるのでこの定数を $-\alpha^2$ とおくと，次の 3 つの微分方程式を得る。

$$\begin{array}{l} X'' - \alpha X = 0 \\ Y'' - \beta Y = 0 \\ T'' - c^2\lambda T = 0 \end{array}$$

ただし，$\beta = \lambda - \alpha$。ここで境界条件

$$u(o, y, t) = u(1, y, t) = 0,\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0$$

を用いると，Sturm-Liouville 問題

$$\begin{aligned} X'' - \alpha X = 0,\ X(0) = X(1) = 0, \\ Y'' - \beta Y = 0,\ Y(0) = Y(1) = 0 \end{aligned}$$

が得られる。この境界値問題の固有値と固有関数はそれぞれ

$$\begin{aligned} \alpha_m = -m^2\pi^2, X_m(x) = \sin m\pi x\ (m = 1, 2, 3, \ldots) \\ \beta_n = -n^2\pi^2, Y_n(y) = \sin n\pi y\ (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

で与えられる。この α_m, β_n に対して，T は

$$T_{mn}(t) = C_{mn} \cos\sqrt{m^2 + n^2}\pi ct + D_{mn} \sin\sqrt{m^2 + n^2}\pi ct$$

ここで初期条件 $u_t(x, y, 0) = 0$ より $T'(0) = 0$ となるので $D_{mn} = 0$，よって

$$T_{mn}(t) = C_{mn} \cos\sqrt{m^2 + n^2}\pi ct$$

こうして，境界条件と初期条件を満たす解の列

$$u_{mn}(x, y, t) = \sin m\pi x \sin n\pi x C_{mn} \cos\sqrt{m^2 + n^2}\pi ct$$

が得られる。これらを重ね合わせて

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sin m\pi x \sin n\pi y C_{mn} \cos\sqrt{m^2 + n^2}\pi ct$$

が得られる。ここで初期条件 $u(x, y, 0) = f(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y$ より

$$\sin \pi x \sin \pi y = u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sin m\pi x \sin n\pi y C_{mn}$$

よって $C_{11} = 1, C_{mn} = 0\ (m \neq 1, n \neq q1)$。これより

$$u(x, y, t) = \sin \pi x \sin \pi y \cos(\sqrt{2}\pi ct) \quad \boxed{終}$$

(b)　$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ を仮定し，これを 2 次元波動方程式に代入すると

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}$$

左辺は x, y と独立で，右辺は t と独立なので，両辺とも定数となり，この定数を $-\lambda^2$ とおくと

$$\frac{T''}{cT} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

これより

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda^2$$

となり，ここでも左辺と右辺は定数となるのでこの定数を $-\alpha^2$ とおくと，次の 3 つの微分方程式を得る。

$$X'' - \alpha X = 0$$
$$Y'' - \beta Y = 0$$
$$T'' - c^2\lambda T = 0$$

ただし，$\beta = \lambda - \alpha$。ここで境界条件

$$u(o, y, t) = u(1, y, t) = 0,\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0$$

を用いると，Sturm-Liouville 問題

$$X'' - \alpha X = 0,\ X(0) = X(1) = 0,$$
$$Y'' - \beta Y = 0,\ Y(0) = Y(1) = 0$$

が得られる。この境界値問題の固有値と固有関数はそれぞれ

$$\alpha_m = -m^2\pi^2, X_m(x) = \sin m\pi x\ (m = 1, 2, 3, \ldots)$$
$$\beta_n = -n^2\pi^2, Y_n(y) = \sin n\pi y\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で与えられる。この α_m, β_n に対して，T は

$$T_{mn}(t) = C_{mn}\cos\sqrt{m^2 + n^2}\pi ct + D_{mn}\sin\sqrt{m^2 + n^2}\pi ct$$

ここで初期条件 $u(x, y, 0) = 0$ より $T(0) = 0$ となるので $C_{mn} = 0$，よって

$$T_{mn}(t) = D_{mn}\sin\sqrt{m^2 + n^2}\pi ct$$

こうして，境界条件と初期条件を満たす解の列

$$u_{mn}(x, y, t) = \sin m\pi x \sin n\pi x D_{mn}\sin\sqrt{m^2 + n^2}\pi ct$$

が得られる。これらを重ね合わせて

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin m\pi x \sin n\pi y D_{mn}\sin\sqrt{m^2 + n^2}\pi ct$$

が得られる。ここで初期条件 $u_t(x, y, 0) = g(x, y)$ より

$$g(x, y) = u_t(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} D_{mn}\sqrt{m^2 + n^2}\pi c \sin m\pi x \sin n\pi y$$

ここで

$$D_m = \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn}\sqrt{m^2 + n^2}\pi c \sin n\pi y$$

とおくと

$$g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sin m\pi x$$

よって

$$\begin{aligned} D_{mn}\sqrt{m^2+n^2}\pi c &= 2\int_0^1 D_m \sin n\pi y dy \\ &= 2\int_0^1 (2\int_0^1 g(x,y)\sin m\pi x dx)\sin n\pi y dy \\ &= 4\int_0^1\int_0^1 g(x,y)\sin m\pi x \sin n\pi y dx dy \end{aligned}$$

よって

$$D_{mn} = \frac{4}{\sqrt{m^2+n^2}\pi c}\int_0^1\int_0^1 g(x,y)\sin m\pi x \sin n\pi y dx dy \ \boxed{終}$$

7.3.2 熱伝導方程式

演習問題 7.3.3

1. 表面が断熱されている長さ 2m の細長い棒の定常温度分布が

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2-x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

で与えられ，時間 $t=0$ のとき，両端が温度 0° 度の冷水の中につけられた。このとき棒の温度 $u(x,t)$ を求めよ。

2. 1. と同じ条件で定常温度分布が $f(x) = x(2-x)$，$0 < x < 2$ で与えられているときの温度 $u(x,t)$ を求めよ。

3. 長さ 1m の細長い棒の端が 10° と 90° に保たれているとき，定常温度分布を求めよ。

4. (a) 次の熱伝導方程式の境界値問題

$u_{xx} = ku_t \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0$

$|x| \to \infty$ のとき $u(x,t)$ 有界

$u(x,0) = f(x)$

にラプラス変換を施し，$u(x,t)e^{-st} \to 0$ を仮定すると次の微分方程式を得ることを示せ。

$$U_{xx}(x,s) - ksU(x,s) = -kf(x),\ -\infty < x < \infty.$$

(b)

$$\begin{aligned} U(x,s) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{s}}\int_0^\infty e^{-\sqrt{ks}(y-s)}f(y)dy \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{s}}\int_{-\infty}^0 e^{-\sqrt{ks}(y-s)}f(y)dy \\ &- \sqrt{\frac{k}{s}}\int_0^x f(y)\sinh -\sqrt{ks}(y-s)f(y)dy \end{aligned}$$

は上の境界値問題の解であることを示せ。

解答

1. この問題の数学的モデルは

$$u_t = ku_{xx}$$

両端の温度が 0° より $u(0,t)=u(2,t)=0$。また定常温度分布が $f(x)$ より $u(x,0)=f(x)$。よって次のような境界値問題を得る。

$$u_t = ku_{xx},\ u(0,t)=u(2,t)=0,\ u(x,0)=f(x)$$

ここで変数分離法を用いる。$u(x,t)=X(x)T(t)$ とおき，一次元熱伝導方程式に代入すると

$$XT' = kX''T$$

より

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = \lambda.$$

これよりただちに次の微分方程式を得る。

$$X'' - \lambda X = 0, \quad T' - k\lambda T = 0.$$

ここで u の境界条件を用いると，すべての t に対して

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u(2,t) = X(2)T(t) = 0$$

となる。これは $T(t)$ が 0 でないならば，$X(0)=X(2)=0$ を意味する。よってこれより Sturm-Liouville 問題

$$X'' - \lambda X = 0,\ X(0)=X(2)=0$$

を得る。すでに学んだように，この問題は固有値 $\lambda_n = -n^2\pi^2/4$，固有関数 $X_n(x)=\sin n\pi x/2$ をもっている。また，固有値 $\lambda_n = -n^2\pi^2/4$ のとき，

$$T' + \frac{kn^2\pi^2}{4}T = 0$$

の一般解は

$$T_n = B_n e^{-\frac{kn^2\pi^2}{4}t}.$$

ここで X_n と T_n の積

$$u_n(x,t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{2} e^{-\frac{kn^2\pi^2}{4}t}$$

は一次元波動方程式をみたし，さらに境界条件を満たしている。よって重ね合わせの原理より

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{2} e^{-\frac{kn^2\pi^2}{4}t}$$

ここで初期条件 $u(x,0)=f(x)$ より

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{2}$$

よって

$$B_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx \quad \left(\begin{array}{ll} u = x & dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx \\ du = dx & v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{array}\right) \\
&= -\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\ |_0^1 + \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\ |_0^1 \\
&- \frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\ |_1^2 + \frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\ |_1^2 \\
&= \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} \\
&= \begin{cases} \frac{4}{(2m+1)^2\pi^2}(-1)^m & n = 2m+1 \\ 0 & n = 2m \end{cases}
\end{aligned}
$$

これより

$$
u(x,t) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2}e^{-\frac{k(2m+1)^2\pi^2 t}{4}} \quad \boxed{終}
$$

2.　$f(x) = x(2-x)$ より

$$
f(x) = x(2-x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{2}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 x(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= -\frac{2x(2-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\ |_0^2 + \frac{2}{(n\pi)^2}\int_0^2 2(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\ |_0^2 \\
&= \frac{2}{(n\pi)^2}[\frac{4(1-x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\ |_0^2 + \frac{4}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= \frac{2}{n\pi}[-\frac{8}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\ |\ 0^2 \\
&= -\frac{16}{(n\pi)^3}(\cos n\pi - 1) \\
&= \frac{16}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n) \\
&= \begin{cases} \frac{16}{(2m+1)^3\pi^3}\cdot 2 & n = 2m+1 \\ 0 & n = 2m \end{cases}
\end{aligned}
$$

これより

$$
u(x,t) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2}e^{-\frac{k(2m+1)^2\pi^2 t}{4}} \quad \boxed{終}
$$

3.　$u(x,t)$ を棒の温度とすると，定常温度分布は $u_t = 0$ を満たす。つまりラプラス方程式 $u_{xx} = 0$ を満たす。よって棒の温度は

$$
u_x = c,\ u = cx + d
$$

で与えられる。ここで $u(0,t) = 10, u(1,t) = 90$ より

$$
u(0,t) = d = 10,\ u(1,t) = c + d = 90
$$

よって $c = 80, d = 10$。これより $u(x,t) = 80x + 10$。 終

4.

(a) t に対してラプラス変換をとると

$$\mathcal{L}u_{xx} = k\mathcal{L}u_t$$

より

$$U_{xx}(x,s) = k(sU(x,s) - u(x,0))$$

ここで $u(x,0) = f(x)$ より

$$U_{xx}(x,s) - ksU(x,s) = -kf(x),\ -\infty < x < \infty$$

これは x についての 2 階の線形微分方程式であるから，定数変化法を用いて解くことができる。

(b) $U_{xx}(x,s) - ksU(x,s) = 0$ の特性方程式は $m^2 - ks = 0$ より $m = \pm\sqrt{ks}$。よって余関数 $U_c(x,s)$ は

$$U_c(x,s) = c_1 e^{-\sqrt{ks}x} + c_2 e^{\sqrt{ks}x}$$

次に特殊解 $U_p(x,s)$ を定数変化法で求める。

$$U_p(x,s) = u_1 e^{-\sqrt{ks}x} + u_2 e^{\sqrt{ks}x}$$

より

$$\begin{aligned} u_1' e^{-\sqrt{ks}x} + u_2' e^{\sqrt{ks}x} &= 0 \\ u_1'(-\sqrt{ks})e^{-\sqrt{ks}x} + u_2'(\sqrt{ks})e^{\sqrt{ks}x} &= -kf(x) \end{aligned}$$

ここで Cramer の公式を用いると

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{\sqrt{ks}x} \\ -kf(x) & (\sqrt{ks})e^{\sqrt{ks}x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-\sqrt{ks}x} & e^{\sqrt{ks}x} \\ (-\sqrt{ks})e^{-\sqrt{ks}x} & (\sqrt{ks})e^{\sqrt{ks}x} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{kf(x)e^{\sqrt{ks}x}}{2\sqrt{ks}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{s}}f(x)e^{\sqrt{ks}x} \\ u_2' &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{s}}f(x)e^{-\sqrt{ks}x} \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{k}{s}}f(x)e^{\sqrt{ks}x}dx \\ u_2 &= -\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{k}{s}}f(x)e^{-\sqrt{ks}x}dx \end{aligned}$$

よって

$$U(x,s) = U_c + U_p$$

$$
\begin{aligned}
&= c_1 e^{-\sqrt{ks}x} + c_2 e^{\sqrt{ks}x} \\
&+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\sqrt{\frac{k}{s}}f(y)e^{\sqrt{ks}y}dy e^{-\sqrt{ks}x} \\
&- \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\sqrt{\frac{k}{s}}f(y)e^{-\sqrt{ks}y}dy e^{\sqrt{ks}x}
\end{aligned}
$$

ここで $U(x,s)$ は $|x| \to \infty$ で有界であるから $c_1 = c_2 = 0$。よって

$$
\begin{aligned}
U(x,s) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\sqrt{\frac{k}{s}}f(y)e^{\sqrt{ks}(y-x)}dy - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\sqrt{\frac{k}{s}}f(y)e^{-\sqrt{ks}(y-x)}dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\sqrt{\frac{k}{s}}f(y)e^{\sqrt{ks}(y-x)}dy - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\sqrt{\frac{k}{s}}f(y)e^{-\sqrt{ks}(y-x)}dy \\
&+ \int_{0}^{x}\sqrt{\frac{k}{s}}f(y)\sinh\sqrt{ks}(y-x)dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\sqrt{\frac{k}{s}}f(y)e^{\sqrt{ks}(y-x)}dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\sqrt{\frac{k}{s}}f(y)e^{\sqrt{ks}(y-x)}dy \\
&+ \int_{0}^{x}\sqrt{\frac{k}{s}}f(y)\sinh\sqrt{ks}(y-x)dy \quad \boxed{\text{終}}
\end{aligned}
$$

第8章　フーリエ変換

8.1　フーリエ変換

演習問題 8.1

1. $f(x)$ が $(0,\infty)$ で区分的に滑らかで，$\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty$ (絶対積分可能) のとき，次のことが成り立つことを示せ。
(a) $\mathcal{F}_s[f'(x)] = -\omega\mathcal{F}_c[f(x)]$
(b) $\mathcal{F}_c[f'(x)] = -f(0+) + \omega\mathcal{F}_s[f(x)]$
2. $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$ のとき，下の問いに答えよ。
(a) $f(x)$ のフーリエ変換を求めよ。
(b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin a\omega \cos\omega x}{\omega}d\omega$ を計算せよ。
(c) (b) の結果を用いて $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du$ を求めよ。
3.
(a) 積分方程式 $\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx = \begin{cases} 1-\omega & 0 \le \omega \le 1 \\ 0 & \omega > 1 \end{cases}$ を解け。
(b) (a) の結果を用いて $\int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2}du = \frac{\pi}{2}$ を示せ。
4. フーリエ積分公式を使って，次の各等式が成り立つことを示せ。
(a) $\int_0^\infty \frac{1-\cos a\omega}{\omega}\sin\omega x d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 < x < a \\ \frac{\pi}{4}, & x = a \\ 0, & x > a \end{cases}$
(b) $\int_0^\infty \frac{\sin\pi\omega \sin\omega x}{1-\omega^2}d\omega = \begin{cases} \frac{\pi\sin x}{2}, & |x| \le \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$

解答

1(a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s[f'(x)] &= \int_0^\infty f'(x)\sin\omega x dx \quad \begin{pmatrix} u = \sin\omega x & dv = f'(x) \\ du = \omega\cos\omega x & v = f(x) \end{pmatrix} \\
&= f(x)\sin\omega x \,|_0^{\infty-} - \omega\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx \\
&= \lim_{x\to\infty} f(x)\sin\omega x - \omega\mathcal{F}_c[f(x)] \\
&= -\omega\mathcal{F}_c[f(x)] \quad \boxed{終}
\end{aligned}$$

(b)

$$\mathcal{F}_c[f'(x)] = \int_0^\infty f'(x)\cos\omega x dx \quad \begin{pmatrix} u = \cos\omega x & dv = f'(x) \\ du = -\omega\sin\omega x & v = f(x) \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(x)\cos\omega x \,|_0^{\infty-} + \omega\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx \\
&= \lim_{x\to\infty} f(x)\cos\omega x - \lim_{x\to 0+} f(x)\cos\omega x + \omega\mathcal{F}_s[f(x)] \\
&= -f(0+) + \omega\mathcal{F}_c[f(x)] \quad \boxed{終}
\end{aligned}
$$

2(a)

$$
\begin{aligned}
F[\omega] = \mathcal{F}\{f\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= \int_{-a}^{a} e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega x} \,|_{-a}^{a} \\
&= \frac{1}{-i\omega}(e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}) \\
&= \frac{1}{i\omega}(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}) \\
&= \frac{2}{\omega}(\frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{2i}) \\
&= \frac{2}{\omega}\sin\omega a \quad \boxed{終}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F[\omega]e^{i\omega x}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\omega a}{\omega}e^{i\omega x}d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega a(\cos\omega x + i\sin\omega x)}{\omega}d\omega
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\sin\omega a\sin\omega x}{\omega}$ は ω について奇関数より，

$$
f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega a\cos\omega x}{\omega}d\omega
$$

よって

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega a\cos\omega x}{\omega}d\omega = \begin{cases} \pi, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad \boxed{終}
$$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega a\cos\omega x}{\omega}d\omega$ において $a = 1, x = 0$ とおくと

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega = \pi
$$

よって

$$
\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2} \quad \boxed{終}
$$

3(a) $F_c(\omega)=\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x d\omega$ よりフーリエ積分公式を用いると

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F_c(\omega)\cos\omega x d\omega \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{1}(1-\omega)\cos\omega x d\omega \quad \begin{pmatrix} u=1-\omega & dv=\cos\omega x d\omega \\ du=-d\omega & v=\frac{\sin\omega x}{x} \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{\pi}[(1-\omega)\frac{\sin\omega x}{x}\mid_0^1+\frac{1}{x}\int_0^1\sin\omega x d\omega] \\
&= \frac{2}{\pi}[\frac{1}{x}(-\frac{1}{x})\cos\omega x\mid_0^1] \\
&= \frac{2}{\pi}[-\frac{1}{x^2}(\cos x-1)] \\
&= \frac{2}{\pi x^2}(1-\cos x) \quad \boxed{終}
\end{aligned}$$

(b) (a) の結果より

$$\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi x^2}(1-\cos x)\cos\omega x dx=\begin{cases} 1-\omega & 0\leq\omega\leq 1 \\ 0 & \omega>1 \end{cases}$$

ここで $\omega\to 0$ ととると

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=1$$

よって

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$$

なお $1-\cos x=2\sin^2 x/2$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx &= \int_0^{\infty}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}dx \quad \begin{pmatrix} u=\frac{x}{2} \\ du=\frac{1}{2}dx \end{pmatrix} \\
&= \int_0^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du \quad \boxed{終}
\end{aligned}$$

4(a) $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0<x<a \\ \frac{\pi}{4}, & x=a \\ 0, & x>a \end{cases}$ とおき，奇関数拡張する。つまり

$$\begin{aligned}
F_s(\omega) &= \int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x dx=\int_0^{a}\frac{\pi}{2}\sin\omega x dx \\
&= \frac{-\pi}{2\omega}\cos\omega x\mid_0^a=\frac{\pi}{2\omega}(1-\cos\omega a)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\pi}{2\omega}(1-\cos\omega a)\sin\omega x d\omega \\
&= \int_0^{\infty}\frac{1-\cos\omega a}{\omega}\sin\omega x d\omega \quad \boxed{終}
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi \sin x}{2}, & |x| < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ とおくと，$f(x)$ は奇関数。よってフーリエ積分公式より

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx = 0 \\
B(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi \sin x}{2} \sin \omega x dx \\
&= \pi \int_0^{\pi} \frac{\cos(\omega - 1)x - \cos(\omega + 1)x}{2} dx \\
&= \frac{\pi}{2} [\frac{\sin(\omega - 1)x}{\omega - 1} - \frac{\sin(\omega + 1)x}{\omega + 1} |_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{2} [\frac{\sin(\omega - 1)\pi}{\omega - 1} - \frac{\sin(\omega + 1)\pi}{\omega + 1}] \\
&= \frac{\pi}{2} [\frac{-\sin \omega\pi}{\omega - 1} + \frac{\sin \omega\pi}{\omega + 1}] \\
&= \frac{\pi}{2} [\frac{-2 \sin \omega\pi}{\omega^2 - 1}] = \frac{\pi \sin \omega\pi}{1 - \omega^2}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\pi \sin \omega\pi}{1 - \omega^2} \sin \omega x d\omega \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi\omega \sin \omega x}{1 - \omega^2} d\omega
\end{aligned}$$

終

8.2　偏微分方程式への応用

演習問題 8.2

1. フーリエ変換を用いて，1 次元熱伝導方程式を解け。

$$\begin{aligned}
u_t &= 2u_{xx} \quad (0 < x < \infty,\ t > 0) \\
u(0, t) &= 0,\ u(x, 0) = \begin{cases} 25x, & 0 < x < 4 \\ 0, x > 4 & \end{cases}
\end{aligned}$$

2. フーリエ変換を用いて，1 次元波動方程式

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0)$$

$$u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty)$$

の解が $u(x, t) = \frac{1}{2}\{f(x + ct) + f(x - ct)\}$ で与えられることを示せ。

3. フーリエ変換を用いて，次の境界値問題を解け。

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= c^2 u_{xx} \quad (0 < x < \infty,\ t > 0) \\
u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0 \\
u_x(0, t) &= f(t)
\end{aligned}$$

4.　フーリエ変換を用いて，次の境界値問題を解け。

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (-\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty)$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$x^2 + y^2 \longrightarrow \infty \ \Rightarrow \ u(x,y) \longrightarrow 0.$$

解答 1.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s[u_{xx}] &= -\omega \mathcal{F}_c[u_x] \\
&= -\omega[-u(0,t) + \omega \mathcal{F}_s[u]] \\
&= -\omega^2 \mathcal{F}_s[u] = -\omega^2 U_s(\omega,t)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_s[u_t] = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_s[u] = \frac{\partial}{\partial t}U_s(\omega,t)$$

これより，$u_t = 2u_{xx}$ の両辺にフーリエ変換を施すと

$$\frac{\partial}{\partial t}U_s(\omega,t) = -2\omega^2 U_s(\omega,t)$$

この式は t について 1 階線形なので，

$$U_s(\omega,t) = C_\omega e^{-2\omega^2 t}$$

を得る。ここで，初期条件 $u(x,0) = 25x$ を用いると

$$\mathcal{F}_s[u(x,0)] = U_s(\omega,0) = C_\omega$$

また

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s[u(x,0)] &= \mathcal{F}_s[25x] = \frac{2}{\pi}\int_0^4 25x \sin\omega x dx \\
&= \frac{50}{\pi}\left\{\left[\frac{-x\cos\omega x}{\omega}\right]_0^4 + \frac{1}{\omega}\int_0^4 \cos\omega x dx\right\} \\
&= \frac{50}{\pi}\left\{\frac{-4\cos 4\omega}{\omega} + \left[\frac{\sin\omega x}{\omega^2}\right]_0^4\right\} \\
&= \frac{50}{\pi}\left[\frac{-4\cos 4\omega}{\omega} + \frac{\sin 4\omega x}{\omega^2}\right]
\end{aligned}$$

よって，

$$U_s(\omega,t) = \frac{50}{\pi}\left[\frac{-4\omega\cos 4\omega + \sin 4\omega}{\omega^2}\right] e^{-2\omega^2 t}$$

ここでフーリエ反転公式を用いると

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty U_s(\omega,t)\sin\omega x dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{50}{\pi}\left[\frac{-4\omega\cos 4\omega + \sin 4\omega}{\omega^2}\right] e^{-2\omega^2 t}\sin\omega x d\omega \\
&= \frac{100}{\pi^2}\int_0^\infty \left[\frac{-4\omega\cos 4\omega + \sin 4\omega}{\omega^2}\right] e^{-2\omega^2 t}\sin\omega x d\omega
\end{aligned}$$

2.

$$\mathcal{F}[u_{tt}] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\omega, t)$$

$$\mathcal{F}[u_{xx}] = (i\omega^2)U(\omega, t) = -\omega^2 U(\omega, t)$$

より偏微分方程式 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ は次の常微分方程式に変換される。

$$\frac{d^2}{dt^2} U(\omega, t) + c^2\omega^2 U(\omega, t) = 0$$

この式は t について線形で，特性根は $\pm ic\omega$ なので

$$U(\omega, t) = A_\omega \cos c\omega t + B_\omega \sin c\omega t$$

と表わせる。ここで $u(x, 0) = f(x)$ より

$$\mathcal{F}[u(x, 0)] = U(\omega, 0) = F(\omega) = A_\omega$$

また $u_t(x, 0) = 0$ より

$$\mathcal{F}[u_t(x, 0)] = \frac{\partial}{\partial t} U(\omega, 0) = c\omega B_\omega = 0$$

よって，

$$U(\omega, t) = F(\omega) \cos c\omega t$$

を得る。ここで，反転公式を用いて，$u(x, t)$ を求めると，

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cos c\omega t e^{i\omega x}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\left(\frac{e^{ic\omega t}+e^{-ic\omega t}}{2}\right)e^{i\omega x}d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\left(e^{i\omega(x+ct)}+e^{i\omega(x-ct)}\right)d\omega \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega(x+ct)}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-ct)}d\omega\right) \\
&= \frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct))
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c[u_{xx}] &= -u_x(0,t) + \omega\mathcal{F}_s[u_x] \\
&= -f(t) - \omega^2\mathcal{F}_c[u] = -f(t) - \omega^2 U_c(\omega,t)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_c[u_{tt}] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_c(\omega, t)$$

これより，$u_{tt} = c^2 u_{xx}$ の両辺にフーリエ変換を施すと

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U_c(\omega, t) + c^2\omega^2 U_c(\omega, t) = -c^2 f(t)$$

この式は t について 1 階線形なので，余関数は

$$U_{cc}(\omega, t) = A_\omega \cos c\omega t + B_\omega \sin c\omega t$$

また，特殊解は

$$U_{cp} = v_1 \cos c\omega t + v_2 \sin c\omega t$$

定数変化法を用いると

$$v_1' \cos c\omega t + v_2' \sin c\omega t = 0$$

$$v_1'(-c\omega \sin c\omega t) + v_2'(c\omega \cos c\omega t = -c^2 f(t)$$

と表わせる。これより，

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin c\omega t \\ -c^2 f(t) & c\omega \cos c\omega t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos c\omega t & \sin c\omega t \\ -c\omega \sin c\omega t & c\omega \cos c\omega t \end{vmatrix}} = \frac{c^2 f(t) \sin c\omega t}{c\omega}$$

よって，

$$v_1 = \frac{1}{\omega} \int^t f(x) \sin c\omega x dx$$

同様にして，

$$v_2 = -\frac{1}{\omega} \int^t f(x) \cos c\omega x dx$$

を得る。これより，

$$\begin{aligned} U_c(\omega, t) &= U_{cc}(\omega, t) + U_{cp}(\omega, t) \\ &= \left(A_\omega + \frac{1}{\omega} \int^t f(x) \sin c\omega x dt \right) \cos c\omega t \\ &+ \left(B_\omega - \frac{1}{\omega} \int^t f(x) \cos c\omega x dt \right) \sin c\omega t \end{aligned}$$

ここで，$u(x, 0) = 0$ より

$$\mathcal{F}_c[u(x, 0)] = U_c(\omega, 0) = A_\omega = 0$$

$$\mathcal{F}_c[u_t(x, 0)] = \frac{\partial}{\partial t} U_c(\omega, 0) = -\frac{1}{\omega} f(0) + c\omega B_\omega = 0$$

これより，

$$B_\omega = \frac{f(0)}{c\omega^2}$$

したがって，

$$U_c(\omega, t) = \frac{f(0))}{c\omega^2} \sin c\omega t$$

ここで，反転公式を用いて，$u(x, t)$ を求めると，

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty U_c(\omega, t) \cos \omega x d\omega \\ &= \frac{2f(0)}{c\pi} \int_0^\infty \frac{\sin c\omega t \cos c\omega t}{\omega^2} d\omega \end{aligned}$$