微分積分学入門演習書

横田 壽

第 0 章

序章 (INTRODUCTION)

0.1 数 (NUMBERS)

確認問題

1. 次の数は有理数か無理数か答えよう．

(a) $\dfrac{4}{7}$ (b) $\dfrac{\pi}{4}$

2. 次の数の絶対値を求めよう．

(a) -3.0 (b) π

3. $a=2,\ b=-3,\ c=-5$ のとき，次の値を求めよう．

(a) $|a+b+c|$ (b) $|a-b+c|$

4. 次の値を求めよう．

(a) $9^{\frac{3}{2}}$ (b) $27^{-\frac{1}{3}}$

5. $a>0,\ n$ を整数とするとき，次の式を簡単にしよう．

(a) $\sqrt[4]{a^5}$ (b) $\sqrt{a^{-2}\sqrt[3]{a}}$ (c) $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a^{-2}}\div a^{\frac{1}{6}}$

6. 次の式を簡単にしよう．

(a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{72}$ (b) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$ (c) $(4\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+3\sqrt{3})$

7. 次の分母または分子を有理化しよう．

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2}}$ (c) $\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}$

0.2 不等式

確認問題

1. 次の不等式を解こう．

(a) $2+3x\leq 5$ (b) $\dfrac{1}{2}(1+x)<\dfrac{1}{3}(1-x)$ (c) $4(x^2-3x+2)>0$

(d) $\dfrac{1}{x} < x$　　(e) $\dfrac{x^2 - 9}{x + 1} > 0$　　(f) $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{4}{x - 6} > 0$

2. どちらが大きいか比較しよう.

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}},\ \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$$

3. 次の不等式を解こう.

(a) $|x| < 2$　　(b) $|x + 2| < \dfrac{1}{4}$　　(c) $0 < |x - 3| < 8$　　(d) $|2x + 5| > 3$

4. 全ての実数 a, b に対して,

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

が成り立つことを示そう.

第 1 章

関数 (FUNCTIONS)

1.1 関数の定義 (definition of function)

確認問題

1. x の値が 1 のとき $f(x)$ の値を求めよう．

(a) $f(x) = |2 - x|$

(b) $f(x) = 4 + 10x - x^2$

(c) $f(x) = 1 + \cos(x - 1)$

2. 次の関数の定義域と値域を求めよう．

(a) $f(x) = x^2 - 1$ (b) $g(x) = \sqrt{1 - x}$ (c) $h(x) = |\sin x|$

3. $y = \frac{1}{x}$ および $y = \sqrt{x}$ のグラフをもとに次の関数のグラフの概形を描こう．

(a) $y = \dfrac{1}{x} + 1$ (b) $y = \sqrt{1 - x}$

4. 次の関数 $f(x), g(x)$ について，$(f \circ g)(x)$ と $g(f(x))$ を求めよう．

(a) $f(x) = 2x + 5,\ g(x) = x^2$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = \dfrac{1}{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x + 1},\ g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

5. 次の関数は 1 対 1 の関数か調べ，もしそうならば，逆関数を求めよう．

(a) $f(x) = 7x - 4$ (b) $f(x) = (x + 1)^3 + 2$ (c) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

6 関数 $f(x)$ は，$x \in D(f)$ で，$f(-x) = f(x)$ を満たすとき**偶関数 (even function)** であるといい，$f(-x) = -f(x)$ を満たすとき**奇関数 (odd function)** であるといいます．次の関数は偶関数か奇関数か調べよう．

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = x(x^2 + 1)$

演習問題

1. 次の規則は 1 価関数か多価関数か調べよう．

(a) $y^2 = x,\ x > 0$　(b) $y^3 = x^2$

2. 次の関数の定義域を求め，$f(x)$ のグラフを描こう．

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$　(b) $h(x) = \sqrt{\dfrac{4x^2 - 3x^3}{6x^2 + 3x}}$

3. 次の関数 $f(x), g(x)$ について，$(f \circ g)(x)$ と $g(f(x))$ を求めよう．

(a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x^2 + 1$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ 1 + x, & x \geq 1 \end{cases}$

4. 次の関数の逆関数を求めよう．

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x + 2},\ -2 < x$　(b) $f(x) = x^2 + 4x - 2$

5. 次の関数は偶関数か奇関数か調べよう．

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - |x|}$　(b) $f(x) = \sin x$

6. 次の問いに答えよう．

(a) 偶関数と偶関数の積と偶関数と奇関数の積はどうなるか．

(b) 偶関数の特徴と奇関数の特徴について述べよう．

1.2 初等関数 (elementary functions)

確認問題

1. 次の角を弧度法を用いて表そう．

(a) 30°　(b) 40°　(c) 72°

2. 次の直線と x 軸とのなす角を求めよう．ただし，$0 \leq \theta < \pi$．

(a) $y = \sqrt{3}x$　(b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

3. 単位円を利用して，次の不等式を解こう．ただし，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ とします．

(a) $\cos\theta > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(b) $\sqrt{3}\tan\theta > 1$　(c) $1 < 2\sin\theta \leq \sqrt{2}$

4. 次の値を求めよう．

(a) $\tan^{-1} 0$　(b) $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}$　(c) $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{2}\right)$

演習問題

1. 任意の角 α, β に対して，次の公式が成り立つことを示そう．

(a) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$　(加法定理)

(b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$　(複号同順)

(c) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{2}$　(半角の公式)

(d) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$　(積から和への公式)

(e) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$　(和から積への公式)

2.　次の値を求めよう．

(a) $\cos\dfrac{5\pi}{4}$　(b) $\sin\dfrac{7\pi}{12}$　(c) $\cos\dfrac{\pi}{8}$

3.　次の値を求めよう．

(a) $\sin^{-1}(\dfrac{-1}{2})$　(b) $\cos^{-1}(-1)$　(c) $\tan^{-1}(-1)$　(d) $\tan^{-1}\sqrt{3}$

4.　全ての x において，$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示そう．

5.　次の公式を導こう．

(a) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$　(b) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

1.3　**関数の極限** (limit of function)

確認問題

1.　次の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(2x-1)$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+1)}{2x}$　(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{2x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$　(f) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$　(g) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-3x-4)^2}{x-4}$

(h) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t+3}-\frac{1}{3}\right)$　(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\left(1-\frac{x+1}{x}\right)$

2.　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を用いて次の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$　(d) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$

演習問題

1.　次の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^2+4x)$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x^4-6x^3+x^2+2}{x-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}$　(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/3}-(1-x)^{1/3}}{x}$　(g) $\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)$，ただし $f(x) = \begin{cases} x^2, & x\neq 2 \\ 3, & x=2 \end{cases}$

2.　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を用いて次の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$　(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$

3.　$\lim_{x\to a}|f(x)| = 0$ ならば，$\lim_{x\to a}f(x) = 0$ を示そう．

1.4 連続関数 (continuous functions)

確認問題

1. 次の関数の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2-}\frac{x-2}{|x-2|}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2+}\frac{x-2}{|x-2|}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1-}\sqrt{|x|-x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\sqrt{|x|-x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1-}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to 2+}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-2}$

2. 次の関数は指定された点で連続か調べよう．もし，連続でないならば，真性不連続点か除去可能な不連続点か調べよう．

(a) $f(x)=\left[\begin{cases} x^2+4, & x<2 \\ x^3, & x\geq 2\end{cases}\right];\ x=2,$ (b) $f(x)=\left[\begin{cases} x^2+4, & x<2 \\ 5, & x=2 \\ x^3, & x>2\end{cases}\right];\ x=2,$

(c) $f(x)=\left[\begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & x\neq -1 \\ -2, & x=-1\end{cases}\right];\ x=-1,$

(d) $f(x)=\left[\begin{cases} -x^2, & x<0 \\ 1-\sqrt{x}, & x\geq 0\end{cases}\right];\ x=0,$

3. 次の関数が $x=1$ で連続になるように，$f(1)$ を定義しよう．

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ (b) $f(x)=\left[\begin{cases} 2x^2+1, & x<1 \\ x^3, & x>1\end{cases}\right]$

3. 2 分法を用いて $f(x)=7x-6=0$ の近似値を区間 $[0,1]$ において誤差 0.1 以内で求めよう．

演習問題

1. 次の関数の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\cos\frac{1}{x}$

2. $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}, & x\neq 2 \\ 3, & x=2\end{cases}$ は $x=2$ で連続か調べよう．

3. $f(x)=\sqrt{x}$ は区間 $[0,\infty)$ で連続であることを示そう．

4. 次の関数の最大値と最小値を求めよう．

(a) $f(x)=x^2-3x+1,\ x\in[-2,1]$ (b) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in(0,1]$

(c) $f(x)=x^2-ax,\ x\in[0,2]$

5. $2\sin x-x=0$ は $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内に実数解を持つことを証明しよう．

1.5　数列 (sequences)

確認問題

1.　次の数列の極限を求めよう．

(a)　$\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}$　(b)　$\{a_n\} = \{\dfrac{n+1}{n^2}\}$　(c) $\{a_n\} = \{\dfrac{n^2}{n+1}\}$

(d)　$\{a_n\} = \{\dfrac{2^n - 1}{2^n}\}$　(e)　$\{a_n\} = \{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\}$

2.　次の数列は有界か調べよう．また，単調性についても調べよう．

(a)　$\{a_n\} = \{\dfrac{2}{n}\}$　(b)　$\{a_n\} = \{\sqrt{4 - \dfrac{1}{n}}\}$

3.　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう．

(a)　$a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}a_n,\ n \geq 1$　(b)　$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2,\ n \geq 1$

(c)　$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2n + 1,\ n \geq 1$

演習問題

1.　次の数列の極限を求めよう．

(a)　$\{a_n\} = \{n^4 - 3n^3\}$　(b)　$\{a_n\} = \{\dfrac{3n^2 + 5}{4n^3 - 1}\}$　(c)　$\{a_n\} = \{\dfrac{1-n}{n - \sqrt{n}}\}$

(d)　$\{a_n\} = \{\dfrac{n(n+2)}{n+1} - \dfrac{n^3}{n^2+1}\}$　(e)　$\{a_n\} = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$

2.　$a > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ を証明しよう．

3.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ を用いて次の極限値を求めよう．

(a)　$a > b > 0$ のとき，$\{(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}\}$　(b)　$\{a_n\} = \{(1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}\}$

1.6　オイラー e(Euler e) と超越関数

確認問題

1.　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ は収束するか判定しよう．また，収束する場合は，極限値を求めよう．

(a)　$a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{1}{e}a_n,\ n \geq 1$　(b)　$a_1 = 1, a_{n+1} = 2^{n+1}a_n$

(c)　$a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}a_n$

2.　表より，次の値を求めよう．

(a) $\log 20$

(b) $\log 16$

(c) $\log 3^4$

(d) $\log 0.1$

(e) $\log\sqrt{630}$

(f) $\log 0.4$

n	$\log n$	n	$\log n$
1	0.00	6	1.79
2	0.69	7	1.95
3	1.10	8	2.08
4	1.39	9	2.20
5	1.61	10	2.30

3. 次の方程式の解を求めよう.

(a) $\log x = 2$　(b) $\log x = -1$　(c) $(2 - \log x)\log x = 0$

(d) $\log(2x+1)(x+2) = 2\log(x+2)$

演習問題

1. 次の数列は有界か調べよう.

(a) $2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^n, \cdots$　(b) a_n は $\sqrt{2}$ の小数第 n 位までとった近似値.

2. 次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよう.

(a) $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$　(b) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}a_n}$

3. 次の数列の極限値を求めよう.

(a) $a_n = (1 - \dfrac{1}{n^2})^n$　(b) $a_n = (1 + \dfrac{2}{n})^n$　(c) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

(d) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

4. 次の極限値を求めよう.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$　(b) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\log x - \log a}{x - a}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$　(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x$

5. 算術平均 $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ と幾何平均 $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ で定義された数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について以下の問に答えよう.

(a) $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は収束することを示そう.

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ を示そう.

1.7 *実数の連続性 (continium)

1.7.1 演習問題

1. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続で $f(a) \overset{<}{(>)} c$ ならば, $x = a$ の十分近くで $f(x) \overset{<}{(>)} c$ であることを示してみよう.

第 2 章

微分法 (DEFFERENTIATION)

2.1 導関数 (derivatives)

確認問題

1. 次の関数の導関数を定義に基づいて求めよう．

(a) $f(x) = c$ (b) $f(x) = \sqrt{x-1}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

2. 次の関数の $x = 2$ での微分係数を定義に基づいて求めよう．

(a) $f(x) = 5x - x^2$ (b) $f(x) = (3x-7)^2$

3. 次の曲線上の与えられた a に対応する点における接線の方程式を求めよう．

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 3,\ a = 2$ (b) $f(x) = 5 - x^3,\ a = 2$ (c) $f(x) = \sqrt{x},\ a = 4$

4. 次の関数の導関数を求めよう．

(a) $y = 11x^5 - 6x^3 + 8$ (b) $y = -\dfrac{1}{x^2}$ (c) $y = (x^2-1)(x-3)$

(d) $y = \dfrac{x-1}{x-2}$ (e) $y = \dfrac{x^2-1}{2x+3}$ (f) $y = \dfrac{6-1/x}{x-2}$ (g) $y = \dfrac{1+x^4}{x^2}$

演習問題

1. 次の関数の導関数を定義に基づいて求めよう．

(a) $f(x) = \cos 3x$ (b) $f(x) = (x+2)^n$ (n : 整数)

2. 次の関数の微分を求めよう．

(a) $f(x) = x^4$ (b) $f(x) = e^x$

3. 次の関数の $x = 0$ における右側微分係数，および左側微分係数を求めよう．

(a) $f(x) = |x^2 + x|$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (c) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$

4. 次の関数の導関数を求めよう．

(a) $y = \dfrac{3x-1}{x^2+1}$ (b) $y = \sec x$ (c) $y = \mathrm{cosec} x$ (d) $y = \cot x$

(e) $y = x^2 e^x$　(f) $y = e^x \sin x$　(g) $y = \dfrac{e^x}{\sin x}$

2.2 導関数の計算 (calculation of derivatives)

確認問題

1. 次の関数の導関数を逆関数の微分法を用いて求めよう.

(a) $y = x^{\frac{1}{n}},\ x > 0$　(b) $y = \sqrt{x},\ x > 0$

2. 次の関数の導関数を求めよう.

(a) $y = (x^2+1)^{2004}$　(b) $y = (x^2 + \dfrac{1}{x^2})^3$　(c) $y = [(2x+1)^2 + (x+1)^2]^3$

3. $\frac{dy}{dx}$ を求めよう.

(a) $x = t+1, y = t^2 - 1$　(b) $x^2 + y^2 = 1$

4. 次の関数の導関数を求めよう.

(a) $x^2 \log x$　(b) $x^3 \sin 2x$　(c) $\sin^{-1}(2x)$　(d) $\sqrt{e^x + 1}$　(e) $(\sin(x+1))^3$

(f) $x \sin^{-1}(2x)$

演習問題

1. 次の関数の導関数を逆関数の微分法を用いて求めよう.

(a) $y = \cos^{-1} x$　(b) $y = \tan^{-1} x$

2. 次の関数の導関数を対数微分法を用いて求めよう.

(a) $y = x^2 \sqrt{\dfrac{x^3+2x+1}{x^2-3x+1}}$　(b) $y = x^x$　(c) $y = \sin(x^x)$　(d) $y = x^{1/x}$

3. $\frac{dy}{dx}$ を求めよう.

(a) $x = a\cos t, y = a \sin t,\ a > 0$　(b) $x = \sqrt{t} - \dfrac{1}{t}, y = t + \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

4. 次の関数の導関数を求めよう.

(a) $x^2(1+\sqrt{x})$　(b) $x^3 \tan 2x$　(c) $x \sin^{-1} x$　(d) $\dfrac{x}{x^2+1}$　(e) $x \sin x$

(f) $x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$　(g) $\tan^{-1}(x^2+1)$　(h) $\cos(\sqrt{2x+1})$

(i) $\dfrac{\sin x - x\cos x}{x \sin x + \cos x}$　(j) $e^{2x}\cos x$　(k) $\log|x + \sqrt{x^2+A}|$　(l) $y = \sin(x^2+1)$

(m) $y = \cos(\sqrt{x+1})$　(n) $y = e^{\sin x}$

2.3 高次導関数 (higher-order derivatives)

確認問題

1.　物体の運動が次の式で表されるとき，初期値 $t_0 = 0$ での位置，速度，加速度と速さを求めよう．

(a)　$y(t) = 4 + 3t - t^2$　　(b)　$y(t) = t^3 - 6t$　　(c)　$y(t) = \dfrac{18}{t+2}$

2.　次の関数の第 2 次導関数を求めよう．

(a)　$f(x) = \sqrt{x^2+1}$　　(b) $f(x) = x\log x$　　(c)　$f(x) = e^x \sin x$

演習問題

1.　次の公式が成り立つことを示そう．

(a)　$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$　　(b)　$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

(c)　$[(1+x)^{\alpha}]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

2.　次の関数の第 n 次導関数を求めよう．

(a)　$f(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$　　(b)　$f(x) = x^2\sin x$　　(c)　$f(x) = e^x \sin x$

2.4　平均値の定理と関数の性質 (mean-value theorem and properties of functions)

確認問題

1.　次の関数は与えられた区間上で平均値の定理の条件を満たすことを示し，平均値の定理における ξ の値を求めよう．

(a)　$f(x) = x^2,\ [1,2]$　　(b)　$f(x) = x^3,\ [1,3]$　　(c)　$f(x) = \sqrt{1-x^2},\ [0,1]$

2.　次の関数の増減表，凹凸，極値，変曲点を調べよう．

(a)　$f(x) = x^3 - 3x + 2$　　(b)　$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$　　(c) $f(x) = x(x+1)(x+2)$

(d)　$f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$　　(e)　$f(x) = |x-1||x+2|$

3.　次の問いに答えよう．

(a)　$x + y = 40$ のとき，xy の最大値を求めよ．

(b)　正四角形の 2 頂点が $y = 4 - x^2$ 上にあり，残りの 2 頂点が x 軸上にあるとき，正四角形の面積の最大値を求めよ．

(c)　半径 4 の円に内接する正四角形の面積の最大値を求めよ．

(d) 楕円 $x^2 + 2y^2 = 2$ と直線 $x + y = 6$ の最短距離を求めよ．

演習問題

1.　Rolle または平均値の定理における ξ の値を，次の関数と区間について求めよう．

(a) $f(x) = x^3 - x^2,\ [-1, 1]$　(b) $f(x) = \sin^{-1} x,\ [0, 1]$　(c) $f(x) = \log x,\ [1, e]$

2. $f(x) = x - \tan x$ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ で狭義の単調減少関数となることを示そう．

3. 次の不等式を証明しよう．

(a) $x > 0$ のとき，$\frac{x}{1+x} < \log(1+x)$　(b) $x > 0$ のとき，$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x$

(c) $e^\pi > \pi^e$

4. 次の関数の極値および凹凸を調べグラフの概形を求めよう．

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$　(b) $f(x) = x^2 e^{-x}$

2.5 曲線の概形 (curve sketching)

確認問題

1. 次の曲線の漸近線を求めよう．

(a) $f(x) = \frac{x}{3x-1}$　(b) $y = \frac{x^2}{x-2}$　(c) $y = \frac{2x}{x^2-9}$

2. 次の曲線は垂直接線または**垂直カスプ (尖点)** を持っているか判断しよう．垂直接線とは，点 $(c, f(c))$ において，$x \to c$ のとき，$f'(x) \to \infty$ または $-\infty$ が成り立つことであり，垂直カスプとは，$f'(c-0) = \pm\infty$ で $f'(c+0) = \mp\infty$ が成り立つことである．

(a) $f(x) = x^{1/3}$　(b) $f(x) = x^{2/3}$　(c) $f(x) = \sqrt{|x-2|}$

演習問題

1. 次の曲線の概形を描いてみよう．

(a) $y = \frac{1}{1+e^x}$　(b) $y = \frac{1-x}{1+x}$

2. 次の曲線の概形を描いてみよう．

(a) $r = a\cos\theta,\ a > 0$　円 (circle)

(b) $r = 3\theta$, **アルキメデスの渦線 (spiral)**

(c) $r^2 = 4\cos 2\theta$　**ベルヌーイのラムニスケイト (lemniscate)**

2.6 不定形の極限値 (limit of indeterminate forms)

確認問題

1. 次の極限値を求めよう．

(a) $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$　(b) $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{1-x}$　(c) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$　(d) $\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x}$　(f) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+1}$　(g) $\lim_{x\to\infty} \frac{2\sin x}{x}$　(h) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

演習問題

1. 次の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1} x}{x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x})$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^{\cos x}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x})^{1/x}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{\sin x}}$

2.7 Taylor の定理 (Taylor's theorem)

2.7.1 演習問題

1. 次の MacLaurin 展開が成り立つことを示そう．

(a) $\displaystyle\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\ ,\ (-\infty < x < \infty)$

(b) $\displaystyle\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\ ,\ (-1 < x \leq 1))$

(c) $\displaystyle(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$
ただし，$(-1 < x < 1)$

(d) $\displaystyle\tan^{-1} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\ (-1 < x < 1)$

2. 次の極限値を Landau の記号を用いて求めてみよう．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}$

3.

(a) 演習問題 1(d) より，$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}(1) = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots$ を得ることができる．これを用いて，プログラムを組み π を小数点以下 2 桁まで求めてみよう．

(b) $\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}(\frac{1}{5})-\tan^{-1}(\frac{1}{239})$ と表した式を **Machin の公式**という．この公式を用いて π を小数点以下 100 桁まで求めてみよう．

第 3 章

積分法 (INTEGRATION)

3.1 不定積分 (indefinite integrals)

確認問題

1. 次の積分を求めよう.

(a) $\int (2x-3)dx$ (b) $\int 5x^4 dt$ (c) $\int \sqrt[3]{x^2}dx$ (d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

(e) $\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$ (f) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$ (g) $\int \sin^2 x dx$ (h) $\int \frac{1}{x^2-4}dx$

(i) $\int \frac{1}{x^2+4}dx$

演習問題

1. 次の積分を求めよう.

(a) $\int (3x^{-3}+4x^5)dx$ (b) $\int (t^3+\frac{1}{t^2+1})dt$ (c) $\int -2\tan^2 x dx$

(d) $\int \frac{x^3+1}{\sqrt{x}}dx$ (e) $\int \frac{x^2+5}{x^2+4}dx$ (f) $\int \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}dt$ (g) $\int \cos^2 x dx$

(h) $\int \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}dt$ (i) $\int \frac{1}{4-x^2}dx$

3.2 置換積分法 (integration by substitution)

確認問題

1. 次の積分を求めよう.

(a) $\int \sin 2x \ dx$ (b) $\int \frac{x}{x^2+1} \ dx$ (c) $\int e^{2x} \ dx$ (d) $\int \frac{1}{x\log x} \ dx$

(e) $\displaystyle\int xe^{x^2}\ dx$　(f) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos x\ dx$　(g) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\ dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\ dx$　(i) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\ dx$

演習問題

1. 次の積分を求めよう.

(a) $\displaystyle\int e^{2-x}\ dx$　(b) $\displaystyle\int \sec^2(1-x)\ dx$　(c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$　(d) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\ dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\ dx$　(f) $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{3\tan\theta+1}}\ d\theta$　(g) $\displaystyle\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 x}\ dx$　(h) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\ dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\ dx$　(j) $\displaystyle\int x\sin(x^2)\ dx$

3.3 部分積分法 (integration by parts)

確認問題

1. 次の不定積分を求めよう.

(a) $\displaystyle\int xe^x\ dx$　(b) $\displaystyle\int x\sin x\ dx$　(c) $\displaystyle\int xe^{2x}\ dx$　(d) $\displaystyle\int x^2e^x\ dx$

(e) $\displaystyle\int x^2\sin x\ dx$　(f) $\displaystyle\int x^5e^{x^3}\ dx$　(g) $\displaystyle\int x\cos x\ dx$

演習問題

1. 次の不定積分を求めよう.

(a) $\displaystyle\int x\log x\ dx$　(b) $\displaystyle\int x^2e^{-x}\ dx$　(c) $\displaystyle\int (\log x)^2\ dx$

(d) $\displaystyle\int x(x+5)^{14}\ dx$　(e) $\displaystyle\int x^2\cos x\ dx$　(f) $\displaystyle\int e^x\sin x\ dx$

(g) $\displaystyle\int \log(1+x^2)\ dx$　(h) $\displaystyle\int x\tan^{-1}x\ dx$　(i) $\displaystyle\int x^n\log x\ dx$　(n は整数)

(j) $\displaystyle\int x^3\sin x\ dx$　(k) $\displaystyle\int x\sinh x\ dx$

3.4 有理関数の積分法 (integration of rational functions)

確認問題

1. 次の関数を部分分数分解しよう.

(a) $f(x) = \dfrac{7}{(x-2)(x+5)}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-3x+2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}$ (e) $f(x) = \dfrac{x^5}{(x-2)^2}$ (f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x(x^2+1)}$

演習問題

1. 次の積分を求めよう.

(a) $\displaystyle\int \frac{7}{(x-2)(x+5)}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-3x+2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+16)^2}$ (f) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x-2)^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^9-1}\,dx \quad (x^3 = t)$ (h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^4+1)} \quad (x^4 = t)$

3.5 三角関数の積分法 (integration of trigonometric functions)

確認問題

1. 次の積分を求めよう.

(a) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\ dx$ (b) $\displaystyle\int \sin^2 3x \cos 3x\ dx$ (c) $\displaystyle\int \cos^2 x\ dx$

(d) $\displaystyle\int \cos^3 x\ dx$ (e) $\displaystyle\int \cos^4 x \sin^3 x\ dx$ (f) $\displaystyle\int \sin 2x \cos 3x\ dx$

(g) $\displaystyle\int \sin 2x \sin x\ dx$ (h) $\displaystyle\int \cos x \cos 2x\ dx$ (i) $\displaystyle\int \tan x \sec^2 x\ dx$

(j) $\displaystyle\int \sec^3 x\ dx$

演習問題

1. 次の積分を求めよう.

(a) $\displaystyle\int \sin^3 x\ dx$ (b) $\displaystyle\int \sin^2 3x\ dx$ (c) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x\ dx$

(d) $\displaystyle\int \cos 3x \sin 2x\ dx$ (e) $\displaystyle\int \sin^5 x\ dx$ (f) $\displaystyle\int \sec^2 \pi x\ dx$ (g) $\displaystyle\int \tan^3 x\ dx$

(h) $\displaystyle\int \tan^2 x \sec^2 x\ dx$ (i) $\displaystyle\int \tan^3 x \sec^3 x\ dx$ (j) $\displaystyle\int \sec^5 x\ dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{dx}{3-2\cos x}$ (l) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{2-\sin x}\,dx$ (m) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}\,dx$ (o) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\tan x}$

3.6 無理関数の積分法 (integration of irrational functions)

確認問題

1. 次の積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$　(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$　(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}$　(d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$　(f) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$　(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

(h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

演習問題

1. 次の積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\,dx$　(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$　(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$　(d) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$

2. 次の積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$　(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$　(c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{9-e^{2x}}\,dx$　(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$　(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{4+e^{2x}}}$　(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

(h) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$　(i) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x-3}}\,dx$　(j) $\displaystyle\int \sqrt{6x-x^2-8}\,dx$

(k) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+6x}\,dx$

3.7 定積分 (definite integral)

確認問題

1. 区分求積法を用いて，$\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ を求めよう．

2. 次の定積分を計算しよう．

(a) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+3)\,dx$　(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-1}{x}\,dx$　(c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^3}\,dx$　(d) $\displaystyle\int_0^\pi \cos x\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 6,\ \int_0^2 f(x)dx = 4,\ \int_2^5 f(x)dx = 1$ のとき，次の問いに答えよう．

(a) $\displaystyle\int_0^5 f(x)\ dx$　(b) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\ dx$　(c) $\displaystyle\int_1^5 f(x)\ dx$　(d) $\displaystyle\int_0^0 f(x)\ dx$

(e) $\displaystyle\int_2^0 f(x)\ dx$

4.　関数 $f(t)$ が連続であるとき，$g(x)$ を求めよう．

(a) $\displaystyle g(x)=\frac{d}{dx}\int_1^x \sin t dt$　(b) $\displaystyle g(x)=\frac{d}{dx}\int_x^1 \cos t dt$　(c) $\displaystyle g(x)=\frac{d}{dx}\int_0^{2x}\sqrt{\sin t}dt$

5.　次の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right)$　(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2+\frac{2}{n}}+\frac{1}{3}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$

演習問題

1.　関数 $f(t)$ が連続であるとき，$g(x)$ を求めよう．

(a) $\displaystyle g(x)=\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt$　(b) $\displaystyle g(x)=\frac{d}{dx}\int_x^{x+1} f(t)dt$

(c) $\displaystyle g(x)=\frac{d}{dx}\int_0^{2x} x^2 f(t)dt$

2.　次の定積分を計算しよう．

(a) $\displaystyle\int_1^5 2\sqrt{x-1}dx$　(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2-t}{t^3}dt$　(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$　(d) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx$

3.　(2) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ (c：定数) を証明しよう．

(3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ を証明しよう．

(4) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ を証明しよう．

(5) $[a,b]$ で $f(x)\geq g(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ を証明しよう．

4.　次の不等式を証明しよう．

(a) $\displaystyle\frac{\pi}{4}<\int_0^1\frac{1}{1+x^n}dx<1\ \ (n>2)$　(b) $\displaystyle\frac{1}{2n+2}\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\leq\frac{1}{n}\ \ (n\geq 1)$

5.　次の極限値を求めよう．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$　(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{n^2+i^2}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x \tan(t^2)dt$

3.8　定積分の計算 (calculation of integrals)

確認問題

1. 次の定積分の値を求めよう．

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin x\ dx$　(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sin^3 x\ dx$　(c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$　(d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos 2x dx$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{x+1} dx$

演習問題

1. 次の定積分の値を求めよう．

(a) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin x dx$　(b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} dx$　(c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 \cos x dx$　(e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos nx dx$　(n 整数)　(f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\ dx$

(g) $\displaystyle\int_{0}^{1} x e^x\ dx$

2. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ を示そう．

3. 関数 $F(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t) dt$ について以下のことについて答えよう．ただし，$f(x)$ は区間 $(-\infty, \infty)$ で微分可能な関数とする．

(a) $F(x)$ は奇関数であることを示そう．

(b) $f(x)$ が偶関数ならば $f'(x)$ は奇関数であることを示そう．

(c) $f(x) = \int_{-x}^{x} f(t) dt$ ならば $f(x) = 0$ となることを示そう．

(d) $f(x)$ は偶関数と奇関数の和で表せることを示そう．

4. 次の定積分の値を求めよう．

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\log(x+1)}{x^2+1}\ dx$

3.9 定積分の定義の拡張 (extension of definite integrals)

確認問題

1. 次の広義積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x}\ dx$　(b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$　(c) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$　(d) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \cos \pi x\ dx$　(e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$

演習問題

1.　次の広義積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$　(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$　(c) $\displaystyle\int_0^1 \log x dx$

2.　次の無限積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$　(b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^\alpha}dx$　(c) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^\alpha \log x}dx$

3.　次の積分の収束，発散について調べよう．

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$　(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}$

3.10　**定積分の応用** (applications of definite integral)

確認問題

1.　次の曲線で囲まれる図形の面積を求めよう．

(a) $y = x^2, y = x + 2$　(b) $y = x^3, y = x^2$　(c) $y = -\sqrt{x}, y = x - 6, y = 0$

(d) $y = x^3 - x, y = 1 - x^2$　(e) $x + 4 = y^2, x = 5$

(f) $y = 2x, x + y = 9, y = x - 1$

2.　次の曲線で囲まれる平面図形を x 軸の回りに回転してできる回転体の体積を求めよう．

(a) $y = x, y = 0, x = 1$　(b) $y = x^2, y = 9$　(c) $y = \sqrt{x}, y = x^3$

(d) $y = x^2, y = x + 2$

3.　次の曲線の長さを求めよう．

(a) $y = 2x + 3$ の $x = 0$ から $x = 2$ まで　(b) $y = x^{3/2}$ の $x = 0$ から $x = 44$ まで

(c) $x(t) = t^2, y(t) = 2t$ の $t = 0$ から $t = \sqrt{3}$ まで

(d) $r = e^\theta$ の $\theta = 0$ から $\theta = 4\pi$ まで

演習問題

1.　次の曲線で囲まれた図形の面積を求めよう．

(a) $x = y^2, x = 3 - 2y^2$　(b) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t,\ (0 \le t \le \pi)$ と x 軸

2.　次の平面図形を x 軸の回りに回転してできる回転体の体積を求めよう．

(a) $x^2 + (y-2)^2 \le 1$

(b) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$ と x 軸で囲まれる部分．

3.　次の曲線の長さを求めよう．

(a) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ の全長　(b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ の全長　(c) $r = 1 + \cos\theta$ の全

第 4 章

級数 (SERIES)

4.1 級数の定義 (definition of series)

確認問題

1. 次の級数の和を求めよう.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{10^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-2^m}{3^n}$

2. 次の循環小数を有理数で表そう.

(a) $1.\bar{3}$ (b) $2.\bar{4}\bar{1}$ (c) $0.\bar{9}$

演習問題

1. 次の級数の収束，発散を判定しよう.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$

2. 次の級数の和を求めよう.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

4.2 正項級数 (nonnegative term series)

確認問題

1. 次の級数の収束，発散を比較判定法を用いて判定しよう.

(a) $\displaystyle\sum\frac{n}{n^3+1}$ (b) $\displaystyle\sum\frac{1}{3n+2}$ (c) $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2+1}$ (d) $\displaystyle\sum\frac{\log n}{n}$

2. 次の級数の収束，発散を積分判定法を用いて判定しよう.

(a) $\displaystyle\sum\frac{1}{n}$ (b) $\displaystyle\sum\frac{1}{n\log n}$ (c) $\displaystyle\sum\frac{1}{n(\log n)^2}$ (d) $\displaystyle\sum\frac{\log n}{n}$

3.　次の級数の収束，発散をダランベールの判定法を用いて判定しよう．

(a) $\sum \dfrac{1}{2^n}$　(b) $\sum \dfrac{10^n}{n!}$

演習問題

1.　次の級数の収束，発散を判定しよう．

(a) $\sum \dfrac{n}{3^n}$　(b) $\sum \dfrac{n!}{n^n}$　(c) $\sum \dfrac{n^n}{n!}$　(d) $\sum \dfrac{n^2}{2^n}$　(e) $\sum \dfrac{2^n}{n!}$

(f) $\sum(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3n]{})$

4.3　交項級数 (alternating series)

確認問題

1.　次の級数は条件収束か絶対収束か判定しよう．

(a) $1 + (-1) + 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots$

(b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{4}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{n}{n+1} + \cdots$

(c) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{7} + \cdots + \dfrac{1}{3n+2} - \dfrac{1}{3n+3} - \dfrac{1}{3n+4} + \cdots$

演習問題

1.　次の級数は条件収束か絶対収束か判定しよう．

(a) $\sum(-1)^n \dfrac{\log n}{n}$　(b) $\sum(-1)^n \dfrac{n}{3^n}$　(c) $\sum(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}})$

(d) $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$　(e) $\sum \dfrac{(-1)^n}{n \log n}$　(f) $\sum \dfrac{\cos n\pi}{\sqrt{n^3+n}}$

4.4　関数項級数 (series of functions)

確認問題

1.　項別微分，項別積分を用いて次の関数の MacLaurin 級数を求めよ．

(a) $\log(1-x)$　(b) $\tan^{-1} x$

演習問題

1. 次のベキ級数の収束半径を求めよう.

(a) $\sum \dfrac{1}{2n+1} x^{2n+1}$　　(b) $\sum \dfrac{2^{2n}}{2n!} x^{2n}$　　(c) $\sum n! x^n$

2. 次の関数の $x = 0$ のまわりのベキ級数展開を求めよう.

(a) $\log \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$　　(b) $\dfrac{1}{3x^2 - 4x + 1}$

第 5 章

ベクトル関数 (VECTOR FUNCTIONS)

5.1 ベクトル関数 (vector functions)

確認問題

1. 次の問に答えよう．

(a) $\mathbf{F}(t) = (\cos t, \sin t)$ のとき，$\mathbf{F}'(t)$ と $\|\mathbf{F}'(t)\|$ を求めよう．

(b) $\mathbf{F}(t) = (1+2t, 3-t, 2+3t)$ のとき，$\mathbf{F}'(t)$ と $\|\mathbf{F}'(t)\|$ を求めよう．

(c) $\mathbf{F}'(t) = (1, 2t)$ のとき，$\mathbf{F}(t)$ を求めよう．

(d) $\mathbf{F}'(t) = (e^t, \sqrt{2}, e^{-t})$ のとき，$\mathbf{F}(t)$ を求めよう．

演習問題

1. 次の問に答えよう．

(a) $\mathbf{F}(t) = (\sin t, \cos^2 t, t^2)$ のとき，$\mathbf{F}'(t)$ を求めよう．

(b) $\mathbf{F}'(t) = (\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \dfrac{1}{1+t^2}, \tan t)$ のとき，$\mathbf{F}(t)$ を求めよう．

(c) $\mathbf{F}(t), \mathbf{G}(t)$ が t について微分可能なベクトル関数のとき，

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})' = \mathbf{F}'\cdot\mathbf{G} + \mathbf{F}\cdot\mathbf{G}'$$

が成り立つことを証明しよう．

(d) $\mathbf{F}(t), \mathbf{G}(t)$ が t について微分可能なベクトル関数のとき，

$$(\mathbf{F}\times\mathbf{G})' = \mathbf{F}'\times\mathbf{G} + \mathbf{F}\times\mathbf{G}'$$

が成り立つことを示そう．

(e) $\mathbf{F}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ とすると，次のことが成り立つことを示そう．(b) $\mathbf{F}(t)$ は連続 $\Leftrightarrow$ $(x(t), y(t), z(t))$ が共に連続よう．

(c) $\mathbf{F} \in C'[a,b] \Rightarrow \mathbf{F}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

(d) $\mathbf{F} \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b \mathbf{F}(t)dt = \left(\int_a^b x(t)dt, \int_a^b y(t)dt, \int_a^b z(t)dt\right)$

5.2 曲線 (space curves)

確認問題

1. 次の条件を満たす直線のベクトル方程式を求めよ.

(a) 点 $(1,-1,2)$ を通りベクトル $(2,-3,1)$ に平行.

(b) 点 $(3,1,0)$ を通り線分 $\mathbf{r}(t) = (3t,-t,t)$ に平行.

(c) 点 $(1,0,3)$ と $(2,-1,4)$ を通る.

2. 次の曲線の接線ベクトルと与えられた点を通る接線の方程式を求めよう.

(a) $\mathbf{r}(t) = (1,t,t^2), t=1$　(b) $\mathbf{r}(t) = (2t^2, 1-t, 3+2t^2), t=1$

3. 次の曲線の弧長を求めよう.

(a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ただし, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$

(b) $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$ ただし, $0 \le t \le 1$

4. 次の曲線の曲率を求めよう.

(a) $y = x^3$　(b) $y = x - x^2$　(c) $y = \tan x$

演習問題

1. 次の曲線の接線ベクトルと与えられた点を通る接線の方程式を求めよう.

(a) $\mathbf{r}(t) = (e^t, e^{-t}, -\log t)$　$t=1$　(b) $\mathbf{r}(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t, t)$　$t=2$

2. 次のパラメター化された曲線を x, y, z の方程式で表わそう.

(a) $\mathbf{r}(t) = (at, bt^2)$　(b) $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$　(c) $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t, t)$

3. 次の曲線の弧長を求めよう.

(a) $\mathbf{r}(t) = (t, \log(\sec t), 3)$ ただし, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$

(b) $\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t, \sin t)$ ただし, $0 \le t \le \pi$

(c) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ ただし, $y \ge 0$

4. 次の曲線の曲率を求めよう.

(a) $y = e^{-x}$　(b) $y = \log(\sec x)$　(c) $\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t)$

5.3 点の運動 (motion of objects)

演習問題

1.　次のベクトル値関数で与えられる点運動に対して $t = 1$ のとき $\mathbf{v}(t), \mathbf{a}(t), v, \hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}$ を求めよう．

(a)　$\mathbf{r}(t) = (a\cos \pi t + bt^2, a \sin \pi t - bt^2)$

(b)　$\mathbf{r}(t) = (t^3, t)$　　(c) $\mathbf{r}(t) = (2, t^2, (t-1)^2)$

2.　次の曲線について，$\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}$，曲率 κ，ねじれ率 τ を求めよう．

(a)　$\mathbf{r}(t) = (t, t^2, \dfrac{2}{3}t^3)$　　(b)　$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$

第 6 章

偏微分法 (PARTIAL DIFFERENTIATION)

6.1 関数の定義 (definition of functions)

確認問題

1. 次の関数の定義域と値域を求めよう.

(a) $f(x,y)=\sqrt{xy}$ (b) $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$ (c) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

(d) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ (e) $f(x,y)=\log(1-xy)$ (f) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2-y^2}$

2. 次の曲面を分類しよう.

(a) $x^2+4y^2-16z^2=0$ (b) $x^2+4y^2+16z^2-12=0$ (c) $x-4y^2=0$

(d) $x^2-4y^2-2z=0$ (e) $2x^2+4y^2-1=0$ (f) $x^2+4y^2-4z=0$

(g) $2x^2-4y^2-6=0$ (h) $x^2+y^2-2z^2-10=0$ (i) $x^2+y^2-2z^2+10=0$

演習問題

1. 次の関数の定義域をもとめそのグラフを描こう.

(a) $f(x,y)=x^2-y^2$ (b) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ (c) $f(x,y)=\log(1-xy)$

6.2 偏微分 (partial derivatives)

確認問題

1. 次の関数の偏導関数を求めよう.

(a) $f(x,y)=3x^2-xy+y$　(b) $f(x,y)=x^2e^{-y}$　(c) $z=\sqrt{(x^2+y^2)}$

(d) $z=x\sin y$　(e) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$

2.　次の関数の第 2 次までの偏導関数をすべて求めよう.

(a) $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$　(b) $f(x,y,z)=(x+y^2+z^3)^2$

(c) $f(x,y)=\sin(3x-2y)$　(d) $f(x,y)=xe^{2y}$

演習問題

1.　次の関数を偏微分しよう.

(a) $z=x^3+xy^2+y^3$　(b) $z=e^x\sin y$　(c) $z=\log(x^2+y^2)$

2.　次の関数の第 2 次までの偏導関数をすべて求めよう.

(a) $z=x^3y+xy^2$　(b) $z=xy^2e^{\frac{x}{y}}$

(c) $z=\tan^{-1}(x^2+y^2)$

3.　次の関数は原点で偏微分可能か調べよう.

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3-x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$　(b) $f(x,y)=\log(1+xy+y^2)$

6.3 関数の極限 (limit of function)

確認問題

1.　次の極限値を求めよう.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x-y+1}{x+y-1}$　(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x-3y}{x+y}$　(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x+y}$

2.　次の関数の $(0,0)$ における連続性を調べよう.

(a) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$　(b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

演習問題

1.　次の集合は開集合，閉集合，有界な集合，連結な集合，または，領域か調べ，境界と閉包を求めよう.

(a) $D=\{(x,y):0<x^2+y^2<1\}$　(b) $D=\{(x,y):xy\leq 0\}$

2.　$(x,y)\to(0,0)$ のとき，次の関数の極限値を求めよう.

(a) $\dfrac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}$　(b) $\dfrac{xy}{x^2+y^2+y^4}$　(c) $\dfrac{xy}{x^2+y^2+y}$

3.　次の関数の $(0,0)$ における連続性を調べよう．

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b)　$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c)　$f(x,y) = \begin{cases} xy\log(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ -1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

6.4　全微分 (total differential)

確認問題

1.　次の関数の gradient と全微分を求めよう．

(a) $f(x,y) = x^3 + y^2$　(b) $f(x,y) = 3x^2 - xy + y$　(c) $z = x^2y^{-2}$　(d) $z = x^2y$

(e)　$z = e^x \cos y$

2.　次の条件を満たす接平面および法線の方程式を求めよう．

(a)　点 $(1,1,1)$ を通り，法線ベクトルが $(3,2,-1)$

(b)　点 $(2,1,1)$ における曲面 $z = xy$

(c)　点 $(1,1,4)$ における曲面 $z = x^2 + xy + 2y^2$

演習問題

1.　次の関数の全微分および gradient を求めよう．また，点 $(1,1)$ に対応する点を通る接平面と法線を求めよう．

(a)　$f(x,y) = x^3y^4$　(b)　$f(x,y) = x^3y + x^2y^4$　(c)　$z = x^2ye^{2x}$　(d)　$z = \cos xy$

2.　全微分を用いて，次の値を近似してみよう．

(a)　$\sqrt{125}\sqrt[4]{17}$　(b)　$\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

6.5　gradient と方向微分 (grad and directional derivatives)

確認問題

1.　次の関数を $(1,2)$ で $(1,-1)$ の方向に微分しよう．

(a)　$f(x,y) = x^2 + y^2$　(b)　$f(x,y) = xe^y - ye^x$

2.　次の関数を $(1,0)$ で $\frac{\pi}{3}$ 方向に微分しよう．

(a) $f(x,y) = \dfrac{2x}{(x-y)}$　(b)　$f(x,y) = \log(x^2+y^2)$

3. 次の関数を $(0,1)$ で $(-1,3)$ 方向に微分しよう．また方向微分が最大になるような方向単位ベクトルを求めよう．

(a) $f(x,y)=(x+1)\log y$ (b) $f(x,y)=(x-1)y^2e^{xy}$

演習問題

1. 次の関数を $(0,0)$ で $(1,\sqrt{3})$ の方向に微分しよう．

(a) $f(x,y)=x^2+x+y$ (b) $f(x,y)=\cos x+\sin y$

2. 次の関数を $(1,-1)$ で $\dfrac{2\pi}{3}$ 方向に微分しよう．

(a) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x-y}$ (b) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$

3. ある金属板の各点における温度は次の式で与えられる．

$$T(x,y)=e^x\cos y+e^y\cos x$$

(a) 点 $(0,0)$ からどの方向に進むと，温度上昇が最も大きいか．また，そのときの温度の変化率を調べよう．

(b) 点 $(0,0)$ からどの方向に進むと，温度下降が最も大きいか．また，そのときの温度の変化率を調べよう．

6.6 合成関数の偏微分法 (differentiation of composite functions

確認問題

1. $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよう．ただし，f は C^1 級とする．

(a) $z=x^2+2y, x=2t, y=t^3$ (b) $z=x^2+y^2, x=\cos t, y=\sin t$

(c) $z=x^2+xy+2y^2, x=\cos t, y=\sin t$ (d) $z=x^3y^2, x=t^2, y=t^3$

2. 次の関数について，$\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよう．

(a) $z=x^2+y^2, x=u-2v,\ y=2u+v$

(b) $z=x^2+xy+2y^2, x=u+v, y=uv$ (c) $f(x,y)=x^2y^2, x=uv, y=v^2$

演習問題

1. $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよう．ただし，f は C^1 級とする．

(a) $z=\log(x^2+y^2), x=t+\dfrac{1}{t}, y=t(t-1)$ (b) $z=f(t^2,e^t)$

(c) $z=f(2t,4t^2)$ (d) $z=x^2-2y^2, x=\cos t, y=\sin t$

2.　次の関数について，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよう．

(a)　$z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}, x = r^3 - 3rs^2,\ y = 3r^2 s - s^3$

(b)　$z = \log\dfrac{y}{x}, x = (r-1)^2 + s^2, y = (r+1)^2 + s^2$

(c)　$z = \sqrt{x^2+y^2}, x = r\cos s, y = r\sin s, (r > 0)$

3.　$z = f(x,y), x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のとき，次の式が成り立つことを示そう．

$$z_r = z_x\cos\theta + z_y\sin\theta,\ z_\theta = r(-z_x\sin\theta + z_y\cos\theta).$$

6.7　2 変数関数の極値 (extreme values)

確認問題

1.　次の関数の (a,b) での Taylor 展開を x と y の 2 次の項まで求めよう．

(a)　$f(x,y) = x^2 y, (a,b) = (1,1)$　　(b)　$f(x,y) = \cos xy, (a,b) = (1, \dfrac{\pi}{2})$

(c)　$f(x,y) = \log(1 - x + y), (a,b) = (1,1)$　　(d)　$f(x,y) = xe^{2x+y}, (a,b) = (0,0)$

2.　次の関数の極値を求めよう．

(a)　$f(x,y) = 2x - x^2 - y^2$　　(b)　$f(x,y) = x^2 - 6y^2 + y^3$

(c)　$f(x,y) = x^3 - 3x + y$　　(d)　$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$

演習問題

1.　次の関数の極値を求めよう．

(a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$　　(b)　$f(x,y) = \dfrac{x}{y^2} + xy$

(c)　$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$　　(d)　$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$

2.　次の関数の (a,b) での Taylor 展開を x と y の 2 次の項まで求めよう．

(a)　$f(x,y) = e^x\cos y,\ (a,b) = (0,0)$

(b)　$f(x,y) = \log(x + y^2),\ (a,b) = (2,1)$

6.8　陰関数 (implicit functions)

確認問題

1.　次の式から定まる陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよう．

(a)　$x - y^2 = 1$　　(b)　$x^2 + xy + 2y^2 = 1$　　(c)　$x - e^y = 0$

(d)　$x^3 - 3xy + y^3 = 1$

2. 次の式から定まる陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$ を求めよう．

(a) $x^2+y^2+z^2=4, x+y+z=1$　(b) $xyz=1, x+y+z=1$

演習問題

1. 次の式から定まる陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよう．

(a) $2x^2+5xy-3y^2=1$　(b) $y=e^{x+y}$　(c) $x^2-y^2=xy$

(d) $\log\sqrt{x^2+y^2}=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

2. 次の式から定まる陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$ を求めよう．

(a) $x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2=4x$　(b) $xyz=1, xy+yz+zx=1$

3. 楕円 $2x^2+5y^2=12$ 上の点 $(1,\sqrt{2})$ における接線と法線を求めよう．

4. 曲面 $z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ 上の点 $(1,1,\frac{\pi}{2})$ における接平面と法線を求めよう．

5. 次の式から定まる陰関数 $y=g(x)$ の極値を求めよう．

(a) $8x^2+4xy+5y^2=36$　(b) $x^2y+x+y=0$

(c) $x^3+y^3-6xy=0$

6.9 陰関数の極値と条件付極値 (extremum with side conditions)

確認問題

1. 次の条件 $g(x,y)=0$ のもとでの $f(x,y)$ の最大値，最小値を求めよう．

(a) $g(x,y)=x^2+y^2-1,\ f(x,y)=x^2+3y^2$

(b) $g(x,y)=x^2+y^2-4,\ f(x,y)=x^2+y^2-2x$

(c) $g(x,y)=x^2+y^2-1,\ f(x,y)=xy+x+y$

2. 楕円 $x^2+xy+y^2=\frac{1}{4}$ と原点との最短距離を求めよ．

演習問題

1. 次の式から定まる陰関数 $y=g(x)$ の極値を求めよう．

(a) $8x^2+4xy+5y^2=36$　(b) $x^2y+x+y=0$　(c) $x^3+y^3-6xy=0$

2. 次の条件 $g(x,y)=0$ のもとでの $f(x,y)$ の最大値，最小値を求めよう．

(a) $g(x,y)=x^2+y^2-1,\ f(x,y)=xy^3$

(b) $g(x,y)=x^3+y^3-6xy,\ f(x,y)=x^2+y^2$

(c) $g(x,y)=x^2-xy+y^2-1,\ f(x,y)=xy$

3. 点 $\mathrm{P}(x,y)$ が直線 $2x+3y=12$ 上を移動するとき，xy の最大値を求めよう．

4.　点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ が球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上を移動するとき，$x^2 + 2y^2 + 3z^2$ の最大値，最小値を求めよう．

第 7 章

重積分法 (MULTIPLE INTEGRATION)

7.1 2 重積分 (double integrals)

7.1.1 演習問題

1.enshu:7-1-1　上の定理 7.2 を証明しよう．

7.2 累次積分 (repeated integrals)

確認問題

1.　次の 2 重積分を計算しよう．

(a) $\displaystyle\iint_\Omega x dx dy,\ \Omega : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 3$

(b) $\displaystyle\iint_\Omega (2x+3y) dx dy,\ \Omega : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x$

(c) $\displaystyle\iint_\Omega (1+x+xy) dx dy,\ \Omega : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq y$

(d) $\displaystyle\iint_\Omega \sin(x+y) dx dy,\ \Omega : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

(e) $\displaystyle\iint_\Omega x^3 y dx dy,\ \Omega : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x$

2.　次の積分順序の交換をしよう．

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^x f(x,y) dy dx$　(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y) dx dy$　(c) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y) dy dx$

3.　次の体積を求めよう．

(a) 曲面 $z = x + y$ で上に有界で 3 点 $(0,0), (0,1), (1,0)$ を頂点とする三角面で下に有界な立体

(b)　曲面 $z = 2x + 3y$ で上に有界で点 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ を頂点とする正方形で下に有界な立体

(c)　曲面 $z = x^2 + y^2$ で上に有界で単位円盤 $x^2 + y^2 \leq 1$ で下に有界な立体

演習問題

1.　次の 2 重積分を計算しよう．

(a) $\displaystyle\iint_\Omega x^2 dxdy,\ \Omega : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 3$

(b) $\displaystyle\iint_\Omega e^{x+y} dxdy,\ \Omega : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x$

(c) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{xy}dxdy,\ \Omega : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq y$

(d) $\displaystyle\iint_\Omega (4 - y^2)dxdy$, Ω は $y^2 = 2x$ と $y^2 = 8 - 2x$ で囲まれた領域

2.　次の積分順序の交換をしよう．

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^4}^{x^2} f(x,y)dydx$　(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)dxdy$　(c) $\displaystyle\int_1^4 \int_x^{2x} f(x,y)dydx$

3.　次の 2 重積分を計算しよう．

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{y/x}dxdy$　(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}dydx$　(c) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x}dx$

7.3 変数変換 (change of variables)

確認問題

1.　次の 2 重積分を計算しよう．

(a) $\displaystyle\iint_\Omega (x^2 + y^2)dxdy,\ \Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$

(b) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{1}{(x^2 + y^2)}dxdy,\ \Omega = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

(c) $\displaystyle\iint_\Omega y^2 dxdy,\ \Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

(d) $\displaystyle\iint_\Omega (x+y)dxdy, \Omega = \{(x,y) : 0 \leq x+y \leq 1, |x-y| \leq 1$

(e) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy,\ \Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$

2.　$u = x - y, v = x + y$ とおくと，領域 $\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x + y \leq 1, 0 \leq x - y \leq 1\}$ はどんな図形に移されるか図示せよ．また，この変数変換を用いて，2 重積分 $\iint_\Omega (2x + 3y)dxdy$ の値を求めよう．

3.　$\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x - y \leq 1, 0 \leq x + 2y \leq 1\}$ とするとき，2 重積分 $\iint_\Omega 2xdxdy$ の値を求めよう

演習問題

1.　次の 2 重積分を計算しよう．

(a) $\displaystyle\iint_\Omega x^2 dxdy,\ \Omega=\{(x,y): x^2+y^2\le 4\}$

(b) $\displaystyle\iint_\Omega \log(x^2+y^2)dxdy,\ \Omega=\{(x,y): 1\le x^2+y^2\le 4\}$

(c) $\displaystyle\iint_\Omega e^{(y-x)/(y+x)}dxdy,\ \Omega=\{(x,y): x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$

(d) $\displaystyle\iint_\Omega e^{x^2+y^2}dxdy,\ \Omega=\{(x,y): 1< x^2+y^2< 4\}$

(e) $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,\ \Omega=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$

(f) $\displaystyle\iint_\Omega (1-x-2y)dxdy,\ \Omega=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 1\}$

2.　$u=x+y, v=x-y$ に変換して，次の積分を求めよう．

$\displaystyle\iint_\Omega (x^2+y^2)e^{-x+y}dxdy,\ \Omega=\{-1\le x+y\le 1, -1\le x-y\le 1\}$

7.4　広義積分 (improper integrals)

確認問題

1.　次の広義積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\iint_\Omega e^{y/x}dxdy,\ \Omega=\{(x,y): 0< x\le 1, 0\le y\le x\}$

(b) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x}{\sqrt{1-x-y}}dxdy,\ \Omega=\{(x,y): x+y<1, x\ge 0, y\ge 0\}$

(c) $\displaystyle\iint_\Omega \log(x^2+y^2)dxdy,\ \Omega=\{(x,y): x,y\ge 0, x^2+y^2\le 1\}$

演習問題

1.　次の広義積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{dxdy}{(y^2-x^2)^{1/2}},\ \Omega=\{(x,y): 0\le x< y\le 1\}$

(b) $\displaystyle\iint_\Omega e^{-(x+y)}dxdy,\ \Omega=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0\}$

(c) $\displaystyle\iint_\Omega \tan^{-1}(\frac{y}{x})dxdy,\ \Omega=\{(x,y): x,y\ge 0, x^2+y^2\le 1\}$

(d) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{1}{x^2y^2}dxdy,\ \Omega=\{(x,y): x\ge 1, y\ge 1\}$

(e) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{dxdy}{\sqrt{x-y^2}},\ \Omega=\{(x,y): 0\le x\le 1, y^2\le x\}$

(f) $\displaystyle\iint_\Omega \frac{dxdy}{1+(x^2+y^2)^2}$, $\Omega = \{(x,y) : -\infty < x, y < \infty\}$

2. $\iint_\Omega e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4}$ を用いて，$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx = \sqrt{\pi}$ を示そう．

7.5 2 重積分の応用 (application of double integrals)

確認問題

1. 次の図形の面積を求めよう．

(a) 曲線 $r = 1 - \cos\theta$ で囲む部分

(b) $r = 3\cos\theta$ の内側で $r = \frac{3}{2}$ の外側の部分

(c) $r = 3\cos\theta$ の内側で $r = \cos\theta$ の外側の部分

2. 次の曲面の曲面積を求めよう．

(a) $z^2 = x^2 + y^2$ の $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, $z \geq 0$ の部分

(b) 平面 $x + y + z = 2$ の $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ の部分

(c) 双曲方物面 $z = xy$ の円柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ の内部にある部分

3. 次の立体の体積を求めよう．

(a) 放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 2y$ によって囲まれた部分

(b) 放物面 $z = x^2 + y^2$ と円柱 $x^2 + y^2 \leq 1$ によって囲まれる部分

演習問題

1. 次の図形の面積を求めよう．

(a) 曲線 $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ $(0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2})$ と両軸とで囲む部分

(b) $r = a\cos 3\theta$ $(a > 0)$ の囲む部分

(c) 曲線 $y = \dfrac{8}{x^2+4}$ と $y = \dfrac{x^2}{4}$ で囲む部分

2. 次の曲面の曲面積を求めよう．

(a) 半径 a の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

(b) $z = xy$ の $x^2 + y^2 \leq a^2$ に対応する部分

(c) 円柱 $x^2 + z^2 = a^2$ が円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ によって切り取られる部分

(d) $y = mx$ $(0 \leq x \leq k)$ を x 軸の回りに回転してできる曲面 $(m > 0)$

3. 次の立体の体積を求めよう．

(a) 円柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ の $0 \leq z \leq x$ の部分

(b) $0 \leq z \leq 1 - x^2, x \leq 1 - y^2, x \geq 0, y \geq 0$ で定まる閉領域

(c) 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ と円柱 $x^2 + y^2 \leq ax$ の共通部分

(d) 円錐面 $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ と平面 $z = x$ および $x = 0$ で囲まれる部分

7.6　3 重積分 (triple integrals)

確認問題

1.　次の 3 重積分を求めよう．

(a) $\int_0^a \int_0^b \int_0^c dxdydz$　(b) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y ydzdydx$

2.　次のものを累次 3 重積分で表そう．値は求めなくてもよい

(a) ボール $x^2+y^2+z^2 \leq r^2$ の質量．ただし，密度は中心からの距離に比例するとする．

(b) 平面 $z=1$ と曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ で囲まれた円錐の質量．ただし，密度は原点からの距離に比例するとする．

(c) 放物面 $z=4-x^2-y^2$ と曲面 $z=2+y^2$ で囲まれた部分の体積.

3.　次の閉領域の重心を求めよう．

(a) 密度一定のとき， $y=x$ と $y=x^2$ とで囲まれた閉領域

(b) 密度一定のとき， $x^2=4y$ と $x-2y+4=0$ とで囲まれた閉領域

(c) 密度一定のとき， $y=x^2-2x$ と $y=6x-x^2$ とで囲まれた閉領域

演習問題

1.　$T=\{(x,y,z): 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$ のとき，次の 3 重積分を求めよう．

(a) $\iiint_T dxdydz$　(b) $\iiint_T e^{x+y+z}dxdydz$

2.　次の 3 重積分を求めよう．

(a) $\iiint_T dxdydz,\ T=\{(x,y,z): \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 3\}$

(b) $\iiint_T (x^2+y^2+z^2)dxdydz, T=\{(x,y,z): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$

3.　次の閉領域の重心を求めよう．

(a) 密度一定のとき， $y=x$ と $y=6x-x^2$ とで囲まれた閉領域

(b) 密度が中心からの距離に比例するときの，半球 $x^2+y^2+z^2 \leq a^2, z \geq 0$

(c) 密度一定のとき，底面の半径が a，高さが h の直円錐.

(d) 密度一定のとき， $ax \leq x^2+y^2 \leq a^2$ であらわせる領域

(e) $z=1-x-y$ と xy 平面で囲まれる三角錐の重心 $\bar{y}, \bar{z}$

(f) 密度が原点からの距離に比例するときの， $ax \leq x^2+y^2 \leq a^2$ であらわせる領域

第 8 章

ベクトル解析 (VECTOR ANALYSIS)

8.1 曲面 (surface)

8.1.1 演習問題

1. 次の曲面の接平面の方程式を求めよう．

(a) $z = (x^2 + y^2)^2$: 点 $(1, 1, 4)$ (b) $x^3 + y^3 = 3xyz$: 点 $(1, 2, \dfrac{3}{2})$

(c) $z = \sin(x \cos y)$: 点 $(0, \dfrac{\pi}{2}, 0)$

2. 曲面の方程式が次の形で与えられたとき，曲面の面積素を求めよう．

(a) $\mathbf{r} = (u, v, u^2 + v^2)$ (b) $\mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, 2v)$ (c) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(d) $F(x, y, z) = 0$

8.2 スカラー場とベクトル場 (scalar field and vector field)

8.2.1 演習問題

1. 次の曲面の法線単位ベクトルと接平面を与えられた点で求めよう．

(a) $z = (x^2 - y^2)$: 点 $(1, 1, 0)$ (b) $2x - 4y^2 + z^3 = 0$: 点 $(-4, 0, 2)$

(c) $\cos x + \sin y + z = 1$: 点 $(0, \pi, 0)$

2. 中心が原点にある鉄球の密度は次の関数で与えられている．$\rho(x, y, z) = ke^{-(x^2+y^2+z^2)}$

(a) 点 $(1, 0, 1)$ ではどの方向が密度の増加が一番大きいか求めよう．

(b) 点 $(1, 0, 1)$ ではどの方向が密度の増加が一番小さいか求めよう．

3. 次のベクトル場 $\mathbf{F}$ の力線を求めよう．

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (-2y, x)$ (b) $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$

8.3 ベクトル場の発散 (divergence of vector field)

8.3.1 演習問題

1. $\mathbf{F} = (3xyz^2, 2xy^3, -x^2yz), f = 3x^2 - yz$ のとき点 $\mathrm{P}(1, -1, 1)$ におけるつぎのものを求めよう．

(a) grad$f$ (b) div$\mathbf{F}$ (c) curl$\mathbf{F}$ (d) grad(div $\mathbf{F}$) (e) div(grad$f$)
(f) curl(curl$\mathbf{F}$) (g) $\nabla \times (f\mathbf{F})$ (h) $\nabla \times (\nabla f)$

8.4 線積分 (line integrals)

8.4.1 演習問題

1. 次の線積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\int_C xy^2 ds$, C は 2 点 $(-1, 0, 2), (1, 3, 2)$ を結ぶ線分

(b) $\displaystyle\int_C (x + y^2) ds$, C は 2 点 $(0, 0, 0), (1, 3, 2)$ を結ぶ線分

(c) $\displaystyle\int_C (-y^3 dx + x^2 dy)$, C は xy 平面上の単位円の点 $(1, 0)$ から点 $(0, 1)$ までの部分

(d) $\displaystyle\int_C (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^3) \cdot d\mathbf{r}$, C は原点 $(0, 0, 0)$ と点 $(1, 1, 1)$ を結ぶ直線

(e) $\int_C (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^3) \cdot d\mathbf{r}$, C は原点 $(0, 0, 0)$ と点 $(1, 1, 1)$ を $x = t, y = t^2, z = t^3$ に沿って結ぶ曲線

8.5 面積分 (surface integrals)

8.5.1 演習問題

1. 次の面積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\iint_S xy^2 dS$, ただし， $S: x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

(b) $\displaystyle\iint_S (6z, 3x + 2y - z, -x) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, ただし， $S: x^2 + y^2 = 9, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4$

(c) $\displaystyle\iint_S (6z, -4x, y) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, ただし， $S: 2x + 3y + 6z = 12, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

(d) $\displaystyle\iint_S (6z,-4x,y)\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$, ただし，　$S: x^2+y^2+z^2=a^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$

(e) $\displaystyle\iint_S (xy,-2y,z-x)\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$, ただし，　$S: z=x^2+y^2; x^2+y^2\leq 1$

8.6　ベクトル積分定理 (integral theorems of vector field)

8.6.1　演習問題

1.　次の線積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\oint_C (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$, ただし，　C は点 $(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$ を頂点とする正方形.

(b) $\displaystyle\oint_C (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$, ただし，　C は点 $(0,0)$ から点 $(\frac{\pi}{2},1)$ を放物線 $2x=\pi y^2$ に沿って進む.

(c) $\displaystyle\oint_{\partial S} -z^2dx+xy^2dy+zdz$, ただし，　$S: z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$

2.　次の面積分を求めよう．

(a) $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)dS$, ただし，　$S: z^2=3(x^2+y^2), 0\leq z\leq 3$

(b) $\displaystyle\iint_S \mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$, ただし，　$\mathbf{F}=(x^2-x,-xy,3z), S: z=2-\sqrt{x^2+y^2}, z\geq 0$

(c) $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$, ただし，　$\mathbf{F}=(x-z,x^3+yz,-3xy^3)$, $S: z=4-y^2$, $x=0, x=3, z=0$

(d) $\displaystyle\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, ただし，　S は 円柱 $x^2+y^2=9$ と平面 $z=0, z=3$ で囲まれた領域

3.　単連結な閉曲線 C で囲まれた領域の面積 A は，$\displaystyle\frac{1}{2}\oint xdy-ydx$ で与えられることを示そう．

4.　楕円 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$ の面積を求めよう．

5.　f,g をスカラー場とするとき次の式が成り立つことを示そう．
$\displaystyle\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}dS=\iiint_V (f\nabla^2 g+\mathrm{grad}f\cdot\mathrm{grad}g)dV$ ここで $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial n},\frac{\partial g}{\partial n}$ はそれぞれ f,g の S における外向き法線方向の方向微分係数を表わす．

第 9 章

確認問題詳解

0.1 数 (NUMBERS)

1.

(a) $\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}$ となり循環少数である．したがって，有理数

(b) $\frac{\pi}{4}$ は無理数．その理由は，もし $\frac{\pi}{4}$ が有理数ならば，ある有理数 q を用いて $\frac{\pi}{4} = q$ と表せる．これより，$\pi = 4q$ となり，$4q$ は有理数の積だから有理数．したがって，π も有理数となる．これは矛盾である．

2.

(a) $|-3.0| = 3.0$

(b) $|\pi| = \pi$

3.

(a) $|a+b+c| = |2+(-3)+(-5)| = |2-3-5| = |-6| = 6$

(b) $|a-b+c| = |2-(-3)+(-5)| = |2+3-5| = |0| = 0$

4.

(a) $9^{\frac{3}{2}} = (9^{\frac{1}{2}})^3 = 3^3 = 27$

(b) $27^{-\frac{1}{3}} = (27^{\frac{1}{3}})^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

5.

(a) $\sqrt[4]{a^5} = (a^5)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{5}{4}}$

(b) $\sqrt{a^{-2}\sqrt[3]{a}} = \sqrt{a^{-2}a^{\frac{1}{3}}} = (a^{-2+\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = (a^{-\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{5}{6}}$

(c) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^{-2}} \div a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{-2}{3}}a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = a^{-\frac{2}{6}} = a^{-\frac{1}{3}}$ **6.**

6.

(a) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72} = \sqrt{2\cdot 3^2} + \sqrt{2\cdot 5^2} + \sqrt{2^3 3^2} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

(b) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{10} + 2 = 7 - 2\sqrt{10}$

(c)

labelrenshu:0-1-6c $(4\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) = 8 + 12\sqrt{6} + \sqrt{6} + 9 = 17 + 13\sqrt{6}$ **7.**

7.

(a) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$

(b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2})}{n+1-(n-2)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2})}{3}$

(c) $\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}} = \frac{n+2-(n-1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}} = \frac{3}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}$

0.2 不等式 (INEQUALITIES)

1.

(a) 両辺から 2 を引いて左辺に x の項だけを残す

$$\begin{aligned} 2+3x &\le 5 \\ 3x &\le 5-2 \\ x &\le 1 \end{aligned}$$

したがって，$(-\infty, 1]$

(b) 両辺に 2 と 3 の最小公倍数 6 をかけて，分母を払う．

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1+x) &< \frac{1}{3}(1-x) \\ 3(1+x) &< 2(1-x) \\ 3+3x &< 2-2x \\ 3x+2x &< 2-3 \\ 5x &< -1 \\ x &< -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

したがって，$(-\infty, -\frac{1}{5})$

(c) 両辺を 4 で割る．

$$\begin{aligned} 4(x^2-3x+2) &> 0 \\ x^2-3x+2 &> 0 \\ (x-1)(x-2) &> 0 \end{aligned}$$

ここで，積 $(x-1)(x-2)$ が 0 になるのは，1 と 2 である．そこで，これらの点を数直線上に白抜きまるで印を付ける． これにより，数直線は次の 3 つの区間に分割される．

$$(-\infty, 1),\ (1, 2),\ (2, \infty)$$

これらの区間内では，積 $(x-1)(x-2)$ の符号 (sgn) は変わらない．

$(-\infty, 1)$ 　$\mathrm{sgn}[(x-1)(x-2)] = (-)(-) = +$

$(1, 2)$ 　$\mathrm{sgn}[(x-1)(x-2)] = (+)(-) = -$

$(2, \infty)$ 　$\mathrm{sgn}[(x-1)(x-2)] = (+)(+) = +$

これより，不等式の解は $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ となる．

(d) 両辺に x^2 をかけて分母を払う．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x} < x \\
&x < x^3 \\
&0 < x^3 - x \\
&0 < x(x+1)(x-1)
\end{aligned}
$$

ここで，積 $x(x+1)(x-1)$ が 0 になるのは，-1,0 と 1 である．そこで，これらの点を数直線上に白抜きまるで印を付ける． これにより，数直線は次の 4 つの区間に分割される．

$$(-\infty,-1),\ (-1,0),\ (0,1),\ (1,\infty)$$

これらの区間内では，積 $x(x+1)(x-1)$ の符号 (sgn) は変わらない．

$(-\infty,-1)$	$\mathrm{sgn}[x(x+1)(x-1)] = (-)(-)(-) = -$
$(-1,0)$	$\mathrm{sgn}[x(x+1)(x-1)] = (-)(+)(-) = +$
$(0,1)$	$\mathrm{sgn}[x(x+1)(x-1)] = (+)(+)(-) = -$
$(1,\infty)$	$\mathrm{sgn}[x(x+1)(x-1)] = (+)(+)(+) = +$

これより，不等式の解は $(-1,0)\cup(1,\infty)$ となる．

(e) 両辺に $(x+1)^2$ をかけて分母を払う．

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2-9}{x+1} &> 0 \\
(x^2-9)(x+1) &> 0 \\
(x+3)(x-3)(x+1) &> 0
\end{aligned}
$$

ここで，積 $(x+3)(x-3)(x+1)$ が 0 になるのは，-3,-1 と 3 である．そこで，これらの点を数直線上に白抜きまるで印を付ける． これにより，数直線は次の 4 つの区間に分割される．

$$(-\infty,-3),\ (-3,-1),\ (-1,3),\ (3,\infty)$$

これらの区間内では，積 $(x+3)(x-3)(x+1)$ の符号 (sgn) は変わらない．

$(-\infty,-3)$	$\mathrm{sgn}[(x+3)(x-3)(x+1)] = (-)(-)(-) = -$
$(-3,-1)$	$\mathrm{sgn}[(x+3)(x-3)(x+1)] = (+)(-)(-) = +$
$(-1,3)$	$\mathrm{sgn}[(x+3)(x-3)(x+1)] = (+)(-)(+) = -$
$(3,\infty)$	$\mathrm{sgn}[(x+3)(x-3)(x+1)] = (+)(+)(+) = +$

これより，不等式の解は $(-3,1)\cup(3,\infty)$ となる．

(f) 分母を通分すると，

$$\frac{5x-10}{(x-1)(x-6)} = \frac{5(x-2)}{(x-1)(x-6)} > 0$$

両辺に $(x-1)^2(x-6)^2$ をかけて分母を払う．

$$
\begin{aligned}
\frac{5(x-2)}{(x-1)(x-6)} &> 0 > 0 \\
5(x-2)(x-1)(x-6) &> 0
\end{aligned}
$$

ここで，積 $(x-1)(x-2)(x-6)$ が 0 になるのは，1,2 と 6 である．そこで，これらの点を数直線上に白抜きまるで印を付ける． これにより，数直線は次の 4 つの区間に分割される．

$$(-\infty,1),\ (1,2),\ (2,6),\ (6,\infty)$$

これらの区間内では，積 $(x-1)(x-2)(x-6)$ の符号 (sgn) は変わらない．

$(-\infty,1)$　$\mathrm{sgn}[(x-1)(x-2)(x-6)] = (-)(-)(-) = -$

$(1,2)$　$\mathrm{sgn}[(x-1)(x-2)(x-6)] = (+)(-)(-) = +$

$(2,6)$　$\mathrm{sgn}[(x-1)(x-2)(x-6)] = (+)(+)(-) = -$

$(6,\infty)$　$\mathrm{sgn}[(x-1)(x-2)(x-6)] = (+)(+)(+) = +$

これより，不等式の解は $(1,2)\cup(6,\infty)$ となる．

2. 両辺を 2 乗する．

$$\frac{x}{x+1},\frac{x+1}{x+2}$$

このとき，2 つの値は正なので，2 乗してもその大小関係は変わらない．分母をそろえると，

$$\frac{x^2+2x}{(x+1)(x+2)},\frac{x^2+2x+1}{(x+1)(x+2)}$$

これより，$\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ のほうが大きい．

3.

(a) $|x|<2$ とは $-2<x<2$ のことである．したがって，不等式の解は $(-2,2)$.

(b) $|x+2|<\frac{1}{4}$ とは，$-\frac{1}{4}<x+2<\frac{1}{4}$ のことである．これより，$-\frac{9}{4}<x<-\frac{7}{4}$. したがって，不等式の解は $(-\frac{9}{4},-\frac{7}{4})$

(c) $0<|x-3|<8$ とは，$0<|x-3|$ かつ $|x-3|<8$ のことである．$0<|x-3|$ とは $x\neq 3$ のことである．また，$|x-3|<8$ とは，$-8<x-3<8$，つまり，$-5<x<11$ のことである．これより，$-5<x<3$ または $3<x<11$ となる．したがって，不等式の解は $(-5,3)\cup(3,11)$

(d) $|2x+5|>3$ とは，$3<2x+5$ または $2x+5<-3$ のことである．$3<2x+5$ を解くと $-2<2x$ より $-1<x$ となる．また，$2x+5<-3$ を解くと，$2x<-8$ より $x<-4$ となる，したがって，不等式の解は $(-\infty,-4)\cup(-1,\infty)$

4. $|a-b|\leq|a|+|b|$ が成り立つことを示す．$|x|$ を $\sqrt{x^2}$ とおくと，

$$|a-b|^2=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\leq|a|^2+2|a||b|+|b|^2=(|a|+|b|)^2$$

ここで，両辺の平方根をとると

$$|a-b|\leq|a+b|$$

1.1 関数

1.

(a) $x=1$ のときの $f(x)=|2-x|$ の値を求めると，$f(1)=|2-1|=1$

(b) $x=1$ のときの $f(x)=4+10x-x^2$ の値を求めると，$f(1)=4+10-1=13$

(c) $x=1$ のときの $f(x)=1+\cos(x-1)$ の値を求めると，$f(1)=1+\cos(0)=1+1=2$

2.

(a) すべての実数 x に対して x^2-1 は実数となる．したがって，$f(x)=x^2-1$ の定義域は $(-\infty,\infty)$.

すべての x に対して，$x^2-1\geq -1$ が成り立つ．したがって，$f(x)=x^2-1$ の値域は $[-1,\infty)$.

(b) $\sqrt{x-1}$ は $x-1<0$ のとき定義されない．したがって，$f(x)=\sqrt{x-1}$ の定義域は $x-1\geq 0$．つまり，$[1,\infty)$.

定義域内のすべての x に対して，$\sqrt{x-1}\geq 0$ が成り立つ．したがって，$f(x)=\sqrt{x-1}$ の値域は $[0,\infty)$.

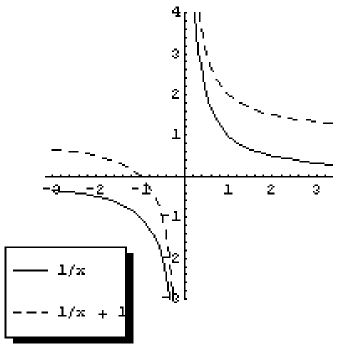
(c) すべての実数 x に対して $|\sin x|$ は実数となる．したがって，$f(x)=|\sin x|$ の定義域は $(-\infty,\infty)$.

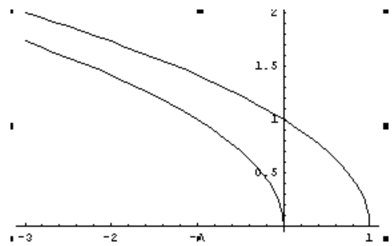
すべての x に対して，$0\leq|\sin x|\leq 1$ が成り立つ．したがって，$f(x)=|\sin x|$ の値域は $[0,1]$.

3.

(a) $y=f(x)+c$ は $y=f(x)$ のグラフを c だけ y 軸正の方向に平行移動.

(b) $y=f(x-a)$ は $y=f(x)$ のグラフを a だけ x 軸正の方向に平行移動.





4.

(a) $f(x)=2x+5$ より，$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(g(x))+5$　ここで，$g(x)=x^2$ より，$(f\circ g)(x)=2x^2+5$

また，$g(f(x))=(f(x))^2=(2x+5)^2$

(b) $f(x)=\frac{1}{x}$ より，　$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{g(x)}$　ここで，$g(x)=\frac{1}{x}$ より，

$$(f\circ g)(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

また，$g(f(x))=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$

(c) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ より，　$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x)+1}$　ここで，$g(x)=\frac{1}{x^2}$ より，

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x)+1}=x^2-\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=x^2-\frac{x^2}{1+x^2}\\&=\frac{x^4+x^2-x^2}{1+x^2}=\frac{x^4}{1+x^2}\end{aligned}$$

$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$ より，$g(f(x))=\frac{1}{(f(x))^2}=x^2(x+1)^2$

5.

(a) $f(x)=7x-4$ は 1 対 1 の関数であることを示す．つまり，$f(a)=f(b)$ ならば，$a=b$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}f(a)=f(b)&\Rightarrow 7a-4=7b-4\\&\Rightarrow 7a=7b\\&\Rightarrow a=b\end{aligned}$$

したがって，$f(x)=7x-4$ にはただ 1 つの逆関数が存在する．$f(x)=7x-4$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ は $f(f^{-1}(x))=x$ を満たす．したがって，$7f^{-1}(x)-4=x$ より，$f^{-1}(x)=\frac{x+4}{7}$

(b) $f(x)=(x+1)^3+2$ は 1 対 1 の関数であることを示す．つまり，$f(a)=f(b)$ ならば，$a=b$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}f(a)=f(b)&\Rightarrow (a+1)^3+2=(b+1)^3+2\\&\Rightarrow (a+1)^3=(b+1)^3\\&\Rightarrow (a+1)^3-(b+1)^3=0\\&\Rightarrow (a-b)((a+1)^2+(a+1)(b+1)+(b+1)^2)=0\end{aligned}$$

ここで，$(a+1)^2+(a+1)(b+1)+(b+1)^2=((a+1)+(\frac{b+1}{2}))^2+\frac{3(b+1)^2}{4}$ より，どんな実数 a,b でも 0 にならない．したがって，$a=b$ が成り立つ．

次に，$f(x)=(x+1)^3+2$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求める．$f(f^{-1}(x))=x$ より $y=f^{-1}(x)$ とおくと，$f(y)=(y+1)^3+2=x$ となる．この式を y について求めればよい．

$$\begin{aligned}(y+1)^3+2=x&\Rightarrow (y+1)^3=x-2\\&\Rightarrow y+1=\sqrt[3]{x-2}\\&\Rightarrow y=\sqrt[3]{x-2}-1\end{aligned}$$

(c) $f(x)=\frac{x}{|x|}$ は 2 つの異なる値 $x=1,2$ に対して，$f(1)=1$，$f(2)=1$ となるので，1 対 1 の関数ではない．

6.

(a) $f(x)=x^3$ より $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$．したがって，奇関数である．

(b) $f(x)=x(x^2+1)$ より $f(-x)=(-x)((-x)^2+1)=-x(x^2+1)=-f(x)$．したがって，奇関数である．

1.2 初等関数

1.

(a) $30°$ を弧度法に直すには，$1° = \frac{\pi}{180} rad$ を用いる．よって，$30° = (30)\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ となる．

(b) $40°$ を弧度法に直すには，$1° = \frac{\pi}{180} rad$ を用いる．よって，$40° = (40)\frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{9}$ となる．

(c) $72°$ を弧度法に直すには，$1° = \frac{\pi}{180} rad$ を用いる．よって，$72° = (72)\frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$ となる．

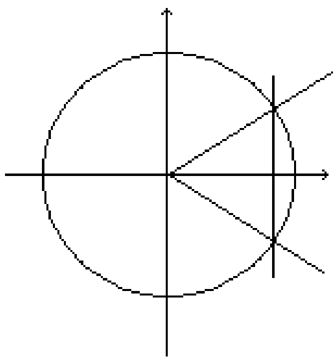
2.

(a) 直線と x 軸とのなす角は，直線の傾きより求める．$y = \sqrt{3}x$ の傾きは $\sqrt{3}$．つまり，x 軸方向に 1 変化すると y 軸方向に $\sqrt{3}$ 変化する．これより，1:2:$\sqrt{3}$ の直角三角形を思い起こすと，x 軸と直線のなす角は $\frac{\pi}{3}$ となる．

(b) 直線と x 軸とのなす角は，直線の傾きより求める．$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ の傾きは $\frac{1}{\sqrt{3}}$．つまり，x 軸方向に $\sqrt{3}$ 変化すると y 軸方向に 1 変化する．これより，1:2:$\sqrt{3}$ の直角三角形を思い起こすと，x 軸と直線のなす角は $\frac{\pi}{6}$ となる．

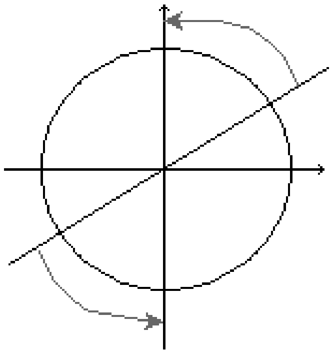
3.

(a) 次のような図を用いると簡単になる．



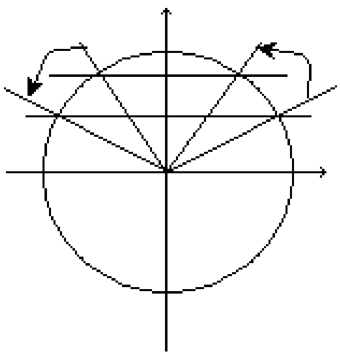
$\cos\theta$ が $\sqrt{3}/2$ より大きい θ の範囲を求めたいので，単位円を描き，x の値が $\sqrt{3}/2$ より大きくなる範囲を求めればよい．そこで，x 軸上に $\sqrt{3}/2$ の点をとり，y 軸に平行にこの点を通るように直線を引く．この直線と単位円の交点に原点から直線を引く．これで，θ の範囲は $[0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{11\pi}{6}, 2\pi]$ となる．

(b) 次のような図を用いると簡単になる．



$\tan\theta$ が $1/\sqrt{3}$ より大きい θ の範囲を求めたいので，単位円を描き，傾き $1/\sqrt{3}$ の直線を引く．この直線と単位円の交点から y 軸までの間，$tan\theta > 1/\sqrt{3}$ を満たす．したがって，θ の範囲は $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$ となる．

(c) 次のような図を用いると簡単になる．



$\sin\theta$ が $1/2$ より大きい θ の範囲と $\sin\theta$ が $\sqrt{3}/2$ より小さい範囲の積集合を求めればよい．そこで，y 軸上に $1/2$ と $\sqrt{3}/2$ の点をとり，x 軸に平行にこれらの点を通るように直線を引く．これらの直線と単位円の交点に原点から直線を引く．これで，θ の範囲は $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ となる．

4.

(a) $y = \tan^{-1} 0$ とおくと

$$0 = \tan y,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

これを満たす y は 0 しかないので、 $\tan^{-1} 0 = 0$

(b) $y = \sin^{-1} \frac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2} = \sin y,\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

これを満たす y は $\pi/6$ しかないので、 $\sin^{-1} \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$

(c) $y = \cos^{-1}\frac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2} = \cos y,\ 0 \leq y \leq \pi$$

これを満たす y は $\pi/3$ しかないので、 $\cos^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$. これより、$\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{2}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1.3 関数の極限

1.

(a) $\lim_{x\to 0}(2x-1) = \lim_{x\to 0} 2x - \lim_{x\to 0} 1 = 0 - 1 = -1$

(b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{\lim_{x\to 1} x}{\lim_{x\to 1}(x+1)} = \dfrac{1}{2}$

(c) $f(x)$、$g(x)$ が多項式で、$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ となったら、$f(x)$ と $g(x)$ は因子 $(x-a)$ をもつ.

$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2(x+1)}{2x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$

(d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)}{2x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{1}{2}$

(e) $\lim_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9}\dfrac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9}(\sqrt{x}+3) = 6$

(f) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+2) = 5$

(g) $\lim_{x\to 4}\dfrac{(x^2-3x-4)^2}{x-4} = \lim_{x\to 4}\dfrac{(x-4)^2(x+1)^2}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x-4)(x+1)^2 = 0$

(h) $\lim_{t\to 0}\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{1}{t+3} - \dfrac{1}{3}\right) = \lim_{t\to 0}\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{3-(t+3)}{3(t+3)}\right) = \lim_{t\to 0}\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{-t}{3(t+3)}\right) = -\dfrac{1}{9}$

(i) $\lim_{x\to 0} x\left(1 - \dfrac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} x\left(\dfrac{x-(x+1)}{x}\right) = -1$

2.

(a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1, \lim_{X\to 0}\dfrac{\sin X}{X} = 1$ より, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$

(b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{-\sin^2 x}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{x} = -1$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x + 1} = -1\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

(d) $x-\pi$ を t とおくと, $x\to\pi$ は $t\to 0$ と同値より,
$\lim_{x\to\pi}\dfrac{\sin\pi}{x-\pi} = \lim_{t\to 0}\dfrac{\sin\pi+t)}{t} = \lim_{t\to 0}\dfrac{-\sin t}{t} = -1$

1.4 連続関数

1.

(a) $|x-2|$ は x が 2 より小さいとき $-(x-2)$ となる． $\displaystyle\lim_{x\to 2-}\frac{x-2}{|x-2|}=\lim_{x\to 2-}\frac{x-2}{-(x-2)}=-1$

(b) $|x-2|$ は x が 2 より大きいとき $x-2$ となる． $\displaystyle\lim_{x\to 2+}\frac{x-2}{|x-2|}=\lim_{x\to 2+}\frac{x-2}{x-2}=1$

(c) $|x|-x$ は x が正のとき $x-x=0$ となる． $\displaystyle\lim_{x\to 1-}\sqrt{|x|-x}=\lim_{x\to 1-}0=0$

(d) $|x|-x$ は x が正のとき $x-x=0$ となる． $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\sqrt{|x|-x}=\lim_{x\to 1+}0=0$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1-}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1-}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$

(f) $\sqrt{x}$ は x が負のとき定義されない． $\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ は存在しない．

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 2+}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{\sqrt{(x-2)(x-1)}}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$ より，存在しない．

2. $\lim_{x\to a-}f(x)$ が $\lim_{x\to a+}f(x)$ と等しく，さらに $f(a)$ と等しいとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(x^2+4)=8,\ \lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}x^3=8$ ，さらに $f(2)=2^3=8$ より，$x=2$ で連続.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(x^2+4)=8,\ \lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}x^3=8$, しかし $f(2)=5$ より, $x=2$ は除去可能な不連続点.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=-2.$ また，$f(-1)=-2$ より，$x=2$ で連続.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(-x^2)=0,\ \lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(1-\sqrt{x})=1$ ，したがって，$x=0$ は真性不連続点.

3.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)$ が $f(1)$ と等しくなるように $f(1)$ を定めればよい．

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2.$ したがって，$f(1)=2.$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)$ が $f(1)$ と等しくなるように $f(1)$ を定めればよい．

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(2x^2+1)=3.\ \lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}3x^3=3$ したがって，$f(1)=3.$

4. $f(0)=-6, f(1)=1$ より，$f(x)=0$ の解は $(0,1)$ の間にある．そこで，$[0,1]$ の中点 $x=\frac{1}{2}$ を用いて $f(x)$ を求めると，$f(\frac{1}{2})=-\frac{5}{2}$ となる．中間値の定理より，解は $(\frac{1}{2},1)$ の間にある．そこで，この区間の中点 $x=\frac{3}{4}$ を用いて $f(x)$ を求めると，$f(\frac{3}{4})=-\frac{3}{4}$ となる．再び中間値の定理より，解は $(\frac{3}{4},1)$ の間にある．そこで，この区間の中点 $x=\frac{7}{8}$ を用いて $f(x)$ を求めると，$f(\frac{7}{8})=\frac{1}{8}$ となる．再び中間値の定理より，解は $(\frac{7}{8},1)$ の間にある．そこで，この区間の中点 $x=\frac{13}{16}$ を用いて $f(x)$ を求めると，$f(\frac{13}{16})=\frac{-5}{16}$ となる．中点を 1 回取るたびに，近似解と真の解との差は半分ずつになる．したがって，誤差を 0.1 以下にするには，中点を 4 回とればよい．したがって，近似解は $x=\frac{13}{16}$ である．

1.5 数列

1.

(a) どんな正の数 $n \geq N$ に対しても $\sqrt{n} < M$ となる M が存在すると仮定すると，どんな正の数 $n \geq N$ に対しても $n < M^2$ となり，$\lim_{n\to\infty} n \neq \infty$ となる．これは矛盾である．したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ は数列の極限値の基本である．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2} = 0$

(c) 分子と分母から n の最大次数をくくりだす.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+\frac{1}{n}} = \infty$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2^n}) = 1$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1-n}{n(n+1)} = 0$

2.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$ より，

$\{\frac{2}{n}\}$ は有界．$\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n}{n+1} < 1$ より，単調減少.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{4 - \frac{1}{n}} = 4$ より，$\{\sqrt{4 - \frac{1}{n}}\}$ は有界.

$\displaystyle\frac{1}{n}$ が単調減少より，$\{\sqrt{4 - \frac{1}{n}}\}$ は単調増加.

3.

(a) $\displaystyle a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{n!}$

(b) $b_k = a_k - a_{k-1}$ とおくと，$b_k = 2$ となり，

$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots (a_2 - a_1) + a_1 = 2(n-1) + 1 = 2n - 1$

(c) $b_k = a_k - a_{k-1}$ とおくと，$b_k = 2k - 1$ となり，

$$\begin{aligned} a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots (a_2 - a_1) + a_1 \\ &= 2((n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1) + n - 1 + 1 = n^2 \end{aligned}$$

1.6 超越関数

1.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{e} < 1$．したがって，定理 1.15 の系より，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} = \infty$ より，$\{a_n\}$ は発散.

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ より, 何も結論付けられない．そこで, $(n+1)a_{n+1} = na_n$ と書き直し，$b_n = na_n$ とおくと，$b_{n+1} = b_n$，$b_1 = a_1 = 1$ となり，$b_n = 1$ となる．これより，

$a_n = \frac{1}{n}$．したがって，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.

(a) $\log 20 = \log 4 \cdot 5 = \log 4 + \log 5 = 1.39 + 1.61 = 3.00$

(b) $\log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 = 4(0.69) = 2.76$

(c) $\log 3^4 = 4 \log 3 = 4(1.10) = 4.40$

(d) $\log 0.01 = \log 10^{-2} = -2 \log 10 = -2(2.30) = -4.60$

(e) $\log \sqrt{630} = \frac{1}{2} \log 630 = \frac{1}{2} \log 3^2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = \frac{1}{2}(2(1.1) + 1.95 + 0.69 + 1.61) = 3.225$

(f) $\log 0.4 = \log \frac{2}{5} = \log 2 - \log 5 = 0.69 - 1.61 = -0.92$

3.

(a) $\log x = 2$ より $x = e^2$

(b) $\log x = -1$ より $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

(c) $(2 - \log x) \log x = 0$ より $2 - \log x = 0$ または $\log x = 0$．したがって，$x = e^2$ または $x = 1$.

(d) $\log (2x + 1)(x + 2) = 2 \log(x + 2)$ より

$$\log(2x + 1) + \log(x + 2) - 2 \log(x + 2) = 0$$

$$\log(2x + 1) - \log(x + 2) = 0$$

したがって，

$$\frac{2x + 1}{x + 2} = 1$$

両辺に $(x + 2)^2$ をかけると

$$(2x + 1)(x + 2) = (x + 2)^2$$

$$(x + 2)(2x + 1 - x - 2) = (x + 2)(x - 1) = 0$$

これより，$x = -2, 1$．真数条件より，$x = -2$ は不適．したがって，$x = 1$

2.1 導関数

1.

(a)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

(b)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x + h - 1} - \sqrt{x - 1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x + h - 1} - \sqrt{x - 1})(\sqrt{x + h - 1} - \sqrt{x - 1})}{h(\sqrt{x + h - 1} + \sqrt{x - 1})} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - 1 - (x - 1)}{h(\sqrt{x + h - 1} + \sqrt{x - 1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x + h - 1} + \sqrt{x - 1})} = \frac{1}{2\sqrt{x - 1}}
\end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x+h)^2}{hx^2(x+h)^2)} = \lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{hx^2(x+h)^2)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(-2x+h)}{hx^2(x+h)^2)} = \lim_{h\to 0}\frac{-2x+h}{x^2(x+h)^2)} = -\frac{2}{x^3}
\end{aligned}
$$

2.

(a)

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{5(2+h)-(2+h)^2-(5\cdot 2-2^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{10+5h-4-4h-h^2-6}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-h^2+h}{h} = \lim_{h\to 0}(-h+1) = 1
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(3(h+2)-7)^2-(3\cdot 2-7)^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(3h-1)^2-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{9h^2-6h+1-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(9h-6)}{h} = -6
\end{aligned}
$$

3.

(a) 接線の方程式は，接線が通る点 (x_0, y_0) と傾き m が与えられると，$y - y_0 = m(x - x_0)$ で求めることができる．$x = a$ における接線の傾き m は $m = f'(a)$ で与えられる．そこで，まず，$f'(x)$ を求めると，$f'(x) = 2x - 5$ より，$f'(2) = -1$．次に，接線は点 $(a, f(a)) = (2, -3)$ を通るので，求める接線の方程式は $y + 3 = -(x - 2)$．整理すると $y = -x - 1$ となる．

(b) 接線の方程式は，接線が通る点 (x_0, y_0) と傾き m が与えられると，$y - y_0 = m(x - x_0)$ で求めることができる．$x = a$ における接線の傾き m は $m = f'(a)$ で与えられる．そこで，まず，$f'(x)$ を求めると，$f'(x) = -3x^2$ より，$f'(2) = -12$．次に，接線は点 $(a, f(a)) = (2, -3)$ を通るので，求める接線の方程式は $y + 3 = -12(x - 2)$．整理すると $y = -12x + 21$ となる．

(c) 接線の方程式は，接線が通る点 (x_0, y_0) と傾き m が与えられると，$y - y_0 = m(x - x_0)$ で求めることができる．$x = a$ における接線の傾き m は $m = f'(a)$ で与えられる．そこで，$f'(2)$

を求める．

$$
\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{4+h}-\sqrt{4}(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})}{h(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})} = \lim_{h\to 0}\frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}-\sqrt{4})} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+\sqrt{4}} = \frac{1}{2\sqrt{4}}
\end{aligned}
$$

より，$f'(4) = \dfrac{1}{4}$．次に，接線は点 $(a, f(a)) = (4, 2)$ を通るので，求める接線の方程式は $y - 2 = \dfrac{1}{4}(x-4)$．整理すると $y = \dfrac{1}{4}x + 1$ となる．

4.

(a)

$$y' = (11x^5 - 6x^3 + 8)' = (11x^5)' - (6x^3)' + 8' = 55x^4 - 18x^2$$

(b)

$$y' = (-\frac{1}{x^2})' = -\frac{-(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
y' &= ((x^2-1)(x-3))' = (x^2-1)'(x-3) + (x^2-1)(x-3)' = 2x(x-3) + x^2 - 1 \\
&= 2x^2 - 6x + x^2 - 1 = 3x^2 - 6x + 1
\end{aligned}
$$

(d)

$$y' = (\frac{x-1}{x-2})' = \frac{(x-1)'(x-2)-(x-1)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{x-2-(x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

(e)

$$
\begin{aligned}
y' &= (\frac{x^2-1}{2x+3})' = \frac{(x^2-1)'(2x+3)-(x^2-1)(2x+3)'}{(2x+3)^2} = \frac{2x(2x+3)-2(x^2-1)}{(2x+3)^2} \\
&= \frac{4x^2+6x-2x^2+2}{(2x+3)^2} = \frac{2x^2+6x+2}{(2x+3)^2} = \frac{2(x^2+3x+1)}{(2x+3)^2}
\end{aligned}
$$

(f)

$$
\begin{aligned}
y' &= (\frac{6-1/x}{x-2})' = \frac{(6-1/x)'(x-2)-(6-1/x)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{\frac{1}{x^2}(x-2)-(6-\frac{1}{x})}{(x-2)^2} \\
&= \frac{x-2-6x^2+x}{x^2(x-2)^2} = \frac{-6x^2+2x-2}{x^2(x-2)^2} = \frac{-2(3x^2-x+1)}{x^2(x-2)^2}
\end{aligned}
$$

(g)

$$
\begin{aligned}
y' &= (\frac{1+x^4}{x^2})' = \frac{(1+x^4)'x^2-(1+x^4)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{4x^3x^2-(1+x^4\cdot 2x}{x^4} \\
&= \frac{4x^5-2x-2x^5}{x^4} = \frac{2x^5-2x}{x^4} = \frac{2(x^4-1)}{x^3}
\end{aligned}
$$

2.2 導関数の計算

1.

(a) $y = x^{1/n}, x > 0$ より，$x = y^n$．ここで，逆関数の微分法を用いると，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{1-n} = \frac{1}{n}(x^{\frac{1}{n}})^{1-n} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

(b) $y = \sqrt{x}, x > 0$ より，$x = y^2$．ここで，逆関数の微分法を用いると，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2.

(a) $y = (x^2+1)^{2004}$ は $t = x^2+1$ と $y = t^{2004}$ の合成関数である．したがって，合成関数の微分法より，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{d(t^{2003})}{dt}\frac{d(x^2+1)}{dx} \\ &= 2004t^{2003}(2x) = 4008x(x^2+1)^{2003}\end{aligned}$$

(b) $y = (x^2+\frac{1}{x^2})^3$ は $t = x^2+\frac{1}{x^2}$ と $y = t^3$ の合成関数である．したがって，合成関数の微分法より，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{d(t^3)}{dt}\frac{d(x^2+\frac{1}{x^2})}{dx} \\ &= 3t^2(2x-\frac{2}{x^3}) = 6(x^2+\frac{1}{x^2})(x-\frac{1}{x^3})\end{aligned}$$

(c) $y = [(2x+1)^2+(x+1)^2]^3$ は $t = (2x+1)^2+(x+1)^2$ と $y = t^3$ の合成関数である．したがって，合成関数の微分法より，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d(t^3)}{dt}\frac{d((2x+1)^2+(x+1)^2)}{dx}$$

ここで，$(2x+1)^2$ は $u = 2x+1$ と $v = u^2$ の合成関数．また，$(x+1)^2$ も $s = x+1$ と $t = s^2$ の合成関数である．したがって，

$$\frac{d((2x+1)^2+(x+1)^2)}{dx} = 2(2x+1)\cdot 2 + 2(x+1) = 10x+6 = 2(5x+3)$$

これより，

$$\frac{dy}{dx} = 3((2x+1)^2+(x+1)^2)^2\cdot 2(5x+3) = 6(5x+3)(5x^2+6x+2)^2$$

3.

(a) $x = t+1,\ y = t^2 - 1$ と x, y が媒介変数 t で与えられているので，媒介変数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = 2t = 2(x-1)$$

(b) $x^2 + y^2 = 1$ は中心 $(0,0)$ で半径 1 の円 (単位円) を表している．そこで，極座標を用いて表すと，$x = \cos t,\ y = \sin t$ と x, y が媒介変数 t で表せる．したがって，媒介変数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{x}{y}$$

4.

(a)

$$(x^2 \log x)' \underbrace{=}_{\text{積の微分法}} (x^2)' \log x + x^2 (\log x)' = 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \log x + x$$

(b)

$$\begin{aligned}(x^3 \sin 2x)' &\underbrace{=}_{\text{積の微分法}} (x^3)' \sin 2x + x^3 (\sin 2x)' = 3x^2 \sin 2x + x^3 \cdot 2\cos 2x \\ &= 3x^2 \sin 2x + 2x^3 \cos 2x\end{aligned}$$

(c)

$$(\sin^{-1} 2x)' \underbrace{=}_{\text{合成関数の微分法}} \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2x)' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

(d)

$$(\sqrt{e^x + 1})' \underbrace{=}_{\text{合成関数の微分法}} \frac{1}{2\sqrt{e^x+1}} (e^x + 1)' = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$$

(e)

$$\begin{aligned}((\sin(x+1))^3)' &\underbrace{=}_{\text{合成関数の微分法}} 3(\sin(x+1))^2 (\sin(x+1))' \\ &= 3(\sin(x+1))^2 \cos(x+1)(x+1)' \\ &= 3(\sin(x+1))^2 \cos(x+1)\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}(x \sin^{-1} 2x)' &\underbrace{=}_{\text{積の微分法}} (x)' \sin^{-1} 2x + x(\sin^{-1} 2x)' \\ &= \sin^{-1} 2x + x\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}(2x)' = \sin^{-1} 2x + \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\end{aligned}$$

2.3 高次導関数

1.

(a) $y(t) = 4+3t-t^2$ より，初期値 $t_0 = 0$ における位置は $y(0) = 4$. 速度は $y'(0) = v(0) = 3$, 加速度は $y''(0) = a(0) = -2$

(b) $y(t) = t^3 - 6t$ より，初期値 $t_0 = 0$ における位置は $y(0) = 0$. 速度は $y'(0) = v(0) = -6$, 加速度は $y''(0) = a(0) = 0$. 速さは速度の絶対値より，速さは 6.

(c) $y(t) = \dfrac{18}{t+2}$ より，$y' = -\dfrac{18}{(t+2)^2}$, $y'' = \dfrac{36}{(t+2)^3}$. 初期値 $t_0 = 0$ における位置は $y(0) = 9$. 速度は $y'(0) = v(0) = -\frac{9}{2}$, 加速度は $y''(0) = a(0) = \frac{9}{2}$. 速さは $\frac{9}{2}$

2.

(a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ より $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{x}{sqrtx^2+1}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^3}$$

(b) $f(x) = x\log x$ より $f'(x) = logx + x\frac{1}{x} = \log x + 1$,

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

(c) $f(x) = e^x \sin x$ より $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$,

$$f''(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$$

2.4 関数の性質

1.

(a) $f(x) = x^2$ は区間 $[1,2]$ で連続で，区間 $(1,2)$ で微分可能である．$f'(\xi) = 2\xi$ で

$$f'(\xi) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{4-1}{1} = 3$$

より，$\xi = \frac{3}{2}$.

(b) $f(x) = x^3$ は区間 $[1,3]$ で連続で，区間 $(1,3)$ で微分可能である．$f'(\xi) = 3\xi^2$ で

$$f'(\xi) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{27-1}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

より，$3\xi^2 = 13$. これより，$\xi = \pm\sqrt{\frac{13}{3}}$ となるが，$-\sqrt{\frac{13}{3}}$ は区間に入っていないので，$\xi = \sqrt{\frac{13}{3}}$

(c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ は区間 $[0,1]$ で連続で，区間 $(0,1)$ で微分可能である．$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ で

$$f'(\xi) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{0-1}{1} = -1$$

より，$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -1$．これより，$x = \sqrt{1-x^2}$, $x^2 = 1-x^2$, $2x^2 = 1$ より，$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ となるが，$-\frac{1}{\sqrt{2}}$ は区間に入っていないので，$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2.

(a) $f(x) = x^3-3x+2$ の導関数 $f'(x) = 3x^2-3$ より，極値の候補は，$3x^2-3 = 3(x^2-1) = 0$ を満たす $x = \pm 1$ である．また，$f''(x) = 6x$ より，変曲点の候補は $6x = 0$ を満たす $x = 0$ である．これらの点で何がおきているかを調べるため増減表を描くと，

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$

となる．これより，$x = -1$ で極大値 $f(-1) = 4$ をとり，$x = 1$ で極小値 $f(1) = 0$ をとる．曲線の凹凸は $f''(x)$ により調べることができ，$x < 0$ で上に凸，$x > 0$ で下に凸となる．最後に変曲点は，$f''(x)$ が符号を変えるところであるから，$x = 0, y = 2$ である．

(b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ の導関数 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ より，極値の候補は，$x^2 - 1 = 0$ を満たす $x = \pm 1$ である．また，$f''(x) = \frac{2}{x^3}$ より，変曲点の候補はない．これらの点で何がおきているかを調べるため増減表を描くと，

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$		$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	2	$\nearrow$

となる．これより，$x = -1$ で極大値 $f(-1) = -2$ をとり，$x = 1$ で極小値 $f(1) = 2$ をとる．曲線の凹凸は $f''(x)$ により調べることができ，$x < 0$ で上に凸，$x > 0$ で下に凸となる．

(c) $f(x) = x(x+1)(x+2)$ の導関数 $f'(x) = 3x^2+6x+2$ より，極値の候補は，$3x^2+6x+2 = 0$ を満たす $x = \frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$ である．また，$f''(x) = 6x+6$ より，変曲点の候補は $x = -1$．これらの点で何がおきているかを調べるため増減表を描くと，

x		$-1-\frac{1}{\sqrt{3}}$		-1		$-1+\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$

となる．これより，$x = -1-\frac{1}{\sqrt{3}}$ で極大値 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ をとり，$x = -1+\frac{1}{\sqrt{3}}$ で極小値 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ をとる．曲線の凹凸は $f''(x)$ により調べることができ，$x < -1$ で上に凸，$x > -1$ で下に凸となる．最後に変曲点は，$f''(x)$ が符号を変えるところであるから，$x = -1, y = 0$ である．

(d) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ の導関数 $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ より，極値の候補は，$1 - x^2 = 0$ を満たす $x = \pm 1$ である．また，$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$ より，変曲点の候補は $x = 0, \pm\sqrt{3}$．これらの点で何がおきているかを調べるため増減表を描くと，

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$

となる．これより，$x=1$ で極大値 $\frac{1}{2}$ をとり，$x=-1$ で極小値 $-\frac{1}{2}$ をとる．曲線の凹凸は $f''(x)$ により調べることができ，$(-\infty,-\sqrt{3}),(0,\sqrt{3})$ で上に凸，$(-\sqrt{3},0),(\sqrt{3},\infty)$ で下に凸となる．最後に変曲点は，$f''(x)$ が符号を変えるところであるから，$x=-\sqrt{3}, y=-\frac{\sqrt{3}}{4}$, $x=0, y=0$，と $x=\sqrt{3}, y=\frac{\sqrt{3}}{4}$ である．

(e) $f(x)=|x-1||x+2|=\begin{cases} x^2+x-2, & x\leq -2, x\geq 1 \\ -(x^2+x-2), & -2<x<1 \end{cases}$ の導関数

$f'(x)=\begin{cases} 2x+1, & x\leq -2, x\geq 1 \\ -2x-1, & -2<x<1 \end{cases}$ より，極値の候補は，$x=-\frac{1}{2}$ である．また，

$f''(x)=\begin{cases} 2, & x<-2, x>1 \\ -2, & -2<x<1 \end{cases}$ より，変曲点の候補はなし．これらの点で何がおきているかを調べるため増減表を描くと，

x		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$

となる．これより，$x=-\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{9}{4}$ をとる．曲線の凹凸は $f''(x)$ により調べることができ，$x<-2$ と $x>1$ で下に凸，$-2<x<1$ で上に凸となる．最後に変曲点は，$f''(x)$ が符号を変えるところであるから無い．

3.

(a) $x+y=40$ のとき，xy の最大値を求める．$y=40-x$ より，$xy=x(40-x)$．ここで，$f(x)=x(40-x)$，$0\leq x\leq 40$ とおくと，$f'(x)=-2x+40$，$f''(x)=-2$ となる．極値の候補は $f'(x)=0$ より，$x=20$ となり，$f''(x)<0$ より，$x=20$ で極大値 $f(20)=400$ をとる．ここで，端点での値 $f(0)=0$ と $f(40)=0$ と比較すると，$f(20)$ が最大値となる．

(b) x 軸上の正の点を x とすると，正四角形の底辺は $2x$ で高さは $f(x)=4-x^2$ となる．そこで，この四角形の面積を $A(x)=2x(4-x^2), 0\leq x\leq 2$ とおくと，$A'(x)=-6x^2+8$, $A''(x)=-12x$ となる．極値の候補は $A'(x)=0$ より，$x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$．$f''(\frac{2}{\sqrt{3}})<0$ より，$x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ で極大値 $A(\frac{2}{\sqrt{3}})=\frac{32\sqrt{3}}{9}$ をとる．ここで，端点での値 $A(0)=0$ と $A(2)=0$ と比較すると，$A(\frac{2}{\sqrt{3}})=\frac{32\sqrt{3}}{9}$ が最大値となる．

(c) 中心 $(0,0)$ で半径 4 の円の方程式は $x^2+y^2=4^2$ となる．ここで，正四角形の 1 つの頂点を第 1 象限にとり，その点の x 座標を x とすると，y 座標は $\sqrt{16-x^2}$ となる．このとき，正四角形の面積は $2x\cdot 2y$ で与えられるので，正四角形の面積を $A(x)=4x\sqrt{16-x^2}, 0\leq x\leq 4$ とおくと，$A'(x)=\frac{-12x^2+64}{\sqrt{16-x^2}}$, $A''(x)=\frac{12x^3-320x}{(16-x^2)^3/2}$ となる．極値の候補は $A'(x)=0$ より，$x=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$．

$f''(\frac{4}{\sqrt{3}}) < 0$ より，$x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ で極大値 $A(\frac{4}{\sqrt{3}}) = \frac{64\sqrt{2}}{3}$ をとる．ここで，端点での値 $A(0) = 0$ と $A(4) = 0$ と比較すると，$A(\frac{4}{\sqrt{3}}) = \frac{64\sqrt{2}}{3}$ が最大値となる．

(d) 楕円 $x^2+2y^2 = 2$ の接線と $y = 6-x$ が平行のとき, 最短距離を得る．$x^2+2y^2 = 2$ の両辺を x で微分すると $2x+4y\frac{dy}{dx} = 0$ より, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$．これが $y = 6-x$ と平行になるには, $\frac{-x}{y} = -1$ より，$x = 2y$. これより，$x^2+2y^2 = 4y^2+2y^2 = 2$ となり，$y^2 = \frac{1}{3}$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$．ここで，点 $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ と $y = 6-x$ の距離を求めると，$d = \frac{|\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-6|}{\sqrt{2}} = \frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ となる．

2.5 曲線の概形

1.

(a) $3x-1 = 0$ より，$x = \frac{1}{3}$ は漸近線. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{3x-1} = \frac{1}{3}$ より，$y = \frac{1}{3}$ は漸近線.

(b) $x-2 = 0$ より，$x = 2$ は漸近線. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x-2} = \pm\infty$ より，x 軸に平行な漸近線はなし．しかし，$y = x+2+\frac{4}{x-2}$ と書けるので，$y = x+2$ は漸近線

(c) $x^2-9 = 0$ より，$x = \pm 3$ は漸近線. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2-9} = 0$ より，$y = 0$ は漸近線

2.

(a) $f(x) = x^{1/3}$ より，$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{2/3}}$．ここで，$f'(0-) = \lim_{x\to 0-}f'(x) = \infty, f'(0+) = \infty$ より，点 $(0,0)$ で垂直接線を持っている．

(b) $f(x) = x^{2/3}$ より，$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{1/3}}$．ここで，$f'(0-) = \lim_{x\to 0-}f'(x) = -\infty, f'(0+) = \infty$ より，点 $(0,0)$ で垂直カスプを持っている．

(c) $x \geq 2$ のとき，$f(x) = \sqrt{x-2}$ より，$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$. ここで，$f'(2+) = \lim_{x\to 2+}f'(x) = \infty$．また，$x < 2$ のとき，$f(x) = \sqrt{2-x}$ より，$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$．ここで，$f'(2-) = \lim_{x\to 2-}f'(x) = -\infty$. したがって，点 $(2,0)$ で垂直カスプを持っている．

2.6 不定形の極限値

1.

(a) $\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = (\frac{0}{0})$ 不定形．そこで，L'Hospital の定理を用いると，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} &\overset{*}{\overbrace{=}} \lim_{x\to 0+}\frac{\cos x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x\to 0+}2\sqrt{x}\cos x = 0\end{aligned}$$

(b) $\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x} = (\frac{0}{0})$ 不定形．そこで，L'Hospital の定理を用いると，

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x} \overset{*}{\overbrace{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$$

(c) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = (\frac{0}{0})$ 不定形．そこで，L'Hospital の定理を用いると，

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \overbrace{=}^{*} \lim_{x\to4}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4}$$

(d) $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x} = (\frac{0}{0})$ 不定形．そこで，L'Hospital の定理を用いると，

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x} \overbrace{=}^{*} \lim_{x\to0} 2^x \log x = \log 2$$

(e) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x} = (\frac{0}{0})$ 不定形．そこで，L'Hospital の定理を用いると，

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x} \overbrace{=}^{*} \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{3} = 0$$

(f) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1} = (\frac{\infty}{\infty})$ 不定形．そこで，L'Hospital の定理を用いると，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1} \overbrace{=}^{*} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1} = 1$$

(g) $\lim_{x\to\infty}\frac{2\sin x}{x} = 0$

(h) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x} = (\frac{0}{0})$ 不定形．そこで，L'Hospital の定理を用いると，

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x} \overbrace{=}^{*} \lim_{x\to0}(e^x+e^{-x}) = 2$$

3.1 不定積分

テキスト 99 ページの積分公式を用います．

1.

(a) $\displaystyle\int(2x-3)\,dx \underbrace{=}_{(1)} 2\cdot\frac{x^2}{2} - 3x + c = x^2 - 3x + c$

(b) $\displaystyle\int 5x^4\,dx \underbrace{=}_{(1)} 5\cdot\frac{x^5}{5} + c = x^5 + c$

(c) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2}\,dx \underbrace{=}_{(1)} \int x^{2/3}dx = \frac{3}{5}x^{5/3} + c$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \underbrace{=}_{(1)} \int x^{-1/2}dx = 2x^{1/2} + c$

(e) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \underbrace{=}_{(6)} \int \tan x\,dx = \log|\sec x| + c$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \underbrace{=}_{(7)} \int \sec^2 x dx = \tan x + c$

(g) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}(x + \frac{\sin 2x}{2}) + c$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,dx \underbrace{=}_{(9)} \int \frac{1}{x^2-2^2}\,dx = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx \underbrace{=}_{(10)} \int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$

3.2 置換積分法

1.

与えられた積分をテキスト 99 ページの公式の形に変形する．

(a) $t=2x$，$dt=2dx$ より，
$\displaystyle\int \sin 2x\,dx = \int \sin t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = \frac{1}{2}(-\cos t)+c = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$
(b) $t=x^2+1$，$dt=2xdx$ より，
$\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{dt/2}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\log|t|+c = \frac{1}{2}\log(x^2+1)+c$
(c) $t=2x$，$dt=2dx$ より，
$\displaystyle\int e^{2x}\,dx = \int e^t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + c = \frac{1}{2}e^{2x}+c$
(d) $t=\log x$，$dt=\frac{1}{x}dx$ より，
$\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t|+c = \log|\log x|+c$
(e) $t=x^2$，$dt=2xdx$ より，
$\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx = \int e^t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t+c = \frac{1}{2}e^{x^2}+c$
(f) $t=\sin x$，$dt=\cos x dx$ より，
$\displaystyle\int \sin^2 x\cos x\,dx = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3}+c = \frac{\sin^3 x}{3}+c$
(g) $t=1+x$ とおくと，$dt=dx$．また，$x=t-1$ となる．これより，

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x}\,dx &= \int (t-1)\sqrt{t}\,dt = \int (t^{3/2}-t^{1/2})\,dt \\ &= \frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2} + c = \frac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + c\end{aligned}$$

(h) $t=\sin x+\cos x$，$dt=(\cos x-\sin x)dx$ より，
$\displaystyle\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t|+c = \log|\sin x+\cos x|+c$
(i) $t=1+e^x$，$dt=e^x dx$ より，
$\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t|+c = \log(1+e^x)+c$

3.3 部分積分法

置換積分法でうまく解けなかったときに用いる．

1.

(a) $\left\{\begin{array}{lll} u=x & & dv=e^x dx \\ & \searrow & \\ du=dx & \leftarrow & v=e^x \end{array}\right.$ より

$$\begin{aligned}\int xe^x\, dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + c\end{aligned}$$

(b) $\left\{\begin{array}{ll} u=x & dv=sinxdx \\ du=dx & v=-\cos x \end{array}\right.$ より

$$\begin{aligned}\int xsinx\, dx &= -x\cos x - \int(-cosx)dx \\ &= -x\cos x + \sin x + c\end{aligned}$$

(c) $\left\{\begin{array}{ll} u=x & dv=e^{2x}dx \\ du=dx & v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right.$ より

$$\begin{aligned}\int xe^{2x}\, dx &= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx \\ &= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c\end{aligned}$$

(d) $\left\{\begin{array}{ll} u=x^2 & dv=e^x dx \\ du=2x\, dx & v=e^x \end{array}\right.$ より

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\, dx &= x^2e^x - 2\int xe^x dx \quad \left(\begin{array}{ll} u=x & dv=e^x dx \\ du=dx & v=e^x \end{array}\right] \\ &= x^2e^x - 2[xe^x - e^x] + c \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c = (x^2-2x+2)e^x + c\end{aligned}$$

(e) $\left\{\begin{array}{ll} u=x^2 & dv=\sin x dx \\ du=2x\, dx & v=-\cos x \end{array}\right.$ より

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\, dx &= -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx \quad \left(\begin{array}{ll} u=x & dv=\cos x\, dx \\ du=dx & v=\sin x \end{array}\right] \\ &= -x^2\cos x + 2[x\sin x + \cos x] + c\end{aligned}$$

(f)

まず，$\int x^5 e^{x^3}\, dx = \int x^3 \cdot x^2 e^{x^3}\, dx$ と書き直し，$t = x^3$ とおくと，

$$\begin{cases} u = x^3 & dv = x^2 e^{x^3} dx \\ du = 3x^2\ dx & v = \frac{1}{3}e^3 \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned}\int x^3 \cdot x^2 e^{x^3}\ dx &= \frac{1}{3}x^3 e^{x^3} - \int x^2 e^{x^3}\ dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3}e^{x^3} + c \\ &= \frac{1}{3}e^{x^3}(x^3 - 1) + c\end{aligned}$$

(g) $\begin{cases} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \sin x \end{cases}$ より

$$\begin{aligned}\int x \cos x\ dx &= x \sin x - \int \sin x\ dx \\ &= x \sin x + \cos x + c\end{aligned}$$

3.4 部分分数分解

全ての不定積分は有理関数に変形できれば必ず求めることができる.

1.

(a) $\dfrac{7}{(x-2)(x+5)}$ は有理関数で分子の次数 $<$ 分母の次数なので，部分分数分解すると，$(x-2)(x-5)$ の因数 $x-2$ と $x+5$ を分母に持つ分数の和で表せる.

$$\frac{7}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

ここで分母を払い整理すると

$$7 = A(x+5) + B(x-2) = (A+B)x + 5A - 2B$$

ここで左辺と右辺が恒等的に等しいことに注意すると，次の連立方程式を得る.

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 5A - 2B = 7 \end{cases}$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{-7} = 1$$

これをもとの式に代入すると $B = -1$ となるので

$$\frac{7}{(x-2)(x+5)} = \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+5}$$

(b) $\dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}$ は有理関数で分子の次数 $<$ 分母の次数なので，部分分数分解すると，$x(x-1)(x+1)$ の因数 $x, x-1, x+1$ を分母に持つ分数の和で表せる．

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

ここで分母を払い整理すると

$$x^2+1 = A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x) = (A+B+C)x^2 + (B-C)x - A$$

ここで左辺と右辺が恒等的に等しいことに注意すると，次の連立方程式を得る．

$$\left\{\begin{array}{l} A+B+C=1 \\ B-C=0 \\ A=-1 \end{array}\right.$$

$A=-1$ より次の連立方程式を得る．

$$\left\{\begin{array}{l} B+C=2 \\ B-C=0 \end{array}\right.$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1$$

これを上の式に代入すると $C=1$ となるので

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

(c) $\dfrac{x^2+3}{x^2-3x+2}$ は有理関数で，分子の次数が分母の次数以上なので，まず分子を分母で割ると

$$\frac{x^2+3}{x^2-3x+2} = 1 + \frac{3x+1}{x^2-3x+2} = \frac{3x+1}{(x-2)(x-1)}$$

となる．次に $\frac{x^2+3}{(x-2)(x-1)}$ を部分分数分解すると，$(x-2)(x-1)$ の因数 $x-2$ と $x-1$ を分母に持つ分数の和で表せる．

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$$

ここで分母を払い整理すると

$$3x+1 = A(x-1) + B(x-2) = (A+B)x - (A+2B)$$

ここで左辺と右辺が恒等的に等しいことに注意すると，次の連立方程式を得る．

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=3 \\ A+2B=-1 \end{array}\right.$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{7}{1} = 7$$

これをもとの式に代入すると $B = -4$ となるので

$$\frac{3x+1}{x^2-3x+2} = \frac{7}{x-2} + \frac{-4}{x-1}$$

(d) $\dfrac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}$ は有理関数で分子の次数 $<$ 分母の次数なので，部分分数分解すると，$(x-1)^2(x+1)$ の因数 $x-1, (x-1)^2, x+1$ を分母に持つ分数の和で表せる．

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

ここで分母を払い整理すると

$$x^2 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 = (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C)$$

ここで左辺と右辺が恒等的に等しいことに注意すると，次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} A+C=1 \\ B-2C=0 \\ -A+B+C=0 \end{cases}$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{4}$$

これを $A+C=0$ 代入すると $C = \frac{1}{4}$．さらに，$A = \frac{3}{4}, C = \frac{1}{4}$ より $B = \frac{1}{2}$ を得る．よって

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)}$$

(e) $\dfrac{x^5}{(x-2)^2}$ は有理関数で分子の次数 geq 分母の次数なので，まず，分子を分母で割ると，

$$\frac{x^5}{x^2-4x+4} = x^3 + 4x^2 + 12x + 32 + \frac{80x-128}{(x-2)^2}$$

$\dfrac{80x-128}{(x-2)^2}$ を部分分数分解すると，$(x-2)^2$ の因数 $x-2$ と $(x-2)^2$ を分母に持つ分数の和で表せる．

$$\frac{80x-128}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-21} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

ここで分母を払い整理すると

$$80x - 128 = A(x-2) + B$$

ここで左辺と右辺が恒等的に等しいことに注意すると，$A = 80$ を得る．これを上の式に代入すると，$B = 2A - 128 = 160 - 128 = 32$ を得る．よって

$$\frac{x^5}{x^2-4x+4} = x^3 + 4x^2 + 12x + 32 + \frac{80}{x-2} + \frac{32}{(x-2)^2}$$

(f) $\dfrac{x+1}{x(x^2+1)}$ は有理関数で分子の次数 $<$ 分母の次数なので部分分数分解すると，$x(x^2+1)$ の因数 x と x^2+1 を分母に持つ分数の和で表せる．

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

ここで分母を払い整理すると

$$x + 1 = A(x^2+1) + x(Bx+C)$$

ここで左辺と右辺が恒等的に等しいことに注意すると，次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 1 \\ A = 1 \end{cases}$$

これより，$B = -1$ を得る．よって，

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1}$$

3.5 三角関数の積分法

いかに有理関数へ直すかが問題

1.

(a)

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos x \, dx &= \int t^3 dt \left(\begin{array}{l} t = \sin x \text{ とおくと} \\ dt = \cos x dx \end{array} \right) \\ &= \frac{t^4}{4} + c \\ &= \frac{\sin^4 x}{4} + C \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 3x \cos 3x \ dx &= \int t^2 \frac{dt}{3} \quad \left(\begin{array}{l} t = \sin 3x \text{ とおくと} \\ dt = 3\cos 3x dx \end{array} \right) \\
&= \frac{1}{3} \int t^2 \ dt \\
&= \frac{t^3}{9} + c \\
&= \frac{\sin^3 3x}{9} + C
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x \cos 3x \ dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \ dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\int (x + \cos 2x) \ dx \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{\sin 2x}{2} \right] + C
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x \ dx &= \int \cos^2 x \cos x \ dx \\
&= \int (1 - \sin^2 x) \cos x \ dx \quad \left(\begin{array}{l} t = \sin x \text{ とおくと} \\ dt = \cos x dx \end{array} \right) \\
&= \int (1 - t^2) \ dt \\
&= t - \frac{t^3}{3} + C \\
&= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x \sin^3 x \ dx &= \int \cos^4 x \sin^2 x \sin x \ dx \\
&= \int \cos^4 x (1 - \cos^2 x) \sin x \ dx \quad \left(\begin{array}{l} t = \cos x \text{ とおくと} \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right) \\
&= \int t^4 (1 - t^2)(-dt) \\
&= \int (t^6 - t^4) \ dt \\
&= \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C \\
&= \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}\int \sin 2x \cos 3x \; dx &= \frac{1}{2}\int \sin 5x - \sin x \; dx \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 5x}{5} + \cos x\right) + C\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}\int \sin 2x \sin x \; dx &= \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 3x) \; dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x\right) + C\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}\int \cos x \cos 2x \; dx &= \frac{1}{2}\int (\cos 3x + \cos x) \; dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 3x}{3} + \sin x\right) + C\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}\int \tan x \sec^2 x \; dx &= \int t \; dt \quad \left(\begin{array}{l} t = \tan x \text{ とおくと} \\ dt = \sec^2 x dx \end{array}\right) \\ &= \frac{t^2}{2} + C \\ &= \frac{\tan^2 x}{2} + C\end{aligned}$$

(j)

$$\int \tan x \sec^3 x \; dx = \int \sec^2 x \sec x \; dx \quad \left\{\begin{array}{lcl} u = \sec x & & dv = sec^2 x dx \\ & \searrow & \\ du = \sec x \tan x dx & \leftarrow & v = \tan x \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}&= \sec x \tan x - \sec x \tan^2 x \; dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \; dx + \int \sec x \; dx\end{aligned}$$

ここで，$I = \int sec^3 x \; dx$ とおくと，

$$\begin{aligned}2I &= \sec x \tan x + \int \sec x \; dx \\ &= \sec x \tan x + \log|\sec x + \tan x| + c\end{aligned}$$

したがって，

$$I = \frac{1}{2}\left(\sec x \tan x + \log|\sec x + \tan x|\right) + C$$

3.6 無理関数の積分法

如何に有理関数に直すかが問題

1.

(a) 無理関数 $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ を t とおくことにより，有理関数に直す．$t = \sqrt{x}$ とおくと $t^2 = x$ より $2tdt = dx$. したがって，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{2t}{1+t}\,dt \\ &= \int \frac{2(t+1)-2}{1+t}\,dt \\ &= \int (2 - \frac{2}{1+t})\,dt \\ &= 2t - 2\log|1+t| + C \\ &= 2\sqrt{x} - 2\log|1+\sqrt{x}| + C\end{aligned}$$

(b) 無理関数 $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ を t とおくことにより，有理関数に直す．$t = \sqrt{x}$ とおくと $t^2 = x$ より $2tdt = dx$. したがって，

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx &= \int \frac{t}{t+1} \cdot 2t\,dt \\ &= \int \frac{2t^2}{t+1}\,dt \left(\begin{array}{cc|ccc} & & 2t & - & 2 \\ \cline{3-5} t+1 & & 2t^2 & & \\ & & 2t^2 & + & 2t \\ \cline{3-5} & & & - & 2t \\ & & & - & 2t \quad -2 \\ \cline{4-5} & & & & 2 \end{array} \right. \\ &= \int \left(2t - 2 + \frac{2}{t+1}\right)\,dt \\ &= t^2 - 2t + 2\log|t+1| + C \\ &= x - 2\sqrt{x} + 2\log|\sqrt{x}+1| + C\end{aligned}$$

(c) 無理関数 $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ を t とおくことにより，有理関数に直す．$t = \sqrt{1-e^x}$ とおくと $t^2 = 1 - e^x$ より $2tdt = -e^x dx$. したがって，$dx = \frac{2tdt}{-e^x} = \frac{2tdt}{t^2-1}$. これより，

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^x}} &= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2-1}\,dt \\ &= \int \frac{2}{t^2-1}\,dt \quad \left(\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log|\frac{x-a}{x+a}| + c\right) \\ &= \log|\frac{t-1}{t+1}| + C \\ &= \log|\frac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1}| + C\end{aligned}$$

(d) 無理関数 $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ を t とおくことにより, 有理関数に直す. $t=\sqrt{x-1}$ とおくと $t^2=x-1$ より $2tdt=dx$. したがって,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx &= \int \frac{t^2+1}{t}\cdot 2t\,dt\\ &= 2\int (t^2+1)\,dt\\ &= 2\left(\frac{t^3}{3}+t\right)+C\\ &= \frac{2(x-1)^{3/2}}{3}+2\sqrt{x-1}+C\end{aligned}$$

(e) 平方根の中が 2 次関数で分子が奇数次の式なので. $t=\sqrt{x^2+4}$ とおくと $t^2=x^2+4$ より $2tdt=2xdx$. したがって,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx &= \int \frac{t}{t}\,dt\\ &= \int\,dt\\ &= t+C\\ &= \sqrt{x^2+41}+C\end{aligned}$$

別解 $t=x^2+4$ とおくと $dt=2xdx$. したがって,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx &= \int \frac{dt/2}{\sqrt{t}}\\ &= \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2t^{1/2}+C\\ &= \sqrt{x^2+41}+C\end{aligned}$$

(f) 平方根の中が 2 次関数で分子が奇数次の式なので. . $t=\sqrt{x^2+4}$ とおくと $t^2=x^2+4$ より $2tdt=2xdx$. したがって,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx &= \int \frac{x^2\cdot x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx\\ &= \int \frac{(t^2-4)t}{t}\,dt\\ &= \int (t^2-4)\,dt\\ &= \frac{t^3}{3}-4t+C\\ &= \frac{(x^2+4)^{3/2}}{3}-4\sqrt{x^2+4}+C\end{aligned}$$

(g)　平方根の中が 2 次関数で分子が偶数次の式なので．次のどちらかに帰着する．

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = \log|x+\sqrt{x^2+A}|+C$$

x^2-2x-2 を平方完成すると $(x-1)^2-4$ となる．そこで，$t=x-1$ とおくと $dt=dx$．したがって，

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-4}}\\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2^2}}\\ &= \log|t+\sqrt{t^2-4}|+C\\ &= \log|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}|+C\end{aligned}$$

(h)　平方根の中が 2 次関数で分母が奇数次の式なので，$t=\sqrt{x^2-1}$ とおくと $t^2=x^2-1$ より $2tdt=2xdx$．したがって，

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx &= \int \frac{x\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx\\ &= \int \frac{2t\cdot t}{t^2+1}\,dt\\ &= 2\int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt\\ &= 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt\\ &= 2\int (1-\frac{1}{t^2+1})\,dt\\ &= 2(t-\tan^{-1}t)+C\\ &= 2(\sqrt{x^2-1}-\tan^{-1}\sqrt{x^2-1})+C\end{aligned}$$

3.7 定積分

1.

1 区間 $[0,1]$ を n 等分する．x 軸上の点 $\frac{i}{n}$ に対応する値 $(\frac{i}{n})^2$ を高さとし，底辺が $\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}=\frac{1}{n}$ を底辺とする長方形を考える．この長方形を $x=0$ から $x=1$ までの間で加えると，Riemann 和とよばれる次の和を得る．

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)$$

$f(x)=x^2$ は区間 $[0,1]$ で連続なので,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

2.

$F'(x)=f(x)$ とすると $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(a)-F(b)$

(a)

$$\int_0^1 (x^2+3)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_0^1=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x^2-1}{x}\,dx &= \int_1^2 (x-\frac{1}{x})\,dx\\ &= \left[\frac{x^2}{2}-\log|x|\right]_1^2\\ &= 2-\log 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\log 2\end{aligned}$$

(c)

$$\int_0^1 \sqrt{x^3}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{5}$$

(d)

$$\int_0^\pi \cos x\,dx=[\sin x]_0^\pi=0$$

(e)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\cos 0=1$$

3.

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

(a)

$$\int_0^5 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^5 f(x)\,dx=4+1=5$$

(b)

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx = 4 - 6 = -2$$

(c)

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx = -2 + 1 = -1$$

(d)

$$\int_0^0 f(x)\,dx = 0$$

(e)

$$\int_2^0 f(x)\,dx = -\int_0^2 f(x)\,dx = -4$$

4.

微積分学の基本定理

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$\int_a^x f(t)\,dt$ は x の関数なので，これを $F(x)$ とおくと，左辺は $F'(x)$ を求めることと同じである．$f(x)$ が物体の速さだとすると，$\int_a^x f(t)\,dt$ は速さ×時間より，時刻 a から x までの間で動いた距離を表す．ということは，左辺は動いた距離の瞬間の変化を表している．しかし，動いた距離の瞬間の変化とは，速さのことである．したがって，右辺と等しい．

(a)

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \sin t\,dt = \sin x$$

(b)

$$\frac{d}{dx}\int_x^1 \cos t\,dt = -\frac{d}{dx}\int_1^x \cos t\,dt = -\cos x$$

(c) $u = 2x$ とおくと，$\frac{d}{dx} = \frac{d}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ より，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_0^{2x} \sqrt{\sin t}\,dt &= \frac{d}{dx}\int_a^u \sqrt{\sin t}\,dt \\
&= \frac{d}{du}(\int_a^u \sqrt{\sin t}\,dt)\frac{du}{dx} \\
&= \sqrt{\sin u}\cdot 2 = 2\sqrt{\sin 2x}
\end{aligned}$$

5.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

(a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n} = \int_0^1 x\,dx = [\frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$$

(b)

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{2+\frac{n}{n}}\right)\\ &= \int_0^1 \frac{1}{2+x}\,dx = [\log|2+x|]_0^1\\ &= \log 3 - \log 2 = \log\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = [\frac{2}{3}x^{3/2}]_0^1 = \frac{2}{3}$$

3.8 定積分の計算

1.

(a) $\sin x$ は奇関数で，積分範囲が $[-1,1]$ より，$\int_{-1}^{1}\sin x\,dx = 0$

(b) $\sin^3 x$ は奇関数で，積分範囲が $[-1,1]$ より，$\int_{-1}^{1}\sin^3 x\,dx = 0$

(c)

$$\int_0^{\pi}\sin^3 x\,dx = \frac{2!!}{3!!} = \frac{2}{3}$$

(d)

$$\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx = [\frac{\sin 2x}{2}]_0^{\pi} = 0$$

(e)

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}\,dx = \int_{-1}^{1}(x+1)^{1/2}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} = \frac{2^{5/2}}{3}$$

3.9 定積分の定義の拡張

1.

(a)

積分範囲が有限でないので，まず，積分範囲を 1 から b までとし，積分を行ったあと b を無限

大に持って行く．

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1)\\ &= 1\end{aligned}$$

(b)

積分範囲が有限でないので，まず，積分範囲を 1 から b までとし，積分を行ったあと b を無限大に持って行く．

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx\\ &= \lim_{b\to\infty}[\log x]_1^b = \lim_{b\to\infty}\log b\\ &= \infty\end{aligned}$$

(c)

積分範囲が有限でないので，まず，積分範囲を 1 から b までとし，積分を行ったあと b を無限大に持って行く．

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{b}+1)\\ &= 1\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\cos\pi x\,dx &= \lim_{b\to\infty}[\frac{1}{\pi}\sin\pi x]_1^b\\ &= \text{存在しない}\end{aligned}$$

(e)

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ は $x = 0$ で分母が 0 になる．したがって，$x = 0$ で連続ではない．そのため，$x = 0$ の直後 $0 + \varepsilon$ から積分し，その後 ε を 0 に近づける．

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+}(2-2\varepsilon^{\frac{1}{2}})\\ &= 2\end{aligned}$$

(f)

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ は $x = 0$ で分母が 0 になる．したがって，$x = 0$ で連続ではない．そのため，$x = 0$ の直後 $0 + \varepsilon$ から積分し，その後 ε を 0 に近づける．

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 x^{-2}\ dx \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 = -\lim_{\varepsilon \to 0+} (1 - \frac{1}{\varepsilon}) \\ &= \infty\end{aligned}$$

3.10 定積分の応用

1.

(a) $y = x^2$ と $y = x + 2$ の交点を求めると $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) = 0$ より $x = -1, 2$ となる．つまり，この 2 つの曲線は点 $(-1, 1)$ と点 $(2, 4)$ で交わっている．そこでこの図形の面積は縦方向の長方形の面積 ΔA の和として考える．x 軸に垂直な直線でこの図形を切断するとその高さは，上側の曲線 - 下側の曲線で与えられ，また幅は x 軸方向への小さな幅となるので Δx で与えられる．よって

$$\Delta A = (x + 2 - x^2)\Delta x$$

となる．これより求める面積 A は

$$\begin{aligned}A = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)dx &= [\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}]_{-1}^2 \\ &= 2 + 4 - \frac{8}{3} - (\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}) = 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} \\ &= 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

(b) $y = x^3$ と $y = x^2$ の交点を求めると $x^2 - x^2 = x^2(x-1) = 0$ より $x = 0, 1$ となる．つまり，この 2 つの曲線は点 $(0, 0)$ と点 $(1, 1)$ で交わっている．そこでこの図形の面積は縦方向の長方形の面積 ΔA の和として考える．x 軸に垂直な直線でこの図形を切断するとその高さは，上側の曲線 - 下側の曲線で与えられ，また幅は x 軸方向への小さな幅となるので Δx で与えられる．よって

$$\Delta A = (x^2 - x^3)\Delta x$$

となる．これより求める面積 A は

$$\begin{aligned}A = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx &= [\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

(c) $y = -\sqrt{x}$ と $y = x - 6$ の交点を求めると $x - 6 + \sqrt{x} = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3) = 0$ より $\sqrt{x} = 2, -3$ となる．しかし，$\sqrt{x}$ は負の値を取らないので，$\sqrt{x} = 2$．したがって，$x = 4$．つ

まり，この 2 つの曲線は点 $(4, -2)$ で交わっている．次に，$y = x - 6$ と $y = 0$ の交点を求めると，$(6, 0)$．最後に，$y = \sqrt{x}$ と $y = 0$ の交点を求めると $(0, 0)$ となる．そこでこの図形の面積を縦方向の長方形の面積 ΔA の和として考える．x 軸に垂直な直線でこの図形を切断するとその高さは，上側の曲線 - 下側の曲線で与えられ，また幅は x 軸方向への小さな幅となるので Δx で与えられる．よって区間 $[0, 4]$ では

$$\Delta A = \sqrt{x}\Delta x$$

また，区間 $[4, 6]$ では

$$\Delta A = -(x - 6)\Delta x$$

となる．これより求める面積 A は

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^4 \sqrt{x}; dx + \int_4^6 -(x-6)\ dx \\
&= [\frac{2}{3}x[\frac{3}{2}]_0^4 - [\frac{x^2}{2} - 6x]_4^6 \\
&= \frac{16}{3} - 18 - 36 - (8 - 24) \\
&= \frac{16}{3} + 2 = \frac{22}{3}
\end{aligned}$$

(d) $y = x^3 - x$ と $y = 1 - x^2$ の交点を求めると

$$\begin{aligned}
x^3 - x - 1 + x^2 &= x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) \\
&= (x^2 - 1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2 = 0
\end{aligned}$$

より，$x = -1, 1$ となる．つまり，この 2 つの曲線は点 $(-1, 0)$ と点 $(1, 0)$ で交わっている．そこでこの図形の面積を縦方向の長方形の面積 ΔA の和として考える．x 軸に垂直な直線でこの図形を切断するとその高さは，上側の曲線 - 下側の曲線で与えられ，また幅は x 軸方向への小さな幅となるので Δx で与えられる．よって

$$\Delta A = (1 - x^2 - (x^3 - x))\Delta x$$

となる．これより求める面積 A は

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^1 (-x^3 - x^2 + x + 1)dx = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1)\ dx \\
&= 2\int_0^1 (-x^2 + 1)\ dx = 2[-\frac{x^3}{3} + x]_0^1 \\
&= 2(-\frac{1}{3} + 1) = 2(\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

(e) $x + 4 = y^2$ と $x = 5$ の交点を求めると $y^2 - 4 - 5 = y^2 - 9 = (y+3)(y-3) = 0$ より，$y = -3, 3$ となる．つまり，この 2 つの曲線は点 $(-3, 5)$ と点 $(3, 5)$ で交わっている．そこでこの図形の面積を横方向の長方形の面積 ΔA の和として考える．y 軸に垂直な直線でこの図形を切

断するとその幅は，左側の曲線 - 右側の曲線で与えられ，また高さは y 軸方向への小さな幅となるので Δy で与えられる．よって

$$\Delta A = (5 - (y^2 - 4))\Delta y$$

となる．これより求める面積 A は

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{3} (5 - (y^2 - 4))\ dy = \int_{-3}^{3} (9 - y^2)\ dy \\
&= 2\int_{0}^{3} (9 - y^2)\ dy = 2[9y - \frac{y^3}{3} + x]_0^3 \\
&= 2(27 - \frac{27}{3}) = 2(27 - 9) = 36
\end{aligned}$$

(f) $y = 2x$ と $x + y = 9$ の交点を求めると $2x - 9 + x = 3x - 9 = 0$ より，$x = 3$ となる．つまり，この 2 つの曲線は点 $(3, 6)$ で交わっている．次に，$y = 2x$ と y$y = x - 1$ の交点を求めると $2x - x + 1 = x + 1 = 0$ より，点 $(-1, -2)$ で交わる．最後に，$x + y = 9$ と $y = x - 1$ の交点を求めると $x - 1 - 9 + x = 2x - 10 = 0$ より点 $(5, 4)$ で交わる．そこでこの図形の面積を縦方向の長方形の面積 ΔA の和として考える．x 軸に垂直な直線でこの図形を切断するとその高さは，上側の曲線 - 下側の曲線で与えられ，また高さは x 軸方向への小さな幅となるので Δx で与えられる．よって区間 $[-1, 3]$ では,

$$\Delta A = 2x - (x - 1)\Delta x$$

区間 $[3, 5]$ では,

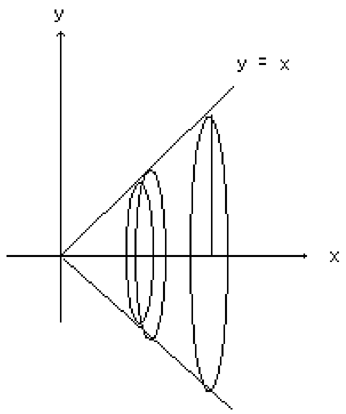
$$\Delta A = 9 - x - (x - 1)\ \Delta x$$

となる．これより求める面積 A は

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{3} (2x - (x - 1))\ dx + \int_{3}^{5} (9 - x - (x - 1))\ dx \\
&= \int_{-1}^{3} (x + 1)\ dx + \int_{3}^{5} (-2x + 10)\ dx \\
&= [\frac{x^2}{2} + x]_{-1}^3 + [-x^2 + 5x]_3^5 \\
&= \frac{9}{2} + 3 - (\frac{1}{2} - 1) + (-25 + 25 - (-9 + 15)) \\
&= 4 + 4 - 6 = 2
\end{aligned}$$

2.

(a)



$y = x$ と $y = 0$ の交点を求めると $(0, 0)$．また，$y = x$ と $x = 2$ の交点を求めると $(2, 2)$．回転軸に垂直な平面で切断すると，その断面は円盤になる．円盤の面積は πr^2．よって，x 軸上の任意の点 x における断面積 A は

$$A = \pi y^2 = \pi x^2.$$

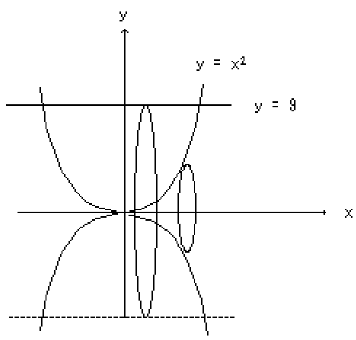
したがって，これに少しの厚み Δx をつけると，その体積 ΔV は

$$\Delta V = A\Delta x = \pi x^2 \Delta x$$

となるので，求める体積は

$$V = \int_0^2 \pi x^2 \, dx = [\frac{\pi x^3}{3}]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

(b)



$y = x^2$ と $y = 9$ の交点を求めると，$x^2 = 9$ より，$(-3, 9)$ と $(3, 9)$ となる．回転軸に垂直な平面で切断すると，その断面はワッシャーになる．よって，x 軸上の任意の点 x における断面積 A は

$$A = \pi 9^2 - \pi (x^2)^2 = \pi(81 - x^4).$$

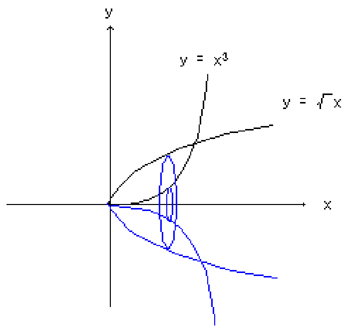
したがって，これに少しの厚み Δx をつけると，その体積 ΔV は

$$\Delta V = A\Delta x = \pi(81 - x^4)\Delta x$$

となるので，求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-3}^{3} (81 - x^4)\, dx = 2\pi \int_{0}^{3} (81 - x^4)\, dx \\ &= 2\pi[81x - \frac{x^5}{5}]_0^3 = 2\pi(243 - \frac{243}{5}) \\ &= \frac{2\pi(1215 - 243)}{5} = \frac{1944\pi}{5} \end{aligned}$$

(c)



$y = x^3$ と $y = \sqrt{x}$ の交点を求めると，$x^3 - \sqrt{x} = \sqrt{x}(x^{5/2} - 1) = 0$ より，$(0,0)$ と $(1,1)$ となる．回転軸に垂直な平面で切断すると，その断面はワッシャーになる．よって，x 軸上の任意の点 x における断面積 A は

$$A = \pi((\sqrt{x})^2 - (x^3)^2) = \pi(x - x^6).$$

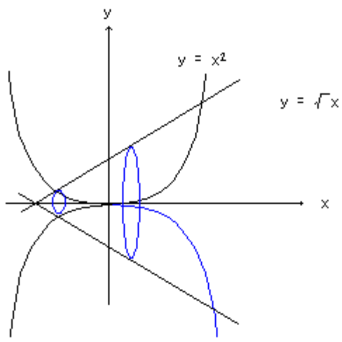
したがって，これに少しの厚み Δx をつけると，その体積 ΔV は

$$\Delta V = A\Delta x = \pi(x - x^6)\Delta x$$

となるので，求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{0}^{1} (x - x^6)\, dx = \pi[\frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}]_0^1 \\ &= \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}) = \frac{5\pi}{14} \end{aligned}$$

(d)



$y = x^2$ と $y = x + 2$ の交点を求めると，$x^2 - (x+2) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) = 0$ より，$(-1,1)$ と $(2,4)$ となる．回転軸に垂直な平面で切断すると，その断面はワッシャーになる．よって，x 軸上の任意の点 x における断面積 A は

$$A = \pi((x+2)^2 - (x^2)^2) = \pi(x^2 + 4x + 4 - x^4).$$

したがって，これに少しの厚み Δx をつけると，その体積 ΔV は

$$\Delta V = A\Delta x = \pi(x^2 + 4x + 4 - x^4)\Delta x$$

となるので，求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-1}^{2}(x^2 + 4x + 4 - x^4)\,dx = \pi[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x - \frac{x^5}{5}]_{-1}^{2} \\ &= \pi(\frac{8}{3} + 8 + 8 - \frac{32}{5} - (-\frac{1}{3} + 2 - 4 + \frac{1}{5})) \\ &= \pi(\frac{40-96}{15} + 16 + 2 + \frac{2}{15}) = \pi(\frac{-54}{15} + 18) \\ &= \pi(\frac{-54+270}{15}) = \frac{216\pi}{15} = \frac{72\pi}{5} \end{aligned}$$

3.

(a)

曲線の 1 部分 Δl は

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta x})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}\Delta x$$

で与えられるので，求める曲線の長さは

$$\begin{aligned} l &= 4\int_0^2 \sqrt{(\frac{dx}{dx})^2 + (\frac{dy}{dx})^2}dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{1+2^2}dx = [\sqrt{5}x]_0^2 \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

(b)

曲線の 1 部分 Δl は

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta x})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}\Delta x$$

で与えられるので，求める曲線の長さは

$$\begin{aligned} l &= 4\int_0^{44} \sqrt{(\frac{dx}{dx})^2 + (\frac{dy}{dx})^2}dx \\ &= \int_0^{44} \sqrt{1 + (\frac{3x^{1/2}}{2})^2}\ dx = \int_0^{44} \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\ dx \\ &= \int_1^{100} \sqrt{t} \cdot \frac{4}{9}\ dt \quad \left(\begin{array}{l} t = 1 + \frac{9}{4}t \\ dt = \frac{9}{4}dt \\ \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 44 \\ \hline t & 1 & \to & 100 \end{array} \end{array} \right) \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}[t^{3/2}]_1^{100} = \frac{8}{27}(1000 - 1) \\ &= \frac{888}{3} = 296 \end{aligned}$$

(c)

曲線の 1 部分 Δl は

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2}\Delta t$$

で与えられるので，求める曲線の長さは

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}dt \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + 2^2}\ dt = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + 4}\ dt \\ &= 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{t^2 + 1}\ dt \\ &= 2[t\sqrt{t^2 + 1} + \log|t + \sqrt{t^2 + 1}|]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 2(2\sqrt{3} + \log|\sqrt{3} + 2|) = 4\sqrt{3} + 2\log|2 + \sqrt{3}| \end{aligned}$$

(d)

曲線の 1 部分 Δl は

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta \theta})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta \theta})^2}\Delta \theta$$

で与えられるので，求める曲線の長さは，$x = r\cos\theta = e^{\theta}\cos\theta$, $y = r\sin\theta = e^{\theta}\sin\theta$ より

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^{4\pi} \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta\theta})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta\theta})^2}\Delta\theta \\
&= \int_0^{4\pi} \sqrt{(e^{\theta}\cos\theta - e^{\theta}\sin\theta)^2 + (e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta)^2}\ d\theta \\
&= \int_0^{4\pi} \sqrt{e^{2\theta}\cos^2\theta - 2e^{2\theta}\sin\theta\cos\theta + 2e^{2\theta}\sin\theta\cos\theta + 2e^{2\theta}\sin^2\theta}\ d\theta \\
&= \int_0^{4\pi} \sqrt{2e^{2\theta}}\ d\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{4\pi} \sqrt{e^{2\theta}}\ d\theta = 2\int_0^{4\pi} e^{\theta}\ d\theta \\
&= \sqrt{2}[e^{\theta}]_0^{4\pi} = \sqrt{2}(e^{4\pi} - 1)
\end{aligned}
$$

4.1 級数の定義

—bf 1.

(a) 等比数列の和

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{10^n} &= 3\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{10})^n \\
&= 3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 3\cdot\frac{10}{9} = \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n} &= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \cdots \\
S_n &= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \cdots + \frac{(-1)^n}{5^n} \\
+\frac{1}{5}S_n &= \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+1}} \\
\hline
\frac{6}{5}S_n &= 1 + \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} \\
S_n &= \frac{5}{6} + \frac{(-1)^n}{6\cdot 5^n},\ n \geq 1 \\
S &= \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-2^n}{3^n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} - \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1}{1-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{3-1} - \frac{3}{3-2} = \frac{3}{2} - 3 = \frac{-3}{2}\end{aligned}$$

2.

(a)

$$\begin{aligned}1.3333\ldots &= 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{10})^n = 1 + \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{3}{10}} \\ &= 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}2.4141\ldots &= 2 + \frac{41}{100} + \frac{41}{100^2} + \frac{41}{100^3} + \cdots \\ &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{41}{100})^n = 2 + \frac{\frac{41}{100}}{1-\frac{41}{100}} \\ &= 2 + \frac{41}{59} = \frac{159}{59}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}0.9999\ldots &= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{9}{10})^n = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{9}{10}} \\ &= \frac{9}{9} = 1\end{aligned}$$

4.2 正項級数

$\sum \frac{1}{n^2} < \infty,\ \sum \frac{1}{n} = \infty$

1.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \approx \sum \frac{1}{n^2}$ より，$\sum \frac{1}{n^2}$ と比較

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1} = 0\end{aligned}$$

より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ は収束.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+2} \approx \sum \frac{1}{n}$ より，$\sum \frac{1}{n}$ と比較

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3n+2}}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+2} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$ は発散.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \approx \sum \frac{1}{n^2}$ より，$\sum \frac{1}{n^2}$ と比較

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1\end{aligned}$$

より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ は収束.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ を $\sum \frac{1}{n}$ と比較

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log n}{n}}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \log n = \infty\end{aligned}$$

より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ は発散.

2. (a)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = [\log|x|]_1^{\infty-} = \infty$$

また,

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x}\, dx \leq \sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n}$$

より，発散

(b)

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x \log x}\, dx = [\log|\log|x||]_e^{\infty-} = \infty$$

また,

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x \log x}\, dx \leq \sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

より，発散

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} &\leq \frac{1}{a(\log a)^2} + \int_a^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx \\ &= \frac{1}{a(\log a)^2} - [\frac{1}{\log x}]_a^{\infty-} < +\infty\end{aligned}$$

(d)

$$\int_a^{\infty} \frac{\log x}{x}\ dx = [\frac{(\log x)^2}{2}]_a^{\infty -} = \infty$$

また,

$$\int_a^{\infty} \frac{\log x}{x}\ dx \leq \sum_{n=a}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$

より，発散

3.

(a) $a_n = \frac{1}{2^n}$ より

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1\end{aligned}$$

より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ は収束.

(b) $a_n = \frac{10^n}{n!}$ より

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}}| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1\end{aligned}$$

より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ は収束.

4.3 交項級数

1.

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ より，この級数は発散.

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^2 n}{n+1} \neq 0$ より，この級数は発散.

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{3n+4}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+3)(3n+4) - ((3n+2)(3n+4) - (3n+2)(3n+3)}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9n^2+12n+2}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)}\end{aligned}$$

ここで，$\sum \frac{1}{n}$ を用いた比較判定法を行なうと,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{9n^2+12n+2}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$$

したがって，この級数は発散

4.4 関数項級数

1.

(a)

$$
\begin{aligned}
\log(1-x) &= -\int_0^x \frac{1}{1-t}dt \\
&= -\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\tan^{-1} x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \\
&= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}
$$

5.1 ベクトル関数

1.

(a)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}'(t) &= ((\cos t)', (\sin t)') \\
&= (-\sin t, \cos t \cos t) \\
\|\mathbf{F}\| &= \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}'(t) &= ((1+2t)', (3-t)', (2+3t)') \\
&= (2, -1, 3) \\
\|\mathbf{F}\| &= \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}
\end{aligned}
$$

(c)

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t) &= (\int 1\ dt, \int 2t\ dt) \\ &= (t, t^2)\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t) &= (\int e^t\ dt, \int \sqrt{2}\ dt, \int e^{-t}\ dt) \\ &= (e^t, \sqrt{2}t, -e^{-t})\end{aligned}$$

5.2 曲線

1.

(a) ベクトル $(2,-3,1)$ に平行より，求める直線の方向ベクトルは $(2,-3,1)$．この直線は点 $(1,-1,2)$ を通るので，求める直線のベクトル方程式は

$$(x,y,z) = (1,-1,2) + (2,-3,1)t$$

(b) 線分 $(3t,-t,t)$ に平行より, 求める直線の方向ベクトルは $(3,-1,1)$．この直線は点 $(3,1,0)$ を通るので，求める直線のベクトル方程式は

$$(x,y,z) = (3,1,0) + (3,-1,1)t$$

(c) 2 点 $(1,0,3)$ と $(2,-1,4)$ を通るので, 求める直線の方向ベクトルは $(2-1,-1-0,4-3) = (1,-1,1)$．この直線は点 $(1,0,3)$ を通るので，求める直線のベクトル方程式は

$$(x,y,z) = (1,0,3) + (1,-1,1)t$$

2.

(a) $\vec{r}(t) = (1,t,t^2)$ より $t=1$ での接線ベクトルは

$$\vec{r}'(1) = (0,1,2t)\ |_{t=1} = (0,1,2)$$

また，$\vec{r}(1) = (1,1,1)$ より，接線の方程式は

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(1) + t\vec{r}'(1) = (1,1,1) + t(0,1,2)$$

(b) $\vec{r}(t) = (2t^2, 1-t, 3+2t^2)$ より $t=1$ での接線ベクトルは

$$\vec{r}'(1) = (4t,-1,4t)\ |_{t=1} = (4,-1,4)$$

また，$\vec{r}(1) = (2, 0, 2)$ より，接線の方程式は

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(1) + t\vec{r}'(1) = (2, 0, 2) + t(4, -1, 4)$$

3.

(a)

$$\|\vec{v}t\| = \|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\| = \|(-\sin t, \cos t, 1)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

より

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\, dt \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \end{aligned}$$

(b)

$$\|\vec{v}t\| = \|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\| = \|(3t^2, 2t)\| = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$$

より

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{9t^4 + 4t^2}\, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{9t^2 + 4}\, t\, dt \quad \left(\begin{array}{l} u = 9t^2 + 4 \\ du = 18tdt \\ \begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & 1 \\ \hline u & 4 & \to & 13 \end{array} \end{array} \right) \\ &= \int_4^{13} \sqrt{u} \frac{du}{18} = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} [u^{3/2}]_4^{13} \\ &= \frac{1}{27}(13^{3/2} - 8) \end{aligned}$$

4.

曲率 κ は曲線の曲がり具合を表したものである．曲線の曲がり具合は曲線の接線が x 軸と作る角 ϕ が曲線上を s だけ動くときにどれだけ変化するかを調べることにより分かる．これより，

$$\kappa = |\frac{d\phi}{ds}| = \left| \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

で与えられる．

(a) $y = x^3$ より，$y' = 3x^2, y'' = 6x$．したがって，

$$\kappa = \left| \frac{6x}{(1 + 9x^4)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

(b) $y = x - x^2$ より，$y' = 1 - 2x, y'' = -2$．したがって，

$$\kappa = \left| \frac{-2}{(1 + (1 - 2x)^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{2}{(2 - 4x + 4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(c) $y = \tan x$ より，$y' = \sec^2 x, y'' = 2\sec^2 x \tan x$．したがって，

$$\kappa = \left| \frac{2\sec^2 x \tan x}{(1+\sec^4 x)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

6.1 関数の定義

1.

(a)

$$\begin{aligned} D(f) &= \{(x,y) : f(x,y) \in \mathcal{R}\} \\ &= \{(x,y) : \sqrt{xy} \in \mathcal{R}\} = \{(x,y) : xy \geq 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(f) &= \{f(x,y) : (x,y) \in D(f)\} \\ &= [0, \infty) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} D(f) &= \{(x,y) : f(x,y) \in \mathcal{R}\} \\ &= \{(x,y) : \frac{1}{x+y} \in \mathcal{R}\} = \{(x,y) : x+y \neq 0\} = \{(x,y) : y \neq -x\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(f) &= \{f(x,y) : (x,y) \in D(f)\} = \{\frac{1}{x+y} : x+y \neq 0\} \\ &= (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} D(f) &= \{(x,y) : f(x,y) \in \mathcal{R}\} \\ &= \{(x,y) : \frac{1}{x^2+y^2} \in \mathcal{R}\} = \{(x,y) : x^2+y^2 \neq 0\} = \mathcal{R}^2 - \{(0,0)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(f) &= \{f(x,y) : (x,y) \in D(f)\} = \{\frac{1}{x^2+y^2} : x^2+y^2 \neq 0\} \\ &= (0, \infty) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} D(f) &= \{(x,y) : f(x,y) \in \mathcal{R}\} \\ &= \{(x,y) : \frac{x^2}{x^2+y^2} \in \mathcal{R}\} = \{(x,y) : x^2+y^2 \neq 0\} = \mathcal{R}^2 - \{(0,0)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(f) &= \{f(x,y) : (x,y) \in D(f)\} = \{\frac{x^2}{x^2+y^2} : x^2+y^2 \neq 0\} \\ &= [0,1] \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} D(f) &= \{(x,y) : f(x,y) \in \mathcal{R}\} \\ &= \{(x,y) : \log(1-xy) \in \mathcal{R}\} = \{(x,y) : 1-xy > 0\} = \{(x,y) : y < \frac{1}{x}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(f) &= \{f(x,y) : (x,y) \in D(f)\} = \{\log(1-xy) : 1-xy > 0\} \\ &= (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} D(f) &= \{(x,y,z) : f(x,y,z) \in \mathcal{R}\} \\ &= \{(x,y,z) : \frac{z}{x^2-y^2} \in \mathcal{R}\} = \{(x,y,z) : x^2-y^2 \neq 0\} = \{(x,y) : y \neq \pm x\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(f) &= \{f(x,y,z) : (x,y,z) \in D(f)\} = \{\frac{z}{x^2-y^2} : x^2-y^2 \neq 0\} \\ &= (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

2.

(a) $x^2+4y^2-16z^2=0$ は $z^2 = \dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{4y^2}{4^2}$ と書き直せる．yz 平面でのトレースは $z = \pm y/2$, xz 平面でのトレースは $z = \pm x/4$. 等位面でのトレースは楕円となる．したがって，2 次錐面．別名円錐.

(b) $x^2+4y^2+16z^2-12=0$ は $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{4y^2}{12} + \dfrac{16z^2}{12} = 1$ と書き直せる．yz 平面でのトレースは楕円 $\frac{4y^2}{12} + \frac{16z^2}{12} = 1$, xz 平面でのトレースは楕円 $\frac{x^2}{12} + \frac{16z^2}{12} = 1$. 等位面でのトレースも楕円となる．したがって，楕円面.

(c) $x-4y^2=0$ は放物線 $x=4y^2$ が z 軸に平行にのびている．したがって，放物柱.

(d) $x^2-4y^2-2z=0$. yz 平面でのトレースは放物線 $2z=4y^2$, xz 平面でのトレースは放物線 $2z=x^2$. 等位面でのトレースは双曲線．したがって，双曲放物面

(e) $2x^2+4y^2-1=0$ は楕円 $2x^2+4y^2=1$ が z 軸に平行にのびている．したがって， 楕円柱.

(f) $x^2+4y^2-4z=0$. yz 平面でのトレースは放物線 $z=y^2/4$, xz 平面でのトレースは放物線 $z=x^2/4$. 等位面でのトレースは楕円．したがって，楕円放物面 (g) $2x^2-4y^2-6=0$ は双曲線 $2x^2-4y^2=6$ が z 軸に平行にのびている．したがって， 双曲柱.

(h) $x^2+y^2-2z^2-10=0$. yz 平面でのトレースは双曲線 $y^2-2z^2=10$, xz 平面でのトレースは双曲線 $x^2-2z^2=10$. 等位面でのトレースは楕円. したがって，1 葉双曲面

(i) $x^2+y^2-2z^2+10=0$. yz 平面でのトレースは双曲線 $y^2-2z^2=10$, xz 平面でのトレースは双曲線 $x^2-2z^2=10$. $x^2+y^2=2z^2-10$ より 等位面でのトレースは $z^2>5$ のときつまり $z>\sqrt{5}$ または $z<-\sqrt{5}$ のとき楕円. したがって，2 葉双曲面

6.2 偏導関数

1.

(a) x での偏微分は x 以外の変数をすべて定数と見なして微分すればよいので,

$$f_x(x,y)=\frac{\partial(3x^2)}{\partial x}-y\frac{\partial x}{\partial x}=6x-y$$

y での偏微分は y 以外の変数をすべて定数と見なして微分すればよいので,

$$f_y(x,y)=-x\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial y}=-x+1$$

(b) x での偏微分は x 以外の変数をすべて定数と見なして微分すればよいので,

$$f_x(x,y)=e^{-y}\frac{\partial(x^2)}{\partial x}=2xe^{-y}$$

y での偏微分は y 以外の変数をすべて定数と見なして微分すればよいので,

$$f_y(x,y)=x^2\frac{\partial(e^{-y})}{\partial y}=-x^2e^{-y}$$

(c) x^2+y^2 を t とおくと

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=\frac{\partial(\sqrt{t})}{\partial x}=\frac{\partial(\sqrt{t})}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\\&=\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot 2x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_y(x,y)&=\frac{\partial(\sqrt{t})}{\partial y}=\frac{\partial(\sqrt{t})}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}\\&=\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot 2y=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

(d) x での偏微分は x 以外の変数をすべて定数と見なして微分すればよいので,

$$f_x(x,y)=\sin y\frac{\partial x}{\partial x}=\sin y$$

y での偏微分は y 以外の変数をすべて定数と見なして微分すればよいので,

$$f_y(x,y)=x\frac{\partial(\sin y)}{\partial y}=x\sin y$$

(e) 商の微分法を用いると,

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{\frac{\partial(x-y)}{\partial x}(x+y)-(x-y)\frac{\partial(x+y)}{\partial x}}{(x+y)^2} \\
&= \frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \frac{\frac{\partial(x-y)}{\partial y}(x+y)-(x-y)\frac{\partial(x+y)}{\partial y}}{(x+y)^2} \\
&= \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}
\end{aligned}
$$

2.

(a)

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial(ax^2)}{\partial x} + 2by\frac{\partial x}{\partial x} = 2ax + 2by \\
f_y &= 2bx\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial(cy^2)}{\partial y} = 2bx + 2cy \\
f_{xx} &= \frac{\partial(2ax)}{\partial x} = 2a \\
f_{xy} &= \frac{\partial(2by)}{\partial y} = 2b \\
f_{yy} &= \frac{\partial(2cy)}{\partial y} = 2c
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
f_x &= 2(x+y^2+z^3)\frac{\partial(x+y^2+z^3)}{\partial x} = 2(x+y^2+z^3) \\
f_y &= 2(x+y^2+z^3)\frac{\partial(x+y^2+z^3)}{\partial y} = 4y(x+y^2+z^3) \\
f_z &= 2(x+y^2+z^3)\frac{\partial(x+y^2+z^3)}{\partial z} = 6z^2(x+y^2+z^3) \\
f_{xx} &= \frac{\partial(2x)}{\partial x} = 2 \\
f_{xy} &= \frac{\partial(2y^2)}{\partial y} = 4y \\
f_{xz} &= \frac{\partial(2z^3)}{\partial z} = 6z^2 \\
f_{yy} &= \frac{\partial(4y)}{\partial y}(x+y^2+z^3) + 4y\frac{\partial(y^2)}{\partial y} = 4(x+y^2+z^3) + 8y^2 \\
f_{yz} &= \frac{\partial(4yz^3)}{\partial z} = 12yz^2 \\
f_{zz} &= \frac{\partial(6z^2)}{\partial z}(x+y^2+z^3) + 6z^2\frac{\partial(z^3)}{\partial z} = 12z(x+y^2+z^3) + 18z^4
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial(\sin t)}{\partial x} = \frac{\partial(\sin t)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial(\sin t)}{\partial t}\frac{\partial(3x-2y)}{\partial x} = 3\cos(3x-2y)\\
f_y &= \frac{\partial(\sin t)}{\partial y} = \frac{\partial(\sin t)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial(\sin t)}{\partial t}\frac{\partial(3x-2y)}{\partial y} = -2\cos(3x-2y)\\
f_{xx} &= \frac{\partial(3\cos(3x-2y))}{\partial x} = 3\frac{\partial(\cos(3x-2y))}{\partial x} = -9\sin(3x-2y)\\
f_{xy} &= \frac{\partial(3\cos(3x-2y))}{\partial y} = 3\frac{\partial(\cos(3x-2y))}{\partial y} = 6\sin(3x-2y)\\
f_{yy} &= -2\frac{\partial(\cos(3x-2y))}{\partial y} = -4\sin(3x-2y)
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial(xe^{2y})}{\partial x} = e^{2y}\frac{\partial x}{\partial x} = e^{2y}\\
f_y &= \frac{\partial(xe^{2y})}{\partial y} = x\frac{\partial(e^{2y})}{\partial y} = 2xe^{2y}\\
f_{xx} &= \frac{\partial(e^{2y})}{\partial x} = 0\\
f_{xy} &= \frac{\partial(e^{2y})}{\partial y} = 2e^{2y}\\
f_{yy} &= 2x\frac{\partial(e^{2y})}{\partial y} = 4xe^{2y}
\end{aligned}
$$

6.3 関数の極限

1.

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x-y+1}{x+y-1} = \frac{1}{1} = 1$$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x-3y}{x+y} = \frac{0}{0}$ の不定形．そこで，分子の最小次数と分母の最小次数を比較すると同じ．この場合，極限値が存在しない可能性が高いので，反例を見つける．$y = mx$ とおくと，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x-3y}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{2x-3mx}{x+mx} = \lim_{x\to 0}\frac{2-3m}{1+m} = \frac{2-3m}{1+m} = \begin{cases} 2, & m=0\\ -\frac{1}{2}, & m=1\end{cases}$$

となり，異なる近づき方で異なる値に近づく．したがって，極限値は存在しない．

(c)

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} = 0$$

2.

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+1} = \frac{0}{1} = 0$$

また，$f(0,0) = \frac{0}{1} = 0$ より，$(0,0)$ で連続.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ の不定形．ここで，分子の最小次数は 2 で分母の最小次数も 2 であることから，極限値の存在する可能性は低い．極限値が存在しないことを示すには，反例を挙げればよい．$y = mx$ とおくと，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{1}{1+m^2} = \begin{cases} 1, & m=0 \\ \frac{1}{2}, & m=1 \end{cases}$$

となり，異なる近づき方で異なる値に近づく．したがって，極限値は存在しない．これより，不連続.

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ の不定形．ここで，分子の最小次数は 3 で分母の最小次数は 2 であることから，極限値の存在する可能性は高い．そこで，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと，

$$0 \leq \left|\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right| = \left|\frac{r^3\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^4\cos^4\theta + r^2\sin^2\theta}\right| = \left|\frac{r\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}\right| \leq \left|\frac{r\cos^2\theta}{\sin\theta}\right| \to$$

したがって, どのように (x,y) が $(0,0)$ に近づいても同じ値に近づくので，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = 0$
また，$f(0,0) = 0$ より，$(0,0)$ で連続.

6.4 全微分

1.

(a) $f_x = 3x^2,\ f_y = 2y$ より，

$$\begin{aligned} \nabla f &= (f_x, f_y) = (3x^2, 2y) \\ df &= f_x dx + f_y dy = 3x^2 dx + 2y dy \end{aligned}$$

(b) $f_x = 6x - y,\ f_y = -x + 1$ より，

$$\begin{aligned} \nabla f &= (f_x, f_y) = (6x - y, -x + 1) \\ df &= f_x dx + f_y dy = (6x - y)dx - (x - 1)dy \end{aligned}$$

(c) $z_x = 2xy^{-2},\ z_y = -2x^2y^{-3}$ より，

$$\begin{aligned} \nabla z &= (z_x, z_y) = (2xy, x^2) \\ dz &= z_x dx + z_y dy = 2xydx + x^2 dy \end{aligned}$$

(d) $z_x = e^x\cos y,\ z_y = -e^x\sin y$ より，

$$\begin{aligned} \nabla z &= (z_x, z_y) = (e^x\cos y, -e^x\sin y) \\ dz &= z_x dx + z_y dy = e^x\cos y dx - e^x\sin y dy \end{aligned}$$

2.

(a) 求める平面上に任意の点 (x,y,z) と, 点 $(1,1,1)$ より作られるベクトルは $(x-1,y-1,z-1)$ で与えられる．このベクトルと法線ベクトル $(3,2,-1)$ は直交するので，その内積は零である．これより，

$$(3,2,-1)\cdot(x-1,y-1,z-1)=0$$

$$3x-3+2y-2-z+1=0$$

$$z=3x+2y-4$$

法線の方程式は，法線上に任意の点 (x,y,z) をとると，(x,y,z) と $(1,1,1)$ が作るベクトルは，法線ベクトルのスカラー倍となることが分かる．したがって，

$$(x-1,y-1,z-1)=(3,2,-1)t$$

$$(x,y,z)=(1,1,1)+(3,2-1)t$$

と表せる．

(b) 接平面を求めるには，平面 Γ 上の 1 点と法線ベクトルがあればよい．そこで，まず法線ベクトル $\vec{n}_\gamma$ を求める．曲面が $z=f(x,y)$ で与えられるとき，法線ベクトルは $f_x,f_y,-1)$ で求められる．したがって，

$$\vec{n}_\gamma=(y,x,-1)$$

点 $(2,1,1)$ は平面 Γ 上の点なので，この点を通る法線ベクトルを求めると

$$\vec{n}_\gamma=(y,x,-1)\mid_{(2,1,1)}=(1,2,-1)$$

ここで，接平面 Γ 上に任意の点 (x,y,z) と点 $(2,1,1)$ が作るベクトル $(x-2,y-1,z-1)$ と法線ベクトルは直交するので，

$$(1,2,-1)\cdot(x-2,y-1,z-1)=0$$

$$x+2y-z=3$$

法線の方程式は，法線上に任意の点 (x,y,z) をとると，(x,y,z) と $(2,1,1)$ が作るベクトルは，法線ベクトルのスカラー倍となることが分かる．したがって，

$$(x-2,y-1,z-1)=(1,2,-1)t$$

$$(x,y,z)=(2,1,1)+(1,2-1)t$$

と表せる．

(c) 接平面を求めるには，平面 Γ 上の 1 点と法線ベクトルがあればよい．そこで，まず法線ベクトル $\vec{n}_\gamma$ を求める．曲面が $z=f(x,y)$ で与えられるとき，法線ベクトルは $f_x,f_y,-1)$ で求められる．したがって，

$$\vec{n}_\gamma=(2x+y,x+4y,-1)$$

点 $(1,1,4)$ は平面 Γ 上の点なので，この点を通る法線ベクトルを求めると

$$\vec{n}_\gamma = (2x+y, x+4y, -1)\mid_{(1,1,4)} = (3,5,-1)$$

ここで，接平面 Γ 上に任意の点 (x,y,z) と点 $(1,1,4)$ が作るベクトル $(x-1, y-1, z-4)$ と法線ベクトルは直交するので，

$$(3,5,-1)\cdot(x-1,y-1,z-4) = 0$$
$$3x+5y-z = 4$$

法線の方程式は，法線上に任意の点 (x,y,z) をとると，(x,y,z) と $(1,1,4)$ が作るベクトルは，法線ベクトルのスカラー倍となることが分かる．したがって，

$$(x-1,y-1,z-4) = (3,5,-1)t$$
$$(x,y,z) = (1,1,4) + (3,5-1)t$$

と表せる．

6.5 全微分

1.

方向微分は

$$f'_{\hat{u}}(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\hat{u}$$

で与えられる．ここで，$\hat{u}$ は u 方向の単位ベクトルを表わす．

(a) 単位方向ベクトル $\hat{u}$ を求めると

$$\hat{u} = \frac{(1,-1)}{\|(1,-1)\|} = \frac{(1,-1)}{\sqrt{1+1}} = \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$$
$$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (2x, 2y)$$

よって，点 $(1,2)$ における方向微分は

$$f'_{\hat{u}}(1,2) = \nabla f(1,2)\cdot\hat{u} = (2,4)\cdot\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = \frac{2-4}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

(b) 単位方向ベクトル $\hat{u}$ を求めると

$$\hat{u} = \frac{(1,-1)}{\|(1,-1)\|} = \frac{(1,-1)}{\sqrt{1+1}} = \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$$
$$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (e^y - ye^x, xe^y - e^x)$$

よって，点 $(1,2)$ における方向微分は

$$
\begin{aligned}
f'_{\hat{u}}(1,2) &= \nabla f(1,2)\cdot\hat{u} = (e^y - ye^x, xe^y - e^x)\mid_{(1,2)}\cdot\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} \\
&= (e^2-2e, e^2-e)\cdot\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^2-2e-e^2+e) = -\frac{e}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

2.

(a) $\frac{\pi}{3}$ 方向とは，x 軸から $\frac{\pi}{3}$ の方向のことである．そこで，単位方向ベクトル $\hat{u}$ を求めると

$$\hat{u} = (\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (\frac{-2y}{(x-y)^2}, \frac{2x}{(x-y)^2})$$

よって，点 $(1,0)$ における方向微分は

$$f'_{\hat{u}}(1,0) = \nabla f(1,0)\cdot\hat{u} = (0,2)\cdot(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}$$

(b) $\frac{\pi}{3}$ 方向とは，x 軸から $\frac{\pi}{3}$ の方向のことである．そこで，単位方向ベクトル $\hat{u}$ を求めると

$$\hat{u} = (\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2})$$

よって，点 $(1,0)$ における方向微分は

$$f'_{\hat{u}}(1,0) = \nabla f(1,0)\cdot\hat{u} = (2,0)\cdot(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1$$

3.

(a) 単位方向ベクトル $\hat{u}$ を求めると

$$\hat{u} = \frac{(-1,3)}{\|(-1,3)\|} = \frac{(-1,3)}{\sqrt{1+9}} = \frac{(-1,3)}{\sqrt{10}}$$

$$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (\log y, \frac{x+1}{y})$$

よって，点 $(0,1)$ における方向微分は

$$
\begin{aligned}
f'_{\hat{u}}(0,1) &= \nabla f(0,1)\cdot\hat{u} = (\log y, \frac{x+1}{y})\mid_{(0,1)}\cdot\frac{(-1,3)}{\sqrt{10}} \\
&= (0,1)\cdot\frac{(-1,3)}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}
\end{aligned}
$$

次に方向微分が最大になる方向単位ベクトルは，$\nabla f(0,1)$ と同じ方向であるから，$(0,1)$ となる．

(b) 単位方向ベクトル $\hat{u}$ を求めると

$$\hat{u} = \frac{(-1,3)}{\|(-1,3)\|} = \frac{(-1,3)}{\sqrt{1+9}} = \frac{(-1,3)}{\sqrt{10}}$$

$$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (y^2 e^{xy} + (x-1)y^3 e^{xy}, 2y(x-1)e^{xy} + x(x-1)y^2 e^{xy})$$

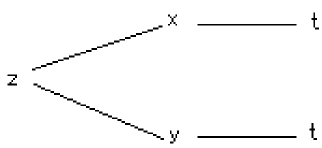
よって，点 $(0,1)$ における方向微分は

$$\begin{aligned} f'_{\hat{u}}(0,1) &= \nabla f(0,1) \cdot \hat{u} = (\log y, \frac{x+1}{y}) \mid_{(0,1)} \cdot \frac{(-1,3)}{\sqrt{10}} \\ &= (y^2 e^{xy} + (x-1)y^3 e^{xy}, 2y(x-1)e^{xy} + x(x-1)y^2 e^{xy}) \mid_{(0,1)} \cdot \frac{(-1,1)}{\sqrt{10}} \\ &= (0,-2) \cdot \frac{(-1,3)}{\sqrt{10}} = -\frac{6}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

次に方向微分が最大になる方向単位ベクトルは，$\nabla f(0,1)$ と同じ方向であるから，$\frac{(0,-2)}{\|(0,-2)\|} = (0,-1)$ となる．

6.6 合成関数の偏微分法

1.



(a)

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x \cdot 2 + 2 \cdot 3t^2 \\ &= 8t + 6t^2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x(-\sin t) + 2y\cos t \\ &= -2\sin t\cos t + 2\sin t\cos t = 0 \end{aligned}$$

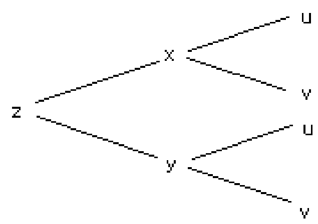
(c)

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2x+y)(-\sin t) + (x+4y)\cos t\\ &= (2\cos t + \sin t)(-\sin t) + (\cos t + 4\sin t)\cos t\\ &= -2\sin t\cos t - \sin^2 t + \cos^2 t + 4\sin t\cos t\\ &= \cos^2 t - \sin^2 t + 2\sin t\cos t = \cos 2t + \sin 2t\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 3x^2y^2\cdot 2t + 2x^3y\cdot 3t^2\\ &= 3t^4t^6\cdot 2t + 2t^6t^3\cdot 3t^3 = 6t^{11} + 6t^{11} = 12t^{11}\end{aligned}$$

2.



(a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2x + 2y\cdot 2\\ &= 2x + 4y = 2(u-2v) + 4(2u+v) = 10u\end{aligned}$$

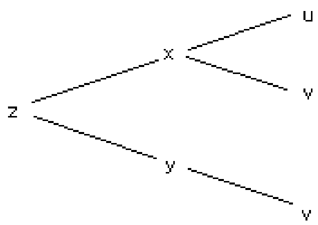
$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 2x(-2) + 2y\\ &= -4x + 2y = -4(u-2v) + 2(2u+v) = 10v\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2x + y + (x+4y)v\\ &= 2(u+v) + uv + (u+v+4uv)v = 2u + 2v + 2uv + v^2 + 4uv^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 2x + y + (x+4y)u\\ &= 2(u+v) + uv + (u+v+4uv)u = 2u + 2v + 2uv + u^2 + 4u^2v\end{aligned}$$

(c)



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} = 2xy^2 \cdot v = 2uv \cdot v^4 \cdot v = 2uv^6$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dv} = 2xy^2 \cdot u + 2x^2y \cdot 2v \\ &= 2uv(v^2)^2 \cdot u + 2(uv)^2v^2 \cdot 2v = 2u^2v^5 + 4u^2v^5 = 6u^2v^5\end{aligned}$$

6.7 2 変数関数の極値

1.

2 変数関数の Taylor の定理

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0, y_0) + \cdots$$

(a) Taylor の定理で $x_0 = 1, y_0 = 1, 1+h = x, 1+k = y$ とおくと

$$f(x,y) = f(1,1) + ((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial}{\partial y})f(1,1) + \frac{1}{2!}((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial}{\partial y})^2 f(1,1) + \cdots$$

$$f_x = 2xy, f_y = x^2$$

$$f_{xx} = 2y, f_{xy} = 2x, f_{yy} = 0$$

よって

$$f(1,1) = 1, f_x(1,1) = 2, f_y(1,1) = 1, f_{xx}(1,1) = 2, f_{xy}(1,1) = 2, f_{yy}(1,1) = 0$$

したがって,

$$\begin{aligned}f(x,y) &= 1 + 2(x-1) + y - 1 + \frac{1}{2}\left(2(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1)\right) \\ &= 1 + 2(x-1) + y - 1 + (x-1)^2 + 2(x-1)(y-1)\end{aligned}$$

(b)

$$f_x = -y\sin xy, f_y = -x\sin xy$$

$$f_{xx} = -y^2\cos xy, f_{xy} = -\sin xy - xy\cos xy, f_{yy} = -x^2\cos xy$$

よって

$f(1, \frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ $\quad f_x(1, \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

$f_y(1, \frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$ $\quad f_{xx}(1, \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi^2}{4}$

$f_{xy}(1, \frac{\pi}{2}) = -1$ $\quad f_{yy}(1, \frac{\pi}{2}) = -1$

したがって,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 - \frac{\pi}{2}(x-1) - (y - \frac{\pi}{2}) \\ &+ \frac{1}{2}\left((x-1)^2(-\frac{\pi^2}{4}) + 2(x-1)(y-\frac{\pi}{2})(-1) + (-1)(y-\frac{\pi}{2})^2\right) \end{aligned}$$

(c)

$$f_x = \frac{-1}{1-x+y}, f_y = \frac{1}{1-x+y}$$

$$f_{xx} = \frac{-1}{(1-x+y)^2}, f_{xy} = \frac{1}{(1-x+y)^2}, f_{yy} = \frac{-1}{(1-x+y)^2}$$

よって

$f(1, 1) = \log(1-1+1) = 0$ $\quad f_x(1, 1) = \frac{1}{1-1+1} = -1$

$f_y(1, 1) = 1$ $\quad f_{xx}(1, 1) = -1$

$f_{xy}(1, 1) = 1$ $\quad f_{yy}(1, 1) = -1$

したがって,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 - (x-1) + (y-1) + \frac{1}{2}\left(-(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) - (y-1)^2\right) \\ &= -(x-1) + y - 1 + \frac{1}{2}\left(-(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) - (y-1)^2\right) \end{aligned}$$

(d)

$$f_x = e^{2x+y} + 2xe^{2x+y},\ f_y = xe^{2x+y}$$

$$f_{xx} = 2e^{2x+y} + 2e^{2x+y} + 4xe^{2x+y},\ f_{xy} = e^{2x+y} + 2xe^{2x+y}, f_{yy} = xe^{2x+y}$$

よって

$f(0, 0) = 0$ $\quad f_x(0, 0) = 1$

$f_y(0, 0) = 0$ $\quad f_{xx}(0, 0) = 2 + 2 = 4$

$f_{xy}(0, 0) = 1$ $\quad f_{yy}(0, 0) = 0$

したがって,

$$f(x, y) = x + \frac{1}{2}\left(4x^2 + 2xy\right)$$

2.

(a) $f(x,y)=2x-x^2-y^2$ より $f_x=2-2x, f_y=-2y$. $f(x,y)$ が (x_0,y_0) で極値をとるならば

$$f_x(x_0,y_0)=2-2x_0=0, f_y(x_0,y_0)=-2y_0=0$$

これを x_0,y_0 について解くと $x_0=1$, $y_0=0$. 次に $f_{xx}(x,y)=-2, f_{xy}(x,y)=0, f_{yy}(x,y)=-2$, $\Delta\mid_{(1,0)}=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=(-2)(-2)=4>0$ より $\Delta>0, A=f_{xx}(1,0)=-2<0$ となるので $f(1,0)=2-1=1$ は極大値.

(b) $f(x,y)=x^2-6y^2+y^3$ より $f_x=2x, f_y=-12y+3y^2$. $f(x,y)$ が (x_0,y_0) で極値をとるならば

$$f_x(x_0,y_0)=2x_0=0, f_y(x_0,y_0)=-12y_0+3y_0^2=3y_0(y_0-4)=0$$

これを x_0,y_0 について解くと $x_0=0$, $y_0=0,4$. 次に $f_{xx}(x,y)=2, f_{xy}(x,y)=0, f_{yy}(x,y)=-12+6y$, $\Delta\mid_{(0,0)}=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=2(-12)=-24<0$ より $f(0,0)$ は鞍点. また, $\Delta\mid_{(0,4)}=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=2(-12+24)=24>0$, $A=f_{xx}(0,4)=2>0$ より $f(0,4)=-96+64=-32$ は極小値.

(c) $f(x,y)=x^3-3x+y^2$ より $f_x=3x^2-3, f_y=2y$. $f(x,y)$ が (x_0,y_0) で極値をとるならば

$$f_x(x_0,y_0)=3x_0^2-3=0, f_y(x_0,y_0)=2y_0=0$$

これを x_0,y_0 について解くと $x_0=\pm1$, $y_0=0$. 次に $f_{xx}(x,y)=6x, f_{xy}(x,y)=0, f_{yy}(x,y)=2$, $\Delta\mid_{(1,0)}=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=12>0$ より $\Delta>0, A=f_{xx}(1,0)=6>0$ となるので, $f(1,0)=-2$ は極小値. また, $\Delta\mid_{(-1,0)}=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=-6\cdot2=-12<0$ より $f(-1,0)$ は鞍点

(d) $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-3y$ より $f_x=2x+y-3, f_y=x+2y-3$. $f(x,y)$ が (x_0,y_0) で極値をとるならば

$$f_x(x_0,y_0)=2x_0+y_0-3=0, f_y(x_0,y_0)=x_0+2y_0-3=0$$

これを x_0,y_0 について解くと $x_0=1$, $y_0=1$. 次に $f_{xx}(x,y)=2, f_{xy}(x,y)=1, f_{yy}(x,y)=2$, $\Delta\mid_{(1,1)}=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=2\cdot2-1=3>0$ より $\Delta>0, A=f_{xx}(1,1)=2>0$ となるので, $f(1,1)=-1+1+1-3-3=-3$ は極小値.

6.8 陰関数

1.

(a) $f(x,y)=x-y^2-1=0$ とおき, 全微分を求めると, $df=f_xdx+f_ydy=dx-2ydy=0$. これより, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$. 次に, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求める.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{4y^2}\cdot\frac{1}{2y}=-\frac{1}{8y^3}$$

(b) $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 - 1 = 0$ とおき，全微分を求めると，$df = f_x dx + f_y dy = (2x+y)dx + (x+4y)dy = 0$. これより，$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+4y}$. 次に，$\frac{d^2y}{dx^2}$ を求める．

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-(2+\frac{dy}{dx})(x+4y) + (2x+y)(1+4\frac{dy}{dx})}{(x+4y)^2} \\
&= \frac{-2(x+4y) + 2x + y - (x+4y)(\frac{-(2x+y)}{x+4y}) + (2x+y)(\frac{-4(2x+y)}{x+4y})}{(x+4y)^2} \\
&= \frac{-7y(x+4y) + (x+4y)(2x+y) - 4(2x+y)^2}{(x+4y)^3} \\
&= \frac{-7xy - 28y^2 + 2x^2 + 9xy + 4y^2 - 16x^2 - 16xy - 4y^2}{(x+4y)^3} \\
&= \frac{-14x^2 - 14xy - 28y^2}{(x+4y)^3} = -\frac{14(x^2+xy+2y^2}{(x+4y)^3}
\end{aligned}$$

(c) $f(x,y) = x - e^y = 0$ とおき，全微分を求めると，$df = f_x dx + f_y dy = dx + -e^y dy = 0$. これより，$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = e^{-y}$. 次に，$\frac{d^2y}{dx^2}$ を求める．

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-y}\frac{dy}{dx} = e^{-y} \cdot e^{-y} = e^{-2y}$$

(d) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 - 1 = 0$ とおき，全微分を求めると，$df = f_x dx + f_y dy = (3x^2 - 3y)dx + (-3x + 3y^2)dy = 0$. これより，$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-3y}{3x-3y^2} = \frac{x^2-y}{x-y^2}$. 次に，$\frac{d^2y}{dx^2}$ を求める．

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{(2x - \frac{dy}{dx})(x-y^2) - (x^2-y)(1-2y\frac{dy}{dx})}{(x-y^2)^2} \\
&= \frac{2x(x-y^2) - (x^2-y) - (x^2-y) + 2y(x^2-y) \cdot \frac{x^2-y}{x-y^2}}{(x-y^2)^2} \\
&= \frac{(x-y^2)\left(2x(x-y^2) - 2(x^2-y)\right) + 2y(x^2-y)^2}{(x-y^2)^3} \\
&= \frac{(x-y^2)(-2xy^2+2y) + 2y(x^2-y)^2}{(x-y^2)^3} \\
&= \frac{-2x^2y^2 + 2xy^4 + 2xy - 2y^3 + 2x^4y - 4x^2y^2 + 2y^3}{(x-y^2)^3} \\
&= \frac{2x^4y - 6x^2y^2 + 2xy^4 + 2xy}{(x-y^2)^3} \\
&= \frac{2xy(x^3 - 3xy + y^3 + 1)}{(x-y^2)^3}
\end{aligned}$$

2.

(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

$g(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$ の全微分を求めると，

$df = 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0$

$dg = dx + dy + dz = 0$

$dz = -dx - dy$ で置き換えると，

$$2xdx + 2ydy + 2z(-dx - dy) = 0$$

これより，

$$(2x - 2z)dx + (2y - 2z)dy = 0$$

となり，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(2x - 2z)}{2y - 2z} = -\frac{z - x}{y - z}$$

次に，$dy = -dz - dx$ で置き換えると，

$$2xdx + 2y(-dz - dx) + 2zdz = 0$$

これより，

$$(2x - 2y)dx + (2z - 2y)dz = 0$$

となり，

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x - 2y}{2y - 2z} = \frac{x - y}{y - z}$$

(b) $f(x, y, z) = xyz - 1 = 0$

$g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$ の全微分を求めると，

$df = yzdx + xzdy + xydz = 0$

$dg = dx + dy + dz = 0$

$dz = -dx - dy$ で置き換えると，

$$yzdx + xzdy + xy(-dx - dy) = 0$$

これより，

$$(yz - xy)dx + (xz - xy)dy = 0$$

となり，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(z - x)}{x(y - z)}$$

次に，$dy = -dz - dx$ で置き換えると，

$$yzdx + xz(-dz - dx) + xydz = 0$$

これより，

$$(yz - xz)dx + (xy - xz)dz = 0$$

となり，

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z(x - y)}{x(y - z)}$$

6.9 陰関数

1.

(a) $F(x,y,\lambda) = x^2 + 3y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ とおくと

$$F_\lambda = 0 \text{ より } x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{9.1}$$
$$F_x = 0 \text{ より } 2x - 2x\lambda = 0 \tag{9.2}$$
$$F_y = 0 \text{ より } 6y - 2y\lambda = 0 \tag{9.3}$$

$x \neq 0$ のとき式 (9.2) より，$\lambda = 1$，式 (9.3) より $4y = 0$．したがって，$y = 0$．これを式 (refeq:6-9-1a-1) に代入すると，$x = \pm 1$．次に，$x = 0$ のとき，式 (refeq:6-9-1a-1) より，$y = \pm 1$．したがって，式 (9.1),(9.2),(9.3) の解は,

$$(x,y) = (1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)$$

このとき，$f(x,y) = x^2 + 3y^2$ の値は,

$$f(1,0) = 1, f(-1,0) = 1, f(0,1) = 3, f(0,-1) = 3$$

一方，$g(x,y) = 0$ は有界閉集合で，この上で f は連続だから最大値，最小値を持つ．以上より，最大値は

$$f(0,1) = f(0,-1) = 3,$$

最小値は

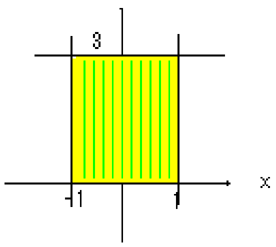
$$f(1,0) = f(-1,0) = 1.$$

7.1 2 重積分

7.2 累次積分

1.

(a)



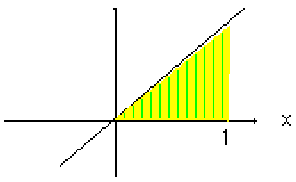
$$\Omega = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3\}$$

より V-simple を用いると

$$\begin{aligned}\iint_\Omega x\ dxdy &= \int_{-1}^{1}\int_{y=0}^{3} x\ dxdy \\ &= \int_{-1}^{1} [xy]_0^3\ dx \\ &= \int_{-1}^{1} 3x\ dx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0\end{aligned}$$

ここで，$\int_{-1}^{1} 3x\ dx$ をわざわざ計算したが，$3x$ が奇関数であることに気付けば，計算しなくても 0 であることが分かる．

(b)

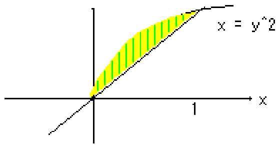


$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

より V-simple を用いると

$$\begin{aligned}\iint_\Omega x\ dxdy &= \int_{0}^{1}\int_{y=0}^{x} (2x + 3y)\ dydx \\ &= \int_0^1 \left[2xy + \frac{3y^2}{2}\right]_0^x\ dx \\ &= \int_0^1 (2x^2 + \frac{3x^2}{2})\ dx \\ &= \int_0^1 \frac{7x^2}{2}\ dx \\ &= \left[\frac{7}{6}x^3\right]_0^1 = \frac{7}{6}\end{aligned}$$

(c)

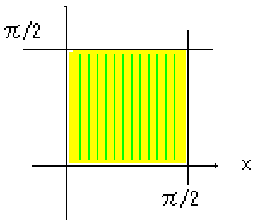


$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\}$$

より H-simple を用いると

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega}(1 + x + xy)\, dxdy &= \int_0^1 \int_{x=y^2}^{y} (1 + x + xy)\, dxdy \\
&= \int_0^1 \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 y}{2}\right]_{y^2}^{y} dy \\
&= \int_0^1 [(y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2}) - (y^2 + \frac{y^4}{2} + \frac{y^5}{2})]\, dy \\
&= \int_0^1 (y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2} - \frac{y^4}{2} - \frac{y^5}{2})\, dy \\
&= \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{8} - \frac{y^5}{10} - \frac{y^6}{12}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{11}{40}
\end{aligned}$$

(d)

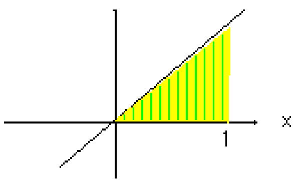


$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$$

より V-simple を用いると

$$\iint_\Omega \sin(x+y)\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dydx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos(x+y)]_0^{\frac{\pi}{2}}\ dx$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x+\frac{\pi}{2}) - \cos x)\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,dx$$
$$= [-\cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \sin\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 2$$

(e)



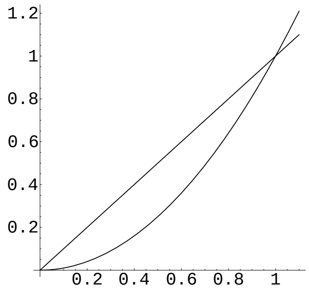
$$\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$$

より V-simple を用いると

$$\iint_\Omega x^3\,dxdy = \int_0^1\int_{y=0}^{x} x^3 y\,dydx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3y^2}{2}\right]_0^x\ dx$$
$$= \int_0^1 (\frac{x^5}{2})\,dx$$
$$= \left[\frac{x^6}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

2.

(a)



$\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^x f(x,y)\,dydx$ は縦線集合として，累次積分が作られているので，これを横線集合として行なえばよい．

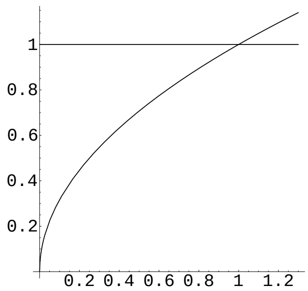
まず，横線は $y=0$ から $y=1$ まで引けるので，$0\le y\le 1$ が決まる．そして，小さなブロックを左端から右端まで積むので，左端の曲線の式を求めると，$y=x$ より，$x=y$ となる．また，右端の曲線の式は $y=x^2$ より，$x=\pm\sqrt{y}$ となるが，x は正であるから，$x=\sqrt{y}$ となる．これより，

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x,y):0\le x\le 1, x^2\le y\le x\}\\ &= \{(x,y):0\le y\le 1, y\le x\le\sqrt{y}\}\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\int_0^1\int_{x^2}^x f(x,y)\,dydx=\int_{y=0}^1\int_{x=y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dydx$$

(b)



$\displaystyle\int_0^1\int_0^{y^2} f(x,y)\,dxdy$ は横線集合として，累次積分が作られているので，これを縦線集合として行なえばよい．

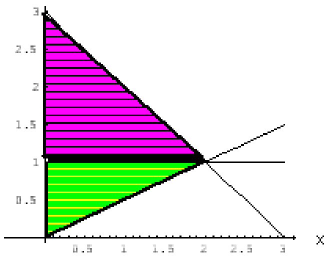
まず，縦線は $x=0$ から $x=1$ まで引けるので，$0\le x\le 1$ が決まる．そして，小さなブロックを下端から上端まで積むので，下端の曲線の式を求めると，$x=y^2$ より，$y=\sqrt{x}$ となる．また，上端の曲線の式は $y=1$．これより，

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x,y):0\le y\le 1, 0\le x\le y^2\}\\ &= \{(x,y):0\le x\le 1, \sqrt{x}\le y\le 1\}\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y)\,dydx = \int_{x=0}^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,dydx$$

(c)



$\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)\,dydx$ は縦線集合として，累次積分が作られているので，これを横線集合として行なえばよい．

まず，横線は $y=0$ から $y=1$ までと $y=1$ から $y=3$ までとで，右端の曲線が異なる．そこで，まず，$y=0$ から $y=1$ までの領域を表すと，左端の曲線は $x=0$ で右端の曲線の式は $y=\frac{x}{2}$ より，$x=2y$ となる．これより，

$$\Omega_1 = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 2y\}$$

次に，$y=1$ から $y=3$ までの領域を表す．左端の曲線は $x=0$ で右端の曲線の式は $y=\frac{x}{2}$ より，$x=2y$ となる．これより，

$$\Omega_1 = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 2y\}$$

引けるので，$0 \leq y \leq 1$ が決まる．そして，小さなブロックを左端から右端まで積むので，左端の曲線の式を求めると，$y=x$ より，$x=y$ となる．また，右端の曲線の式は $y=x^2$ より，$x=\pm\sqrt{y}$ となるが，x は正であるから，$x=\sqrt{y}$ となる．これより，

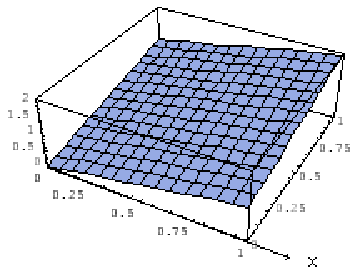
$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\} \\ &= \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq \sqrt{y}\}\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dydx = \int_{y=0}^1 \int_{x=y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dydx$$

3.

(a)



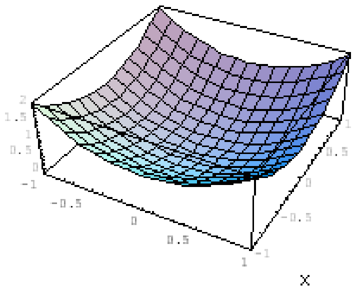
領域 Ω を縦線集合で表すと，$\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$ となる．これより，求める体積は,

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_{y=0}^{1-x} (x+y)\, dydx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{x^2-2x+1}{2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

(b) 領域 Ω を縦線集合で表すと，$\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ となる．これより，求める体積は,

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_{y=0}^{1} (2x+3y)\, dydx \\
&= \int_0^1 \left[2xy + \frac{3y^2}{2} \right]_0^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(2x + \frac{3}{2} \right) dx \\
&= \left[x^2 + \frac{3x}{2} \right]_0^1 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

(c)



領域 Ω は円なので，極座標で表すと，$\Omega = \{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1\}$ となる．これより，求める体積は,

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{1} r^2 \cdot r \ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \ dx \\
&= \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

7.3 変数変換

1.

(a)

$$\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

より極座標を用いる．$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より $x^2 + y^2 = r^2 \leq 4$．よって Ω は

$$\Gamma = \{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 2\}$$

に移るので,

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega (x^2 + y^2) dxdy &= \iint_\Gamma r^2 |J(r,\theta)| drd\theta \ (\text{ただし}, |J(r, theta)| = r) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 drd\theta = (\int_0^{2\pi} d\theta)(\int_0^2 r^3 dr) \\
&= 2\pi([\frac{r^4}{4}]_0^2 = 2\pi \cdot 4 = 8\pi
\end{aligned}
$$

(b)

$$\Omega = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \ y \geq 0\}$$

より極座標を用いる．$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より $1 \le r^2 \le 4$．また，$y = r\cos\theta \ge 0$ より，$0 \le \theta \le \pi$．よって Ω は

$$\Gamma = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le \pi,\ 1 \le r \le 2\}$$

に移るので，

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Omega \frac{1}{x^2+y^2} dxdy \\ &= \iint_\Gamma \frac{1}{r^2} |J(r,\theta)| drd\theta \ (\text{ただし}, |J(r, theta)| = r) \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 \frac{1}{r} drd\theta \\ &= \int_0^\pi [-\frac{1}{r^2}]_1^2 \ d\theta = -\int_0^\pi (\frac{1}{4} - 1)\ d\theta \\ &= \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

(c)

$$\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$$

より極座標を用いる．$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より $x^2 + y^2 = r^2 \le 1$．よって Ω は

$$\Gamma = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1\}$$

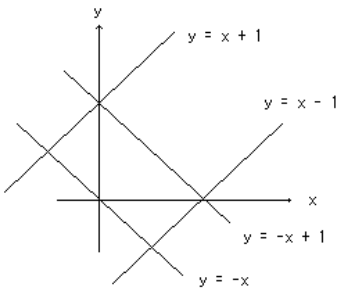
に移るので，

$$\begin{aligned} \iint_\Omega y^2 dxdy &= \iint_\Gamma r^2 \sin^2\theta |J(r,\theta)| drd\theta \ (\text{ただし}, |J(r, theta)| = r) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \sin^2\theta drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \sin^2\theta \right]_0^1 \ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2\theta \ d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{4} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(d)

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \le x + y \le 1, |x - y| \le 1\}$$

は，$y \ge -x, y \le -x + 1, y \ge x - 1, y \le x - 1$ で囲まれた領域である．



ここで, $u=x+y, v=x-y$ とおくと, $0 \leq x+y \leq 1$ より $0 \leq u \leq 1$ に移り, $-1 \leq x-y \leq 1$ より $-1 \leq v \leq 1$ に移る．したがって，Ω は

$$\Gamma = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}$$

に移る．また，$u=x+y$ と $v=x-y$ を x と y について解くと,

$$x = \frac{u+v}{2},\ y = \frac{u-v}{2}$$

これより Jacobian は,

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

よって,

$$\begin{aligned}\iint_\Omega (x+y)\, dxdy &= \iint_\Gamma u|J(u,v)|\, dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-1}^1 udvdu \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-1}^1 du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 du = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(e)

$$\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 2x\}$$

は, 中心が $(1,0)$ で半径 1 の円より, 極座標を用いる．$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より $r^2 \leq 2r\cos\theta$. よって，$r \leq 2\cos\theta$. 次に，θ の範囲を求める．$r = 2\cos\theta$ において，$r=0$ となる θ を求めると，$\cos\theta = 0$ より，$\theta = -\pi/2, \pi/2$ となる．よって Ω は

$$\Gamma = \{(r,\theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta\}$$

に移るので，

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Omega} \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy \\
&= \iint_{\Gamma} \sqrt{4-r^2}|J(r,\theta)|drd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4-r^2}rdr
\end{aligned}
$$

ここで，$t=4-r^2$，$dt=-2rdr$ より，

r	$0 \to 2\cos\theta$
t	$4 \to 4-4\cos^2\theta$

したがって，

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2\cos\theta} \sqrt{4-r^2}r\ drd\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{t=4}^{4\sin^2\theta} \sqrt{t}(-\frac{dt}{2})\ d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}[t^3/2]_{t=4}^{4\sin^2\theta}\ d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (8\sin^3\theta-8)\ d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \frac{16}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}
$$

2. $u=x-y, v=x+y$ とおくと，領域 Ω は領域

$$
\Gamma = \{(u,v) : 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}
$$

に移る．また，$x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{v-u}{2}$ より，

$$
J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Omega} (2x+3y)\ dxdy &= \iint_{\Gamma} (\frac{-u+5v}{2}(\frac{1}{2})\ dvdu \\
&= \int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{1} \left(\frac{-u+5v}{4}\right)\ dvdu \\
&= \frac{1}{4}\left[-uv+\frac{5v^2}{2}\right]_0^1 du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 (-u+\frac{5}{2})du = \frac{1}{4}\left[-\frac{u^2}{2}+\frac{5u}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}) = \frac{1}{4}(\frac{4}{2}) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

3. $u = x - y,\ v = x + 2y$ とおくと，領域 Ω は領域

$$\Gamma = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$$

に移る．また，$x = \frac{2u+v}{3}, y = \frac{v-u}{3}$ より，

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

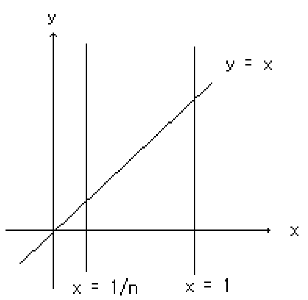
したがって，

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega 2x\ dxdy &= \iint_\Gamma (\frac{4u+2v}{3}(\frac{1}{3})\ dvdu \\
&= \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^1 \left(\frac{4u+2v}{9}\right)\ dvdu \\
&= \frac{2}{9}\left[2uv + \frac{v^2}{2}\right]_0^1 du \\
&= \frac{2}{9}\int_0^1 (\frac{1}{2} + 2u)du = \frac{2}{9}\left[\frac{u}{2} + u^2\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{9}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

7.4 広義積分

1.

(a) Ω を図示すると，



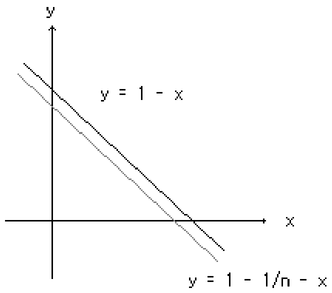
この領域上の $x = 0$ の線上で被積分関数 $e^{y/x}$ は定義されていない．そこで，$x = 0$ を避けるように，直線 $x = \frac{1}{n}$ を引き，図のような領域を考える．この領域を v-simple で表すと

$$\Omega_n = \{(x, y) : \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0\ leqy \leq x\}$$

Ω 上での積分は

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} e^{y/x}\ dxdy &= \lim_{n\to\infty}\iint_{\Omega_n} e^{y/x}\ dxdy \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\int_{y=0}^{x} e^{y/x}\ dydx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}[xe^{y/x}]_0^x\ dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}(x(e-1)\ dx \\
&= \lim_{n\to\infty}(e-1)\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = (e-1)\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}=\frac{1}{2n^2}) = \frac{e-1}{2}
\end{aligned}$$

(b) Ω を図示すると，



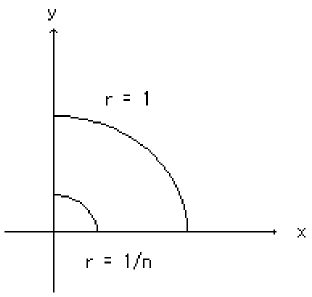
この領域上の $y=1-x$ の線上で被積分関数 $\frac{x}{\sqrt{1-x-y}}$ は定義されていない．そこで，$y=1-x$ を避けるように，直線 $x=1-\frac{1}{n}-x$ を引き，図のような領域を考える．この領域を v-simple で表すと

$$\Omega_n = \{(x,y) : 0 \le x \le 1-\frac{1}{n}, 0\ leqy \le 1-\frac{1}{n}-x\}$$

Ω 上での積分は

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{1-x-y}}\, dxdy &= \lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega_n} \frac{x}{\sqrt{1-x-y}}\, dxdy \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \int_{y=0}^{1-\frac{1}{n}-x} \frac{x}{\sqrt{1-x-y}}\, dydx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} -\left[2x(1-(x+y)^{1/2}\right]_0^{1-\frac{1}{n}-x}\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \left(-2x(\frac{1}{n})^{1/2} + 2x(1-x)^{1/2}\right)\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}}(-x^2) + \frac{4(1-x)^{5/2}}{5} - \frac{4(1-x)^{3/2}}{3}\right]_0^{1-\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}(-(1-\frac{1}{n})^2) + \frac{4}{5}(\frac{1}{n})^{5/2} - \frac{4}{3}(\frac{1}{n})^{3/2} - \frac{4}{5} + \frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}
$$

(c) Ω を図示すると，



この領域上の $x^2+y^2=0$ で被積分関数 $\log(x^2+y^2)$ は定義されていない．そこで, $x^2+y^2=0$ を避けるように，弧 $r=\frac{1}{n}$ を描き，図のような領域を考える．この領域を平面の曲座標で表すと

$$
\Omega_n = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \frac{1}{n}\ leqr \le 1\}
$$

Ω 上での積分は

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \log(x^2+y^2)\ dxdy &= \lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega_n} \\
log(x^2+y^2)\ dxdy& \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_1^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=\frac{1}{n}}^{1} \log r^2 \cdot r\ drd\theta \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_1^{\frac{\pi}{2}} \int_{t=\frac{1}{n^2}}^{1} \log t \cdot \frac{dt}{2}\ d\theta \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \left[t \log t - t\right]_{\frac{1}{n^2}}\ \ 1\ d\theta \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_1^{\frac{\pi}{2}} \left(-1 - \frac{1}{n^2}\log(\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{n^2}\right)\ d\theta \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

第 10 章

演習問題詳解

1.1 関数 (FUNCTIONS)

1.

(a) それぞれ異なる x に対して，求めることのできる実数 y は $y = \pm x$ と 2 つの y が対応しているので 2 価関数

(b) $y = x^{\frac{2}{3}}$ となり，実数の値をとる 3 乗根は 1 つしかないので，1 価関数

2.

(a) 定義域は関数 f(x) の値が実数をとるような x の集合のこと．よって $D(f) = [-2, 2]$

(b) 定義域は関数 f(x) の値が実数をとるような x の集合のこと.$D(h) = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, \frac{4}{3}]$

3.

(a)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) - 1 = 2x^2 + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 1) = (2x - 1)^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 2$$

(b) $f \circ g$ が意味を持つには $g(x)$ の値域が $f(x)$ の定義域に含まれていなければならない．そこで，$g(x)$ の値域を調べる．

$$g(x) = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ 1 + x, & x \geq 1 \end{cases}$$

より $x < 1$ のとき，$g(x) = -x > -1$．これが $f(x)$ の定義域に含まれるので，$g(x) > 0$ の場合と $g(x) \leq 0$ の場合に分ける．

$x < 0$ ならば, $g(x) > 0$. また, $0 \leq x < 1$ ならば, $g(x) \leq 0$. よって $x < 0$ のとき, $f(x) = x^2$ を用い，$0 \leq x < 1$ のとき，$f(x) = 1 - x$ を用いる．よって

$$f(g(x)) = g(x)^2 = (-x)^2 = x^2, \ x < 0$$

$$f(g(x)) = 1 - g(x) = 1 - (-x) = 1 + x, \ 0 \leq x < 1$$

次に, $x \geq 1$ のとき, $g(x) = 1+x > 2$．これが $f(x)$ の定義域に含まれるので, $f(x) = 1-x,\ x \leq 0$ を用いる．よって

$$f(g(x)) = g(x)^2 = (1+x)^2,\ x \geq 1$$

まとめると

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1+x & 0 \leq x < 1 \\ (1+x)^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

同様に,

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq 0 \\ -x^2 & 0 < x < 1 \\ 1+x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

4.

(a) まず，この関数が 1 対 1 の関数であることを示す.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow \frac{1}{x_1+2} = \frac{1}{x_2+2} \\ &\Longrightarrow x_1 + 2 = x_1 + 2 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

次に $f(f^{-1}(x)) = x$ を用る.

$$f(f^{-1}(x)) = f(y) = \frac{1}{y+2} = x$$

これを y について解くと $y + 2 = \dfrac{1}{x}$．よって $y = f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 2$ となる.

(b) この関数は 1 対 1 の関数ではない．なぜならば，$f(x) = x^2 + 4x - 2 = (x+2)^2 - 6$ より，y 軸対称．よって，逆関数は存在しない．ただ，$f(x)$ が 1 対 1 の関数となるように定義域を $\{x < -2\} \cup \{x \geq 2\}$ と表わすと，これらの定義域において,

$$f(f^{-1}(x)) = f(y) = y^2 + 4y - 2 = x$$

これを y について解くと $y = -2 + \sqrt{x+6}$ $(x \geq -6)$ $y = -2 - \sqrt{x+6}$ $(x \geq -6)$

5.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{1-|x|}$ より $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{1-|-x|} = \dfrac{x^2}{1-|x|} = f(x)$．したがって，偶関数である.

(b) $f(x) = \sin x$ より $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x$．したがって，奇関数である.

6.

(a) $f(x)$ と $g(x)$ を偶関数とする．つまり，$f(-x) = f(x), g(-x) = g(x)$ を満たす．このとき，$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x)$ となるので，偶関数と偶関数の積は偶関数.

次に，$f(-x) = f(x), h(-x) = -h(x)$ を満たすとする．このとき，$(fh)(-x) = f(-x)h(-x) = f(x)(-h(x)) = -f(x)h(x) = -(fh)(x)$ となるので，偶関数と奇関数の積は奇関数.

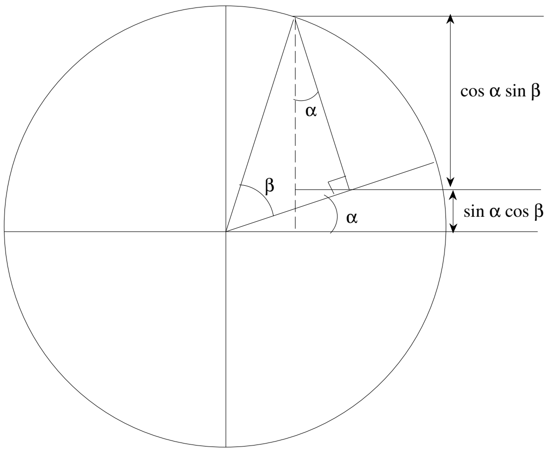
(b) 偶関数は $f(-x) = f(x)$ を満たす．これはグラフで考えると，y 軸を対称にして関数の値が等しいことを表している．つまり，偶関数は y 軸対称である．

次に，奇関数は $f(-x) = -f(x)$ を満たす．これはグラフで考えると，原点を中心にして対象になっていることを表している．つまり，奇関数は原点対象である．

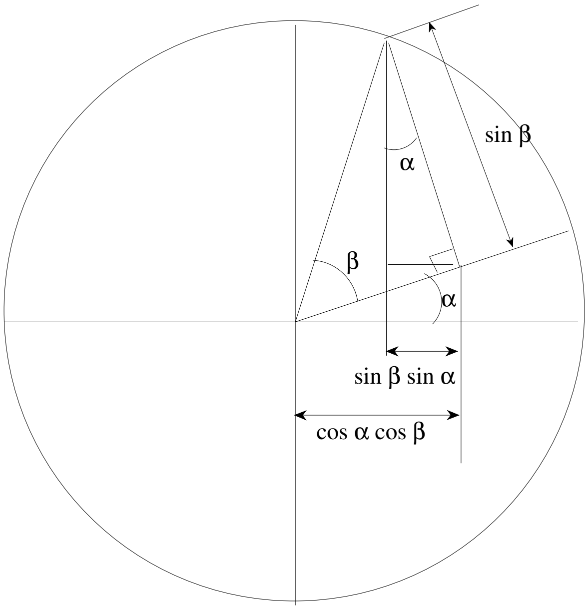
1.2 初等関数

1.

(a)



(b)



(c)

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos\alpha = \cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

これより，

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$$

(d)

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

これより，

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

(e)

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

ここで $A+B=\alpha,\ A-B=\beta$ とおくと,

$$A=\frac{\alpha+\beta}{2},\ B=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

となるので,

$$\sin\alpha+\sin\beta=2[\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}]$$

1.2

2.

(a)

$$\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

または,

$$\sin\frac{5\pi}{4}=\sin(\pi+\frac{\pi}{4})=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(b)

$$\begin{aligned}\sin\frac{7\pi}{12}&=\sin(\frac{3\pi}{12}+\frac{4\pi}{12})\\&=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

(c) $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ より

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

3.

(a) $y=\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$ とおくと

$$-\frac{1}{2}=\sin y,\ -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$$

これより $\sin^{-1}(-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{\pi}{6}$

(b) $y=\cos^{-1}(-1)$ とおくと

$$-1=\cos y,\ 0\le y\le\pi$$

これより $\cos^{-1}(-1)=\pi$

(c) $y=\tan^{-1}(-1)$ とおくと

$$-1=\tan y,\ -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$$

これより $\tan^{-1}(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$

(d) $y=\tan^{-1}(\sqrt{3})$ とおくと

$$\sqrt{3}=\tan y,\ -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$$

これより $\tan^{-1}(\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}$

4.

$u=\sin^{-1}x, v=\cos^{-1}x$ とおくと $x=\sin u\ (\dfrac{-\pi}{2}\le u\le\dfrac{\pi}{2}), x=\cos v\ (0\le v\le\pi)$.

これより $x=\sin u=\cos v=\sin(\frac{\pi}{2}-v)$．よって $u=\dfrac{\pi}{2}-v$ となり $u+v=\dfrac{\pi}{2}$.

5.

(a) $y=\sin^{-1}(-x)\Leftrightarrow -x=\sin y\ (\dfrac{-\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2})$ より $x=-\sin y\Leftrightarrow x=\sin -y\Leftrightarrow$ $-y=\sin^{-1}x\Leftrightarrow y=-\sin^{-1}x$

(b) $y=\cos^{-1}(-x)\Leftrightarrow -x=\cos y\ (0\le y\le\pi)$ より $x=-\cos y\Leftrightarrow x=\cos(\pi-y)$ $\Leftrightarrow \cos^{-1}x=\pi-y\Leftrightarrow y=\pi-\cos^{-1}x$

1.3 解答

1.3

1.

(a)

$$\lim_{x\to 2}(x^2+4x)=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}4x=4+8=12$$

(b) $x\to 2$ のとき，x^2-3x+2, x^2-4 共に 0 に近づく．よって

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^4-6x^3+x^2+2}{x-1}=\frac{2}{-1}=-2$$

(d)

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x^3-4x^2-3x-3)}{x-1}=-8$$

(e)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1\end{aligned}$$

(f) $a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ を用いる.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/3}-(1-x)^{1/3}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x[(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}(1-x)^{1/3}+(1-x)^{2/3}]}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x[(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}(1-x)^{1/3}+(1-x)^{2/3}]}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2}{(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}(1-x)^{1/3}+(1-x)^{2/3}}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

(g)

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}x^2=4$$

2.

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x/2x}{3\sin 3x/3x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\sin 2x/2x}{\lim_{x\to 0}\sin 3x/3x}=\frac{2}{3}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot 0=0\end{aligned}$$

別解$\frac{1-\cos x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}$ を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{-2sin^2\frac{x}{2}}{x}\\ &= -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\\ &= -4\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=0\end{aligned}$$

(c) $y=\sin^{-1}x$ とおくと $x=\sin y$. また, $x\to 0$ のとき, $y\to 0$. よって

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1$$

(d)

$$0\leq|x\sin\frac{1}{x}|=|x||\sin\frac{1}{x}|\leq|x|$$

より, はさみうちの定理を用いると

$$\lim_{x\to 0}|x\sin\frac{1}{x}|=0$$

これより，

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

3.

$||f(x)| - 0| = |f(x) - 0|$ に注意する．全ての正の数 $\varepsilon > 0$ に対して，δ が存在し，$|x-a| < \delta$ ならば $||f(x)| - 0| = |f(x) - 0| < \varepsilon$

1.4 解答

1.4

1.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty$ また，$\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = \infty$．　よって極限値は存在しない．

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} &= \lim_{x\to 0+}\frac{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{a+x-(a-x)} = \sqrt{a}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} &= \lim_{x\to 0-}\frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0-}\frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}}\\ &= \lim_{x\to 0-}\frac{x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|} = \lim_{x\to 0-}\frac{x\sqrt{1+\cos x}}{-\sin x} = -\sqrt{2}\end{aligned}$$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x} = 1$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin x$ は振動より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = \infty$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\cos(\frac{1}{x})$ は存在しない

2

1.

$$lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = 3$$

また，$f(2) = 3$ より，$f(x)$ は $x = 2$ で連続

3.

$a \in (0,\infty)$ のとき $\lim_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$ を示す．任意の正の数 ε に対して，$\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{a}}$ ととると，

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}|x-a| \le \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} \le \varepsilon$$

4.

(a) $f(x)=x^2-3x+1=(x-\dfrac{3}{2})^2-\dfrac{5}{4}$ より 最大値は $x=-2$ のとき $\max=11$ で 最小値は $x=1$ のとき, $\min=-1$

(b) $x\to 0+$ のとき $f(x)=\frac{1}{x}$ は無限大に近づくので，最大値はなし．また 最小値は $\min=1$

(c) $\max=\begin{cases}4-2a & a\le 0\\ 4-2a & 0<a<4\\ 0 & a\ge 4\end{cases}$ $\min=\begin{cases}0 & a\le 0\\ -\frac{a^2}{4} & 0<a<4\\ -\frac{a^2}{4} & a\ge 4\end{cases}$

5.

$f(x)=2\sin x-x$ とおくと，$f(x)$ は $[\dfrac{\pi}{2},\pi]$ で連続で $f(\dfrac{\pi}{2})=2-\dfrac{\pi}{2}>0$ また $f(\pi)=-\pi<0$ となるので，中間値の定理より $f(\xi)=0$ となる ξ が $[(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 内に存在する．

1.5 解答

1.5

1.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^4-3n^3=\lim_{n\to\infty}n^4(1-\frac{3}{n})=\infty$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{4n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(3+\frac{5}{n^2})}{n^3(4-\frac{1}{n^3})}=0$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-n}{n-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\frac{1}{n}-1)}{n(1-\frac{\sqrt{n}}{n})}=-1$

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{n+1}-\frac{n^3}{n^2+1}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n)(n^2+1)-n^3(n+1)}{(n+1)(n^2+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+2n}{n^3+n^2+n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})}{n^3(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})}=1\end{aligned}$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=0$$

2.

まず，$a>1$ とすると $\sqrt[n]{a}>1$ より $\sqrt[n]{a}=1+h,\ h>0$ とおける．よって

$$a=(1+h)^n=1+nh+\cdots+h^n\ge 1+nh$$

これより

$$\lim_{n\to\infty}h=\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}=0$$

$a=1$ のとき，全ての n で $\sqrt[n]{a}=1$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

$0<a<1$ のとき $b=\dfrac{1}{a}$ とおくと，$b>1$ となり，

$$1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

3.

(a) $0<b<a$ より $a^n<a^n+b^n<2a^n$．よって $a<(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}a$．これより $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=a$.

(b) $3^n\leq 1+2^n+3^n\leq 3\dot{3}^n$ より両辺に n 乗根を取ると $3\leq(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}\leq 3^{\frac{1}{n}}\dot{3}$ となる．$n\to\infty$ のとき $3^{\frac{1}{n}}\to 1$ となるので，はさみうちの定理より $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$

1.6 解答

1.6

1.

(a) どんな整数 N を選んでも $2^n\geq N$ となる番号 n が存在する．よって非有界

(b) a_n は $\sqrt{2}$ の第 n 位までを表わしているので，n がどんなに大きくなっても $\sqrt{2}$ より大きくなれない．よって有界

2.

(a) $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ とおくと $a_{n+1}=\sqrt{3a_n+4}$ より $\alpha=\sqrt{3\alpha+4}$ となる．そこで両辺を 2 乗すると $\alpha^2=3\alpha+4$ となるので，$\alpha=-1,4$．条件 $a_1=1$ より $\alpha=4$ と考えられる．次に $\lim_{n\to\infty}a_n=4$ であることを示す．定理 1．13 より $|a_{n+1}-4|\leq\lambda|a_n-4|$ となる $0<\lambda<1$ が存在することを示せばよい．

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-4|&=|\sqrt{3a_n+4}-4|=|\frac{3a_n+4-4^2}{\sqrt{3a_n+4}+4}|\\&=|\frac{3(a_n-4)}{\sqrt{3a_n+4}+4}|=\frac{3}{\sqrt{3a_n+4}+4}|a_n-4|\end{aligned}$$

ここで，$\lambda=\frac{3}{\sqrt{3a_n+4}+4}<1$

(b) $a_3=2^{\frac{1}{2}},a_4=2^{\frac{3}{4}},a_5=2^{\frac{5}{8}},\ldots,a_n=2^{\frac{2(n-2)-1}{2^{n-2}}}$．よって $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

3.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n^2})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n(1-\dfrac{1}{n})^n=e\dfrac{1}{e}=1$

(b) $\frac{2}{n}=\frac{1}{m}$ とおくと $n=2m$ よって

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n=\lim_{m\to\infty}[(1+\frac{1}{m})^m]^2=e^2$$

(c) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を用いる.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0$$

よって $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$

(d) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を用いる.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

よって $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$

4.

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e = 1$

(b) $e^h - 1 = x$ とおくと $h = \log(1+x)$ で $x \to 0$ と $h \to 0$ は同値. よって 1-8-1a より

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\log(1+x)} = 1$$

(c) $x - a = h$ とおくと

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\log x - \log a}{x-a} &= \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(\frac{a+h}{a}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{a}\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\log\left(1+\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{h}} = \frac{1}{a}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{\alpha\log(1+x)}\cdot\frac{\alpha\log(1+x)}{x}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}\alpha = \alpha\end{aligned}$$

(e) $\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\log x}$. ここで $\lim_{x\to 0} x\log x$ を求める.

$$\lim_{x\to 0} x\log x = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

より $\log x = t$ とおくと $x = e^t$. よって 例題 1.32 より $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to -\infty} \dfrac{t}{e^{-t}} = 0$. これより, $\lim_{x\to 0} x^x = 1$

5.

(a) $(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \geq 0$ より, $\frac{a_n+b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n}$. したがって, $n \geq 1$ において $b_{n+1} \leq a_{n+1}$ が成り立つ. ということは, $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leq \frac{a_n+a_n}{2} = a_n$. また, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n$. これより, $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列で $\{b_n\}$ は上に有界な単調増加数列となり収束する.

(b) $c_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1}$ とおくと, すべての n で $b_{n+1} \leq a_{n+1}$ より, $c_{n+1} \geq 0$. また, $c_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{a_n+b_n-2\sqrt{a_n b_n}}{2}$. ここで, $\sqrt{b_n} < \sqrt{a_n}$ より, 両辺に $2\sqrt{b_n}$ をかけると, $2b_n < 2\sqrt{a_n b_n}$ となる. これより,

$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}}{2} < \frac{1}{2}(a_n - b_n) = \frac{1}{2}c_n$$

したがって, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ となり, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

1.7 解答

1.7

1.

$f(x)$ は $x = a$ で連続より, $c - f(a) > 0$ を任意の正の数とすると, $|x - a| < \delta$ ならば

$$|f(x) - f(a)| < c - f(a)$$

よって $f(x) < f(a) + c - f(a) = c$.

2. 微分法 (DEFFERENTIATION)

2.1 解答

2.1

1.

(a) $f'(x) := \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ より,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(3(x+h)) - \cos(3x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos 3x(\cos 3h - 1)}{h} - \frac{\sin 3x \sin 3h}{h}\right) = -3\sin 3x$$

(b)

$$\frac{(x+2+h)^n - (x+2)^n}{h} = \frac{n(x+2)^{n-1}h}{h} + h(\cdots) \to n(x+2)^{n-1}$$

2.

(a) $df = f'(x)dx$ より $df = 4x^3 dx$

(b) $df = e^x dx$

3.

(a) $f_-^{'}(0) = \lim_{h \to 0-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \dfrac{|h^2+h|}{h} = \lim_{h \to 0-} \dfrac{-(h^2+h)}{h} = -1$

$f_+^{'}(0) = \lim_{h \to 0+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \dfrac{|h^2+h|}{h} = \lim_{h \to 0+} \dfrac{h^2+h}{h} = 1$

(b) $f_-^{'}(0) = \lim_{h \to 0-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \dfrac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0-} h \sin \dfrac{1}{h} = 0$

$f_+^{'}(0) = \lim_{h \to 0+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \dfrac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0+} h \sin \dfrac{1}{h} = 0$

(c) $f_-^{'}(0) = \lim_{h \to 0-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \dfrac{\sqrt{h^3+h^2}}{h} = \lim_{h \to 0-} \sqrt{1+h} = 1$

$f_+^{'}(0) = \lim_{h \to 0+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \dfrac{\sqrt{h^3+h^2}}{h} = \lim_{h \to 0+} \sqrt{1+h} = 1$

4.

(a) $\left(\dfrac{3x-1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{3(x^2+1)-(3x-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-3x^2+2x+3}{(x^2+1)^2}$

(b) $(\sec x)' = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \sec x \tan x$

(c) $(\csc x)' = \left(\dfrac{1}{\sin x}\right)' = -\csc x \cot x$

(d) $(\cot x)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(e) $(x^2 e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x = x(x+2)e^x$

(f) $(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

(g) $(\dfrac{e^x}{\sin x})' = \dfrac{e^x \sin x - e^x \cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$

2.2 解答

2.2

1.

(a) $y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$ より $1 = -\sin y y'$. これを y' について解くと $y' = -\frac{1}{\sin y}$. y の範囲に注意して $\sin y$ を x を用いて表わすと $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$. よって $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y$ より $1 = \sec^2 y y'$. これを y' について解くと $y' = \frac{1}{\sec^2 y}$. y の範囲に注意して $\sec^2 y$ を x を用いて表わすと $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ より $1 + \tan^2 y = \sec^2 y$. よって $y' = \frac{1}{1+x^2}$

2.

(a) 両辺に対数をとると

$\log y = 2\log x + \dfrac{1}{2}\left(\log(x^3+2x+1) - \log(x^2-3x+1)\right)$

両辺を x について微分すると

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3x^2+2}{x^3+2x+1} - \dfrac{2x-3}{x^2-3x+1}\right)$
これより

$$y' = x^2\sqrt{\frac{x^3+2x+1}{x^2-3x+1}}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{3x^2+2}{x^3+2x+1} - \frac{2x-3}{x^2-3x+1}\right)\right)$$

(b) 両辺に対数をとると $\log y = \log x^x = x\log x$
ここで両辺を x について微分すると
$\dfrac{y'}{y} = \log x + x\dfrac{1}{x} = 1 + \log x$
これより

$$y' = x^x(1+\log x)$$

(c) 両辺に対数をとると $\log y = \log(\sin x)^x = x\log\sin x$
ここで両辺を x について微分すると
$\dfrac{y'}{y} = \log\sin x + x\dfrac{\cos x}{\sin x}$
これより

$$y' = (\sin x)^x(\log\sin x + \frac{x\cos x}{\sin x})$$

(d) 両辺に対数をとると $\log y = \log x^{1/x} = \dfrac{1}{x}\log x$
ここで両辺を x について微分すると
$\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{x^2}\log x + \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}$
これより

$$y' = x^{1/x}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2}\right)$$

3.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ より $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} - \dfrac{\cos t}{\sin t}$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ より $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1-\frac{1}{2}t^{-3/2}}{\frac{1}{2}t^{-1/2}+t^{-2}} = \dfrac{2t^2-t^{1/2}}{t^{3/2}+2}$

4.

(a)

$$(x^2(1+\sqrt{x}))' = 2x(1+\sqrt{x}) + x^2(\frac{1}{2\sqrt{x}}) = 2\,x + \frac{5}{2}x^{3/2}$$

(b)

$$(x^3\tan 2x)' = 3x^2\tan 2x + x^3(2\sec^2 2x) = 2\,x^3\sec^2(2\,x) + 3\,x^2\ \tan(2\,x)$$

(c)

$$(x\sin^{-1}x)' = \sin^{-1}x + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}(x)$$

(d)

$$(\frac{x}{x^2+1})' = \frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

(e)

$$(x \sin x)' = \sin(x) + x\ \cos(x)$$

(f)

$$(x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2})' = \sin^{-1} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x)$$

(g)

$$(\tan^{-1}(x^2+1))' = \frac{2\,x}{2+2\,x^2+x^4}$$

(h)

$$(\cos(\sqrt{2x+1}))' = -\frac{\sin(\sqrt{1+2\,x})}{\sqrt{1+2\,x}}$$

(i)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x}\right)' &= \frac{(\cos x - \cos x + x\sin x)(x\sin x + \cos x) - (\sin x - x\cos x)(\sin x + x\cos x - \sin x)}{(x\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}\end{aligned}$$

(j)

$$(e^{2x}\cos x)' = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x = e^{2\,x}\ (2\ \cos(x) - \sin(x))$$

(k)

$$(\log|x + \sqrt{x^2+A}|)' = \frac{1 + \frac{x}{x^2+A}}{x + \sqrt{x^2+A}} = \frac{\sqrt{x^2+A}+x}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{1}{\sqrt{A+x^2}}$$

(l) $(\sin(x^2+1))' = 2x\cos(x^2+1)$

(m) $(\cos\sqrt{x+1})' = -\sin\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1})' = -\dfrac{\sin(\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x+1}}$

(n) $(e^{\sin x})' = e^{\sin x}(\sin x)' = \cos x e^{\sin x}$

2.3 解答

2.3

1.(a)

$$(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$
$$(\sin x)'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$$

となるので帰納法を用いて証明する．$n=1$ のとき成り立つことはすでに示したので，

$$(\sin x)^{(k)} = \sin(x + \frac{k\pi}{2})$$

を仮定し，$n = k + 1$ で成り立つことを示す.

$$\begin{aligned}(\sin x)^{(k+1)} &= ((\sin x)^{(k)})' = (\sin(x + \frac{k\pi}{2}))' \\ &= \cos(x + \frac{k\pi}{2}) = \sin(x + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \\ &= \sin(x + \frac{(k+1)\pi}{2})\end{aligned}$$

1.(b)

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \\ (\sin x)'' &= -\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

となるので帰納法を用いて証明する．$n = 1$ のとき成り立つことはすでに示したので，

$$(\cos x)^{(k)} = \cos(x + \frac{k\pi}{2})$$

を仮定し，$n = k + 1$ で成り立つことを示す.

$$\begin{aligned}(\cos x)^{(k+1)} &= ((\cos x)^{k})' = (\cos(x + \frac{k\pi}{2}))' \\ &= -\sin(x + \frac{k\pi}{2}) = \cos(x + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \\ &= \cos(x + \frac{(k+1)\pi}{2})\end{aligned}$$

1.(c) 帰納法を用いて証明する. まず，$n = 1$ のとき，

$$((1+x)^{\alpha})' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

次に，

$$((1+x)^{\alpha})^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)((1+x)^{\alpha-k}$$

が成り立つことを仮定し，$n = k + 1$ で成り立つことを示す.

$$\begin{aligned}((1+x)^{\alpha})^{(k+1)} &= ((1+x)^{\alpha})^{(k))'} \\ &= (\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)((1+x)^{\alpha-k})' \\ &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)((1+x)^{\alpha-k-1} \\ &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)((1+x)^{\alpha-(k+1)}\end{aligned}$$

2.

(a)
$\dfrac{x^3}{1-x} = -x^2 - x - 1 + \dfrac{1}{1-x}$ また $(\dfrac{1}{1-x})^{(n)} = n!(1-x)^{-(n+1)}$ より

$$(\frac{x^3}{1-x})^{(n)} = \begin{array}{ll} -2x - 1 + (1-x)^{-2}, & n = 1 \\ -2 + 2(1-x)^{-3}, & n = 2 \\ n!(1-x)^{-(n+1)}, & n \geq 3 \end{array}$$

(b) Leibniz の定理より

$$(x^2 \sin x)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (x^2)^j (\sin x)^{n-j}$$

ここで，$(x^2)^j = 0 (n \geq 3)$ に注意すると

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (x^2)^j (\sin x)^{n-j} &= \underbrace{x^2 \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)}_{j=0} + \underbrace{2xn \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)}_{j=1} \\ &+ \underbrace{n(n-1) \sin\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)}_{j=2}\end{aligned}$$

(c) Leibniz の定理を用いると

$$\begin{aligned}(e^x \sin x)^{(n)} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (e^x)^{n-j} (\sin x)^j \\ &= e^x \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \sin(x + \frac{j\pi}{2})\end{aligned}$$

残念ながらこれ以上簡単にできない．しかし，$y = e^x \sin x$ とおくと，$y' = e^x \sin x + e^x \cos x = \sqrt{2} e^x \sin(x + \frac{\pi}{4})$ と表わせる．いま，$y^{(k)} = (\sqrt{2})^k e^x \sin(x + \frac{k\pi}{4})$ と仮定すると

$$\begin{aligned}y^{(k+1)} &= (\sqrt{2})^k e^x \{\sin x + \frac{k\pi}{4}) + \cos x + \frac{k\pi}{4})\} \\ &= (\sqrt{2})^{k+1} e^x \{\sin x + \frac{(k+1)\pi}{4})\}\end{aligned}$$

したがって，数学的帰納法より

$$(\sqrt{2})^n e^x \sin(x + (n\pi/4))$$

2.4 解答

2.4

1.

(a)

$f'(x) = 3x^2 - 2x = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 1$ より

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

よって

$$(3x + 1)(x - 1) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}, 1$$

ここで x は区間 $(-1, 1)$ 内でなければならないので

$$x = -\frac{1}{3}$$

(b)
$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{f(1)-f(0)}{1} = \dfrac{\pi}{2}$ より

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2}{\pi}$$

両辺を 2 乗して

$$1 - x^2 = (\frac{2}{\pi})^2$$

これを x について解くと

$$x = \pm\sqrt{1 - (\frac{2}{\pi})^2}$$

ここで x は区間 $(0, 1)$ 内でなければならないので

$$x = \sqrt{1 - (\frac{2}{\pi})^2}$$

(c)
$f'(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{f(e)-f(1)}{e-1} = \dfrac{1}{e-1}$ より

$$x = e - 1$$

ここで x は区間 $(1, e)$ 内に入っているので

$$x = e - 1$$

2.
$f(x) = x - \tan x$ より，

$$f'(x) = 1 - \sec^2 x = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}.$$

ここで，$\cos^2 x \leq 1$ で等号は $x = 0$ のときだけ．したがって，$f'(x) \leq 0$ となり，$f(x)$ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ で狭義の単調減少関数である．

3.
(a)　$f(x) = \log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$ とおくと，$f(0) = 0$ となるので $x > 0$ で $f'(x) > 0$ を示す．

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0$$

(b) $f(x) = x - \tan^{-1} x$ とおくと，$f(0) = 0$ となるので $x > 0$ で $f'(x) > 0$ を示す．

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0$$

次に， $g(x) = \tan^{-1} x - \dfrac{x}{1+x^2}$ とおくと，$f(0) = 0$ となるので $x > 0$ で $f'(x) > 0$ を示す．

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0$$

(c) 両辺に対数をとって，$\pi > e \log \pi$ を示す．$f(x) = x - e \log x$ とおくと $f(e) = 0$．また $x > e$ で

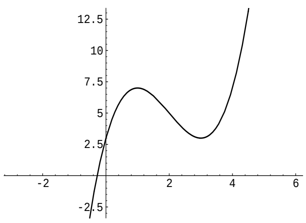
$$f'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x} > 0$$

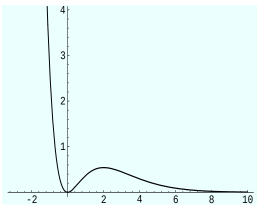
よって $f(\pi) = \pi - e \log \pi > 0$

4.

(a) $x = 1$ で極大値 7，$x = 3$ で極小値 3

(b) $x = 0$ で極小値 0， $x = 2$ で極大値 $\dfrac{4}{e^2}$

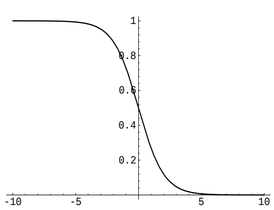


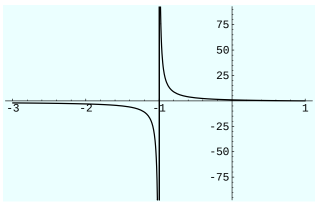


2.5 解答

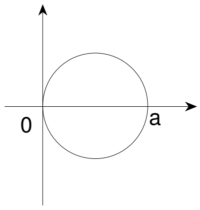
2.5

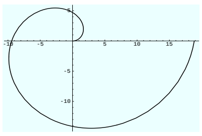
1.

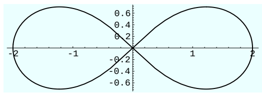




2.







2.6 解答

2.6

1.

(a)
$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x} = (\dfrac{0}{0})$ の不定形．よって L'Hospital の定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{3\cos 3x} = \frac{2}{3}$$

(b)
$\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x} = (\dfrac{0}{0})$ の不定形．よって L'Hospital の定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1} = 0$$

(c)
$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1} x}{x} = (\dfrac{0}{0})$ の不定形．よって L'Hospital の定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

(d)

$$0 \le |x\sin\frac{1}{x}| = |x||\sin\frac{1}{x}| \le |x|$$

よりはさみうちの定理を用いると $\lim_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$

(e)
$\lim_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}) = \infty - \infty$ の不定形．L'Hospital の定理を用いるには $(\frac{0}{0}), (\frac{\infty}{\infty})$ の不定形で

なければならないので，変形すると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x} = (\frac{0}{0})\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - 2}{2x\sin^2 x + 2x^2\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x - 2}{2\sin^2 x + 4x\sin 2x + 2x^2\cos 2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x}{6\sin 2x + 12x\cos 2x - 4x^2\sin 2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-8\cos 2x}{24\cos 2x - 32x\sin 2x + 8x^2\cos 2x} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

(f)

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^{\cos x} = (0^0)$ の不定形．L'Hospital の定理を用いるには $(\frac{0}{0}),(\frac{\infty}{\infty})$ の不定形でなければならないので変形する．ここで，$e^{\log g(x)} = g(x)$ に注意すると

$(1-\sin x)^{\cos x} = e^{\cos x\log(1-\sin x)}$．ここで，$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\log(1-\sin x) = (0\cdot\infty)$ の不定形．もう一度変形すると

$$\cos x\log(1-\sin x) = \frac{\log(1-\sin x)}{\frac{1}{\cos x}} = (\frac{0}{0})$$

よって $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\log(1-\sin x)}{\frac{1}{\cos x}}$ に L'Hospital の定理を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\log(1-\sin x)}{\frac{1}{\cos x}} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{-\cos x}{1-\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos^3 x}{\sin x(1-\sin x)}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2 x\sin x}{\cos x - \sin 2x}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-6\sin^2 x\cos x + 3\cos^3 x}{-\sin x - 2\cos 2x} = 0\end{aligned}$$

したがって，$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\log(1-\sin x)}{\frac{1}{\cos x}} = 1$

(g)

$\lim_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x})^{1/x} = (1^\infty)$ の不定形．L'Hospital の定理を用いるには $(\frac{0}{0}),(\frac{\infty}{\infty})$ の不定形でなければならないので変形する．ここで，$e^{\log g(x)} = g(x)$ に注意すると

$\lim_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x})^{1/x} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(\frac{e^x-1}{x})} = (\infty\cdot 0)$ の不定形．もう一度変形すると

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\log\frac{e^x-1}{x})}{x}=(\frac{0}{0})$ よって L'Hospital の定理より

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}}{\frac{e^x-1}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{xe^x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{xe^x+e^x-x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x+e^x}{xe^x+e^x+e^x}=1/2\end{aligned}$$

したがって，$\lim_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x})^{1/x}=\sqrt{e}$

(h)

$\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/\sin x}=(1^\infty)$ の不定形．L'Hospital の定理を用いるには $(\frac{0}{0}),(\frac{\infty}{\infty})$ の不定形でなければならないので変形する．ここで，$e^{\log g(x)}=g(x)$ に注意すると

$\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/\sin x}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{sinx}\log(1-x)}=(\infty\cdot 0)$ の不定形．もう一度変形すると

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\log(1-x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log 1-x}{\sin x}=(\frac{0}{0})$ よって L'Hospital の定理より

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(1-x)}}{\cos x}=-1$$

したがって，$\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/sinx}=e^{-1}$

2.7 解答

2.7

1.

(a) $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ より

$$|R_n|=|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n|\le|\frac{\cos\left(\theta x+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}||x|^n\le\frac{1}{n!}|x|^n\to 0\ (n\to\infty)$$

(b) $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(1+x)^{-n}$ より

$$|R_n|=|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n|\le|\frac{(-1)^{n-1}(1+\theta x)^{-n}}{n!}||x|^n\to 0\ (n\to\infty)$$

(c) $f^{(n)}(x)=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ より

$$|R_n|=|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n|\le|\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+\theta x)^{\alpha-n}}{n!}||x|^n\to 0\ (n\to\infty)$$

2.

(a)

$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-o(x)}{x}=1$

(b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}$$
(c)
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}$$
(d)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha}{e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha}{1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots}=0$$
3. 省略

3. 積分法 (INTEGRATION)

3.1 解答

3.1

1.

(a)
$$\int(3x^{-3}+4x^5)dx=3(-\frac{1}{2}x^{-2})+\frac{2}{3}x^6=-\frac{3}{2}x^{-2}+\frac{2}{3}x^6+c$$
(b)
$$\int(t^3+\frac{1}{t^2+1})dt=\frac{t^4}{4}+\tan^{-1}(t)+c$$
(c)
$$\begin{aligned}\int -2\tan^2 x dx&=-2\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=-2\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx\\&=-2\int(\sec^2 x-1)dx=-2(\tan x-x)+c\end{aligned}$$
(d)
$$\begin{aligned}\int\frac{x^3+1}{\sqrt{x}}dx&=\int x^{\frac{5}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}dx\\&=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+c\end{aligned}$$
(e)
$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+5}{x^2+4}dx&=\int 1+\frac{1}{x^2+4}dx=\\&=x+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}+c\end{aligned}$$
(f)

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}dt = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-t^2}}dt =$$
$$= \sin^{-1}(\frac{t}{2}) + c$$

(g)

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx =$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

(h)
$\int \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}dt = \log|t+\sqrt{t^2+4}| + c$
(i)
$\frac{1}{4-x^2}dx = \frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + c$

3.2 解答

3.2

1.

(a)

$t = 2-x$ とおくと $dt = -dx$ より

$$\int e^{2-x}dx = -\int e^t dt = -e^{2-x} + c$$

(b)

$t = 1-x$ とおくと $dt = -dx$ より

$$\int \sec^2(1-x)dx = -\int \sec^2 t dt = -\tan(1-x) + c$$

(c)

$t = 1-x^2$ とおくと $dt = -2xdx$ より

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\sqrt{1-x^2} + c$$

(d)

$t = \cos x$ とおくと $dt = -\sin x dx$ より

$$int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = -\int \frac{dt}{t^2} = -\int t^{-2}dt = t^{-1} + c = \sec(x) + c$$

(e)

$t=\frac{1}{x}$ とおくと $dt=-\frac{1}{x^2}dx$ より

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = -\int e^t dt = -e^t + c = -e^{\frac{1}{x}} + c$$

(f)

$t = 3\tan\theta + 1$ とおくと $dt = 3\sec^2\theta d\theta$ より

$$\int \frac{sec^2\theta}{3\tan\theta+1}d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\sqrt{t}+c = \frac{2\sqrt{1+3\ \tan(\theta)}}{3}+c$$

(g)

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 x}dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx \\ &= 2\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = 2\int (cosec^2 x - 1)dx \\ &= 2(-\cot x - x) + c\end{aligned}$$

$t=\log x$ とおくと $dt = \frac{1}{x}dx$ より

$\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx = \int tdt = \frac{1}{t^2} + c = \frac{1}{2}(\log(x))^2 + c$

(i)

$t = e^x$ とおくと $dt = e^x dx$ より

$\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{1}{1+t^2}dt = \tan^{-1}(e^x) + c$

(j)

$t = x^2$ とおくと $dt = 2xdx$ より

$\displaystyle\int x\sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \sin tdt = \frac{-\cos(x^2)}{2} + c$

3.3 解答

3.3

1.

(a)

$$\begin{aligned}&u=\log x, \quad dv = xdx \text{ とおくと} \\ &du = \tfrac{1}{x}dx, \quad v = \textstyle\int dv = \int xdx = \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\log x}_{u}\underbrace{xdx}_{dv} &= \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\underbrace{\log x}_{u} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\underbrace{\frac{1}{x}dx}_{du} \\ &= \frac{x^2\log x}{2} - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4} + c\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{array}{ll} u = x^2, & dv = e^{-x}dx \text{ とおくと} \\ du = 2xdx, & v = \int dv = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array}$$

よって

$$\int x^2 e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx$$

ここで部分積分をもう一度用いる.

$$\begin{array}{ll} u = x, & dv = e^{-x}dx \text{ とおくと} \\ du = dx, & v = \int dv = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array}$$

これより

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

したがって

$\displaystyle\int x^2e^{-x}dx = -e^x(x^2 + 2x + 2)$

(c)

$$\begin{array}{ll} u = (\log x)^2, & dv = dx \text{ とおくと} \\ du = 2\log x\frac{1}{x}dx, & v = \int dv = \int dx = x \end{array}$$

よって

$$\int(\log x)^2dx = x(\log x)^2 - 2\int \log xdx$$

ここで部分積分をもう一度用いる.

$$\begin{array}{ll} u = logx, & dv = dx \text{ とおくと} \\ du = \frac{1}{x}dx, & v = \int dv = \int dx = x \end{array}$$

これより

$$\int \log xdx = x\log x - \int dx = x\log x - x + c$$

したがって $\displaystyle\int(\log x)^2dx = x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) + c$

(d)

$t = x + 5$ とおくと $x = t - 5$，$dt = dx$ よって

$$\int x(x+5)^{15}dx = \int(t-5)t^{14}dt = \frac{1}{16}(x+5)^{16} - \frac{1}{3}(x+5)^{15} + c$$

(e)

$$\begin{array}{ll} u = x, & dv = \cos xdx \text{ とおくと} \\ du = dx, & v = \int dv = \int \cos xdx = \sin x \end{array}$$

よって

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c$$

(f)

$I = \int e^x \sin x dx$ とおいて部分積分を行う

$$\begin{array}{ll} u = e^x, & dv = \sin x dx \text{ とおくと} \\ du = e^x dx, & v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x \end{array}$$

より

$I = \displaystyle\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$ ここで部分積分をもう一度行うと

$$\begin{array}{ll} u = e^x, & dv = \cos x dx \text{ とおくと} \\ du = e^x dx, & v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x \end{array}$$

より

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x + \int e^x \sin x dx \end{aligned}$$

したがって求める積分 I は

$$I = -\frac{e^x}{2}(\cos x - \sin x)$$

(g)

$$\begin{array}{ll} u = \log(1+x^2), & dv = dx \text{ とおくと} \\ du = \frac{2x}{1+x^2}dx, & v = \int dv = \int dx = x \end{array}$$

より

$$\int \log(1+x^2)dx = x\log(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

ここで

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int (1 - \frac{1}{1+x^2}dx = x - \tan^{-1} x$$

に注意すると

$$\int \log(1+x^2)dx = x\log(1+x^2) - 2(x - \tan^{-1} x) + c$$

(h)

$$\begin{array}{ll} u = \tan^{-1} x, & dv = x dx \text{ とおくと} \\ du = \frac{1}{1+x^2}dx, & v = \int dv = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array}$$

より

$$\int \log(1+x^2)dx = \frac{x^2\tan^{-1}x}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

ここで

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int(1-\frac{1}{1+x^2}dx = x - \tan^{-1}x$$

に注意すると

$$\int x\tan^{-1}xdx = \frac{x^2\tan^{-1}x}{2} - \frac{1}{2}(x-\tan^{-1}x)+c$$

(i)

$$\begin{aligned}&u=\log x, \quad dv = x^n dx \text{ とおくと}\\ &du = \tfrac{1}{x}dx, \quad v=\textstyle\int dv = \int x^n dx = \tfrac{x^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\int x^n\log xdx &= \frac{x^{n+1}\log x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n dx\\ &= \frac{x^{n+1}\log x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned}&u=x^3, \quad dv=\sin xdx \text{ とおくと}\\ &du=3x^2dx, \quad v=\textstyle\int dv = \int\sin xdx = -\cos x\end{aligned}$$

より

$\displaystyle\int x^3\sin xdx = -x^3\cos x + 3\int x^2\cos xdx$

$\int x^2\cos xdx$ も同様に積分すると

$$\begin{aligned}&u=x^2, \quad dv=\cos xdx \text{ とおくと}\\ &du=2xdx, \quad v=\textstyle\int dv=\int\cos xdx=\sin x\end{aligned}$$

より

$\displaystyle\int x^2\cos xdx = x^2\sin x - 2\int x\sin xdx$

$\int x\sin xdx$ も同様に積分すると

$$\begin{aligned}&u=x, \quad dv=\sin xdx \text{ とおくと}\\ &du=dx, \quad v=\textstyle\int dv=\int\sin xdx=-\cos x\end{aligned}$$

より

$\displaystyle\int x\sin xdx = -x\cos x + \int\cos xdx = -x\cos x + \sin x + c$

したがって

$-x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x$

(k) $\int x\sinh x dx$ の積分は $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ と書き直して求めるか，$(\sinh x)' = \cosh x$ を用いて求める．

$$\begin{array}{ll} u = x, & dv = \sinh x dx \text{ とおくと} \\ du = dx, & v = \int dv = \int \sinh x dx = \cosh x \end{array}$$

より

$$\int x\sin x dx = x\cosh x - \int \cosh x dx = x\cosh x - \sinh x + c$$

3.4 解答

3.4

1.

(a)

$\dfrac{7}{(x-2)(x+5)}$ は有理関数で分子の次数 $<$ 分母の次数なので，部分分数分解すると，$(x-2)(x-5)$ の因数 $x-2$ と $x+5$ を分母に持つ分数の和で表せる．

$$\frac{7}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

ここで分母を払い整理すると

$$7 = A(x+5) + B(x-2) = (A+B)x + 5A - 2B$$

ここで左辺と右辺が恒等的に等しいことに注意すると，次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 5A - 2B = 7 \end{cases}$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{-7} = 1$$

これをもとの式に代入すると $B = -1$ となるので

$$\frac{7}{(x-2)(x+5)} = \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+5}$$

これより $\displaystyle\int \frac{7}{(x-2)(x+5)} dx = \int (\frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+5}) dx = \log|x-2| - \log|x+5| + c$

(b) $\dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}$ は有理関数で分子の次数 $<$ 分母の次数なので，部分分数分解すると，$x(x-1)(x+1)$ の因数 $x, x-1, x+1$ を分母に持つ分数の和で表せる．

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

ここで分母を払い整理すると

$$x^2+1 = A(x^2-1)+B(x^2+x)+C(x^2-x) = (A+B+C)x^2+(B-C)x-A$$

ここで左辺と右辺が恒等的に等しいことに注意すると，次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ B-C=0 \\ A=-1 \end{cases}$$

$A=-1$ より次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} B+C=2 \\ B-C=0 \end{cases}$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1$$

　これを上の式に代入すると $C=1$ となるので

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$$

これより

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\,dx &= \int (\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1})\,dx \\ &= -\log|x|+\log|x-1|+\log|x+1|+c = -\log|x|+\log|x^2-1|+c\end{aligned}$$

　(c)　$\dfrac{x^2+3}{x^2-3x+2}$ は有理関数で，分子の次数が分母の次数以上なので，まず分子を分母で割ると

$$\frac{x^2+3}{x^2-3x+2} = 1+\frac{3x+1}{x^2-3x+2} = \frac{3x+1}{(x-2)(x-1)}$$

となる．次に $\frac{x^2+3}{(x-2)(x-1)}$ を部分分数分解すると，$(x-2)(x-1)$ の因数 $x-2$ と $x-1$ を分母に持つ分数の和で表せる．

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}$$

ここで分母を払い整理すると

$$3x+1 = A(x-1)+B(x-2) = (A+B)x-(A+2B)$$

ここで左辺と右辺が恒等的に等しいことに注意すると，次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} A+B=3 \\ A+2B=-1 \end{cases}$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{7}{1} = 7$$

これをもとの式に代入すると $B = -4$ となるので

$$\frac{3x+1}{x^2-3x+2} = \frac{7}{x-2} + \frac{-4}{x-1}$$

これより

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+3}{x^2-3x+2}\,dx &= \int (1 + \frac{7}{x-2} + \frac{-4}{x-1})\,dx \\ &= x + 7\log|x-2| - 4\log|x-1| + c\end{aligned}$$

(d) $\dfrac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}$ は有理関数で分子の次数 $<$ 分母の次数なので，部分分数分解すると，$(x-1)^2(x+1)$ の因数 $x-1, (x-1)^2, x+1$ を分母に持つ分数の和で表せる．

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

ここで分母を払い整理すると

$$x^2 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 = (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C)$$

ここで左辺と右辺が恒等的に等しいことに注意すると，次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ B - 2C = 0 \\ -A + B + C = 0 \end{cases}$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{4}$$

これを $A + C = 0$ 代入すると $C = \frac{1}{4}$．さらに，$A = \frac{3}{4}, C = \frac{1}{4}$ より $B = \frac{1}{2}$ を得る．よって

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)}$$

これより

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}\,dx = \int (\frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)})\,dx$$
$$= \frac{3}{4}\log|x-1| - \frac{1}{2}(x-1)^{-1} + \frac{1}{4}\log|x+1| + c$$

(e) $\dfrac{1}{(x^2+16)^2}$ は有理関数で分子の次数 $<$ 分母の次数なので，部分分数分解をして解く問題と思えるが，分子が定数ということは，これ以上の部分分数分解ができない．実際

$$\frac{dx}{(x^2+16)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+16} + \frac{Cx+D}{(x^2+16)^2}$$

ここで分母を払い整理すると

$$1 = (Ax+B)(x^2+16) + (Cx+D) = Ax^3 + Bx^2 + (16A+C)x + 16B + D$$

ここで左辺と右辺が恒等的に等しいことに注意すると，次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ 16A + C = 0 \\ 16B + D = 1 \end{cases}$$

これより，$A = B = C = 0, D = 1$ となり，もとに戻ってしまう．

そこで $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+16)^n}$ とおき，部分積分を行なう．

$$\begin{array}{ll} u = \frac{1}{(x^2+16)}, & dv = dx \\ du = -\frac{2x}{(x^2+16)^2}dx, & v = x \end{array}$$

より

$$\begin{aligned} I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+16)} &= \frac{x}{(x^2+16)} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+16)^2}dx \\ &= \frac{x}{(x^2+16)} + 2\int \frac{x^2+16-16}{(x^2+16)^2}dx \\ &= \frac{x}{(x^2+16)} + 2\int \frac{1}{(x^2+16)^2}dx - 32\int \frac{1}{(x^2+16)^2}dx \\ &= \frac{x}{(x^2+16)} + 2I_1 - 32I_2 \end{aligned}$$

これより，

$$I_2 = \frac{1}{32}[\frac{x}{(x^2+16)} + I_1] = \frac{1}{128}[\frac{4x}{(x^2+16)} + \tan^{-1}(\frac{x}{4})] + c$$

別解　(三角関数の積分)　この問題は分母が 2 乗の和で与えられていることに注意すると，$x = 4\tan\theta$ の置換により

$$\begin{cases} x & = 4\tan\theta \\ dx & = 4\sec^2\theta d\theta \\ \sqrt{x^2+16} & = 4\sec\theta \end{cases}$$

で与えられる．これより元の積分は

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+16)^2} &= \int \frac{4\sec^2\theta}{(4sec\theta)^4}d\theta \\ &= \int \frac{d\theta}{4^3\sec^2\theta} = \frac{1}{64}\int \cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{128}\int (1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{1}{128}(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}) = \frac{1}{128}(\theta + \sin\theta\cos\theta) \\ &= \frac{1}{128}(\tan^{-1}(\frac{x}{4}) + \frac{4x}{x^2+16}) + c\end{aligned}$$

(f) $\frac{x^5}{(x-2)^2}$ は有理関数で分子の次数 geq 分母の次数なので，まず，分子を分母で割ると，

$$\frac{x^5}{x^2-4x+4} = x^3+4x^2+12x+32+\frac{80x-128}{(x-2)^2}$$

$\frac{80x-128}{(x-2)^2}$ を部分分数分解すると，$(x-2)^2$ の因数 $x-2$ と $(x-2)^2$ を分母に持つ分数の和で表せる．

$$\frac{80x-128}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-21} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

ここで分母を払い整理すると

$$80x-128 = A(x-2)+B$$

ここで左辺と右辺が恒等的に等しいことに注意すると，$A=80$ を得る．これを上の式に代入すると，$B = 2A-128 = 160-128 = 32$ を得る．よって

$$\frac{x^5}{x^2-4x+4} = x^3+4x^2+12x+32+\frac{80}{x-2}+\frac{32}{(x-2)^2}$$

これより

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{x^2-4x+4}\,dx &= \frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+6x^2+32x \\ &\quad + 80\log|x-2| - 32(x-2)^{-1} + c\end{aligned}$$

(g) $x^3 = t$ とおくと $3x^2dx = dt$ となる．よって求める積分は

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{x^9-1}dx &= \int \frac{x^3x^2dx}{(x^3)^3-1} \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{tdt}{t^3-1}\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{t}{t^3-1} = \frac{t}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1}$$

両辺の分母を払い整理すると

$$t = A(t^2+t+1) + (Bt+C)(t-1) = (A+B)t^2 + (A-B+C)t + (A-C)$$

これより次の連立方程式を得る.

$$\begin{cases} A+B & = 0 \\ A-B+C & = 1 \\ A-C & = 0 \end{cases}$$

この連立方程式を Cramer の公式を用いて解くと

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3}$$

これより $B = -\frac{1}{3}, C = \frac{1}{3}$ となるので,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5}{x^9-1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{tdt}{t^3-1} \\ &= \frac{1}{9}\int (\frac{1}{t-1} + \frac{-t+1}{t^2+t+1})dt \\ &= \frac{1}{9}\log|t-1| + \frac{1}{9}\int \frac{-t+1}{t^2+t+1}dt \end{aligned}$$

ここで $\dfrac{-t+1}{t^2+t+1}$ を次のように分解し積分する.

$$\begin{aligned} \int \frac{-t+1}{t^2+t+1}dt &= \int -\frac{1}{2}\int \frac{2t-2}{t^2+t+1}dt \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{2t+1-3}{t^2+t+1}dt = -\frac{1}{2}[\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt + \int \frac{-3}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt] \\ &= -\frac{1}{2}[\log|t^2+t+1| - 3\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{2(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}})] \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5}{x^9-1}dx &= \frac{1}{3}\frac{\int tdt}{t^3-1} \\ &= \frac{1}{9}\log|t-1| + \frac{1}{9}(-\frac{1}{2})[\log|t^2+t+1| - 3\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{2(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}})] + c \\ & \frac{1}{9}\log|x^3-1| - \frac{1}{18}[\log|x^6+x^3+1| + 2\sqrt{3}\tan^{-1}(\frac{2x^3+1}{\sqrt{3}})] + c \end{aligned}$$

(h) $x^4 = t$ とおくと $4x^3dx = dt$ となる．よって求める積分は

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^4+1)}dx &= \frac{1}{4}\int \frac{4x^3dx}{x^4(x^4+1)} \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t(t+1)}\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$$

両辺の分母を払い整理すると

$$1 = A(t+1) + Bt = (A+B)t + A$$

これより次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ A &= 1 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと $A = 1, B = -1$ となるので，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^4+1)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t(t+1)} &= \frac{1}{4}\int (\frac{1}{t} + \frac{-1}{t+1})dt \\ &= \frac{1}{4}[\log|t| - \log|t+1|] + c \\ &= \frac{1}{4}[\log|x^4| - \log|x^4+1|] + c = \frac{1}{4}\log|\frac{x^4}{x^4+1}| + c\end{aligned}$$

3.5 解答

3.5

1.

(a)

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\ dx = \int \sin^2 x \sin x\ dx &= \int (1-\cos^2 x)\sin x\ dx \\ &= \int (1-t^2)(-dt) \quad \left(\begin{array}{l} t = \cos x \text{ とおくと} \\ dt = -\sin x dx \end{array}\right) \\ &= -(t - \frac{t^3}{3}) + c \\ &= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

(b)

$$\int \sin^2 x\ dx = \int \frac{1-\cos 6x}{2}\ dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + c$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^2 x \ dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \ dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x \ dx \\
&= \int (1-t^2)t^2(-dt) \ \left(\begin{array}{l} t = \cos x \text{ とおくと} \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right) \\
&= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + c = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + c
\end{aligned}$$

(d)　$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))$ に注意する.

$$\begin{aligned}
\int \cos 3x \sin 2x \ dx &= \frac{1}{2}\int \sin 5x - \sin x \ dx \\
&= \frac{1}{2}[\frac{-\cos 5x}{5} + \cos x] + c
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x \ dx &= \int \sin^4 x \sin x \ dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x \ dx \\
&= \int (1-t^2)^2(-dt) \ \left(\begin{array}{l} t = \cos x \text{ とおくと} \\ dt = -\sin t dt \end{array} \right) \\
&= -\int 1 - 2t^2 + t^4 \ dt = -(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}) + c \\
&= -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\int \sec^2 \pi x \ dx &= \frac{1}{\pi}\int \sec^2 t \ dt \ (t = \pi t, dt = \pi dt) \\
&= \frac{1}{\pi}\tan t + c = \frac{1}{\pi}\tan \pi x + c
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \ dx &= \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \ dx \\
&= \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos^3 x} \ dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^3 x} \ dx \\
&= \int \frac{(1-t^2)}{t^3}(-dt) \ (t = \cos x, dt = -\sin x \ dx) \\
&= \int (\frac{1}{t} - t^{-3}) \ dt = \log|t| + \frac{t^{-2}}{2} + c \\
&= \log|\cos x| + \frac{1}{2}\sec^2 x + c
\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}
I &= \int \tan^2 x \sec^2 x \ dx \ \left\{ \begin{array}{ll} u = \tan x & dv = \tan x \sec^2 x \\ du = \sec^2 x dx & v = \frac{1}{2}\tan^2 x \end{array} \right. \\
&= \frac{1}{2}\tan^3 x - \frac{1}{2}\int \tan^2 x \sec^2 x \ dx \\
&= \frac{1}{2}\tan^3 x - \frac{1}{2} I
\end{aligned}$$

これより求める I は

$$I = \int \tan^2 x \sec^2 x \ dx = \frac{1}{3}\tan^3 x + c$$

(i)

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec^3 x \ dx &= \int \tan^2 x \sec^2 x \sec x \tan x \ dx \\
&= \int (sec^2 x - 1)\sec^2 x \sec x \tan x \ dx \\
&= \int (t^2 - 1)t^2 \ dt \ (t = \sec x, \ dt = \sec x \tan x dx) \\
&= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + c
\end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec^3 x \ dx &= \int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x} \ dx \\
&= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} \sin x \ dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)\sin x}{\cos^6 x} \ dx \\
&= \int \frac{1 - t^2}{t^6} \ (-dt) \ (t = \cos x, \ dt = -\sin x dx) \\
&= -\int (\frac{1}{t^{-6}} - \frac{1}{t^{-4}} \ dt = \frac{t^{-5}}{5} - \frac{t^{-3}}{3} + c \\
&= \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + c
\end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned}
I &= \int \sec^5 x \ dx = \int \sec^3 x \sec^2 x \ dx \ \left\{ \begin{array}{ll} u = \sec^3 x & dv = \sec^2 x \\ du = 3\sec^3 x \tan x dx & v = \tan x \end{array} \right. \\
&= \sec^3 x \tan x - 3\int \tan^2 x \sec^3 x \ dx \\
&= \sec^3 x \tan x - 3\int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x \ dx \\
&= \sec^3 x \tan x - 3\int \sec^5 x dx + 3\int \sec^3 x \ dx \\
&= \sec^3 x \tan x - 3I + 3\int \sec^3 x \ dx
\end{aligned}$$

これより求める I は

$$I=\int \sec^5 x\ dx=\frac{1}{4}[\sec^3 x\tan x+3\int \sec^3 x\ dx+c$$

よって $\int \sec^3 x\ dx$ を求めればよい．

$$\begin{aligned}J&=\int \sec^3 x\ dx=\int \sec x\sec^2 x\ dx\ \left\{\begin{array}{ll}u=\sec x & dv=\sec^2 x\\ du=\sec x\tan x dx & v=\tan x\end{array}\right.\\ &=\sec x\tan x-\int \tan^2 x\sec x\ dx\\ &=\sec x\tan x-\int (\sec^2 x-1)\sec x\ dx\\ &=\sec x\tan x-\int \sec^3 x dx+\int \sec x\ dx\\ &=\sec x\tan x-J+\log|\sec x+\tan x|\end{aligned}$$

これより

$$J=\frac{1}{2}[\sec x\tan x+\log|\sec x+\tan x|+c$$

したがって，

$$I=\frac{1}{4}[\sec^3 x\tan x+\frac{3}{2}(\sec x\tan x+\log|\sec x+\tan x|)+c$$

(k)　$x=2\tan^{-1}t$ とおくと，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ となるので，全ての三角関数は有理関数に直せる．

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3-2\cos x}&=\int \frac{1}{3-2\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\ dt\\ &=\int \frac{2}{3+3t^2-2+2t^2}\ dt=\int \frac{2}{5t^2+1}\ dt\\ &=\frac{2}{5}\int \frac{1}{t^2+\frac{1}{5}}\ dt=\frac{2}{5}\sqrt{5}\tan^{-1}(\sqrt{5}t)+c\\ &=\frac{2\sqrt{5}}{5}\tan^{-1}(\sqrt{5}\tan\frac{x}{2})+c\end{aligned}$$

(l)　$x=2\tan^{-1}t$ とおくと，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ となるので，全ての三角関数は有理関数に直せる．

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{2-\sin x}\ dx&=\int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{2-\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\ dt\\ &=\int \frac{2t}{2+2t^2-2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\ dt=\int \frac{2t}{(1+t^2)(t^2-t+1)}\ dt\end{aligned}$$

となるので，$\frac{2t}{(1+t^2)(t^2-t+1)}$ を部分分数分解すると

$$\frac{2t}{(1+t^2)(t^2-t+1)}=\frac{At+B}{t^2+1}+\frac{CtD}{t^2-t+1}$$

ここで分母を払い整理すると

$$\begin{aligned}2t &= (At+B)(t^2-t+1)+(t^2+1)(Ct+D)\\ &= (A+C)t^3+(-A+B+D)t^2+(A-B+C)t+B+D\end{aligned}$$

ここで左辺と右辺が恒等的に等しいことに注意すると，次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} A+C= \\ -A+B+D=0 \\ A-B+C=2 \\ B+D=0 \end{cases}$$

2 番目と 4 番目の式より $A=0$ を得る．またこれより，$c=0, B=-2, D=2$ を得る．したがって，

$$\int \frac{2t}{(1+t^2)(t^2-t+1)}\ dt = \int \frac{-2}{t^2+1}+\frac{2}{t^2-t+2}\ dt$$

まず，$\int \frac{-2}{t^2+1}dt$ を求める．

$$\begin{aligned}\int \frac{-2}{t^2+1}dt &= -2\int \frac{1}{t^2+1}dt\\ &= -2\tan^{-1}(t)+c\end{aligned}$$

次に，$\int \frac{2}{t^2-t+1}\ dt$ を求める．

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{t^2-t+1}\ dt &= \int \frac{2}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\ dt\\ &= \int \frac{2}{u^2+\frac{3}{4}}\ du \quad \left(\begin{array}{l} u=t-\frac{1}{2}\text{とおくと} \\ du=dt \end{array}\right)\\ &= 2\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}u = \frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(t-\frac{1}{2})+c\end{aligned}$$

ここで，$t=\tan(\frac{x}{2})$ を代入すると

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{2-\sin x}\ dx &= -2\tan^{-1}(t)++\frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(t-\frac{1}{2})+c\\ &= -2\tan^{-1}(\tan(\frac{x}{2}))+\frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\tan(\frac{x}{2})-\frac{1}{2})+c\\ &= -x+\frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\tan(\frac{x}{2})-\frac{1}{2})+c\end{aligned}$$

(m) $x=2\tan^{-1}t$ とおくと，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ となるので，全ての

三角関数は有理関数に直せる．

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx &= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\\ &= \int \frac{1+t^2+2t}{1+t^2+1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2(t^2+2t+1)}{2(1+t^2)}\,dt\\ &= \int \frac{t^2+1+2t}{1+t^2}\,dt = \int (1+\frac{2t}{1+t^2}\,dt\\ &= t+\log|1+t^2|+c = \tan(\frac{x}{2})+\log|1+\tan^2(\frac{x}{2})|+c\end{aligned}$$

(n)　$x = 2\tan^{-1} t$ とおいてもよいが，被積分関数は全て 2 乗されているので，$x=\tan^{-1} t$ おくと，$dx = \frac{1}{1+t^2}dt$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{t^2}{1+t^2}$ となる．

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}\,dx &= \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt\\ &= \int \frac{t^2}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{t^2}{(t+1)(t-1)(1+t^2)}\,dt\end{aligned}$$

ここで部分分数分解を用いる．

$$\frac{t^2}{(t+1)(t-1)(1+t^2)} = \frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}+\frac{Ct+D}{1+t^2}$$

とおき，分母を払うと

$$t^2 = A(t-1)(1+t^2)+B(t+1)(1+t^2)+(Ct+D)(t+1)(t-1)$$

となる．ここで

$t=1$ とおくと

$$1 = 4B \text{ より } B = \frac{1}{4}$$

$t=-1$ とおくと

$$1 = -4A \text{ より } A = -\frac{1}{4}$$

次に t^3 の係数を比較すると

$$\text{左辺は } 0,\ \text{右辺は } A+B+C \text{ より } C=0$$

最後に t^2 の係数を比較すると

$$\text{左辺は } 1,\ \text{右辺は } -A+B+D \text{ より } D = 1+A-B = \frac{1}{2}$$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2}{(t+1)(t-1)(1+t^2)}\,dt &= \int \frac{-1/4}{t+1}\,dt+\int\frac{1/4}{t-1}\,dt+\int\frac{1/2}{1+t^2}\,dt\\ &= -\frac{1}{4}\log|t+1|+\frac{1}{4}\log|t-1|+\frac{1}{2}\tan^{-1}(t)+c\end{aligned}$$

ここで $t = \tan x$ に注意すると

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx = -\frac{1}{4}\log|\tan x+1| + \frac{1}{4}\log|\tan x-1| + \frac{1}{2}\tan^{-1}(\tan x) + c$$
$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{\tan x-1}{\tan x+1}\right| + \frac{x}{2} + c$$

(o) $x = 2\tan^{-1} t$ とおくと，$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ となるので，全ての三角関数は有理関数に直せる．

$$\int \frac{1}{1+\tan x}\,dx = \int \frac{1}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx$$
$$= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1-t^2}{1-t^2+2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$
$$= \int \frac{-2+2t^2}{(t^2-2t-1)(1+t^2)}\,dt$$

ここで部分分数分解を用いる．

$$\frac{-2+2t^2}{(t^2-2t-1)(1+t^2)} = \frac{At+B}{t^2-2t-1} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$$

の両辺の分母を払うと

$$-2+2t^2 = (At+B)(1+t^2) + (Ct+D)(t^2-2t-1)$$
$$= At^3 + Bt^2 + At + B + Ct^3 - (C-D)t - (C+2D)$$

となる．そこで係数合わせを行なう．

t^3 の係数は

左辺 0，右辺 $A+C$ より $A+C=0$

t^2 の係数は

左辺 2，右辺 $B-2C+D$ より $B-2C+D=2$

t の係数は

左辺 0，右辺 $A-C-2D$ より $A-C-2D=0$

定数項は

左辺 -2，右辺 $B-D$ より $B-D=0$

これより，連立方程式を解くと

$$A=1, B=1, C=-1, D=1$$

となる．したがって，

$$\int \frac{-2+2t^2}{(t^2-2t-1)(1+t^2)}\,dt = \int \frac{t+1}{t^2-2t-1} + \frac{-t+1}{1+t^2}\,dt$$
$$= \int \frac{t+1}{(t-1)^2-2}\,dt - \int \frac{t}{1+t^2}\,dt + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

ここで $u = t-1$ とおくと $du = dt$ より,

$$\begin{aligned}
\int \frac{t+1}{(t-1)^2-2}\ dt &= \int \frac{u+2}{u^2-2}\ du \\
&= \int \frac{A}{u+\sqrt{2}} + \frac{B}{u-\sqrt{2}}\ du \\
&= \frac{1-\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{u+\sqrt{2}}\ du + \frac{1+\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{u-\sqrt{2}}\ du \\
&= \frac{1-\sqrt{2}}{2}\log|u+\sqrt{2}| + \frac{1+\sqrt{2}}{2}\log|u-\sqrt{2}| \\
&= \frac{1}{2}\log|u^2-2| - \frac{\sqrt{2}}{2}\log|\frac{u+\sqrt{2}}{u-\sqrt{2}}| \\
&= \frac{1}{2}\log|t^2-2t-1| - \frac{\sqrt{2}}{2}\log|\frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}|
\end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned}
\int \frac{-2+2t^2}{(t^2-2t-1)(1+t^2)}dt = &\frac{1}{2}\log|(t-1)^2-2| + \frac{\sqrt{2}}{2}\log|\frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}| \\
&- \frac{1}{2}\log|1+t^2| + \tan^{-1}(t) + c
\end{aligned}$$

最後に $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ を代入して完成.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\tan x}\ dx &= \int \frac{-2+2t^2}{(t^2-2t-1)(1+t^2)}\ dt \\
&= \frac{1}{2}\log|(t-1)^2-2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\log|\frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}| \\
&- \frac{1}{2}\log|1+t^2| + \tan^{-1}(t) + c \\
&= \frac{1}{2}\log|(\tan\frac{x}{2}-1)^2-2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\log|\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}| \\
&- \frac{1}{2}\log|1+\tan^2\frac{x}{2}| + \frac{x}{2} + c
\end{aligned}$$

3.6 解答

3.6

1.

(a) 無理関数 $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ を t とおくことにより，有理関数に直す.

$$\int x\sqrt{1+x}\ dx = \int (t^2-1)t(2t)\ dt \quad \left(\begin{array}{l} t=\sqrt{1+x}\text{とおくと } t^2=1+x \\ \text{これより } x=t^2-1, dx=2tdt \end{array}\right)$$
$$= 2\int (t^4-t^2)\ dt = 2(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3})+c$$
$$= 2[\frac{(1+x)^{5/2}}{5}-\frac{(1+x)^{3/2}}{3}]+c$$

(b) $t=\sqrt{x}$ とおくと $t^2=x$ より $2tdt=dx$. したがって,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\ dx = \int \frac{t}{t-1}2t\ dt$$
$$= 2\int \frac{t^2}{t-1}\ dt$$

ここで 分子の次数 > 分母の次数 より

$$\frac{t^2}{t-1} = t+1+\frac{1}{t-1}.$$

これより

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\ dx = 2\int (t+1+\frac{1}{t-1})\ dt$$
$$= 2[\frac{t^2}{2}+t+\log|t-1|]+c$$
$$= t^2+2t+2\log|t-1|+c$$
$$= x+2\sqrt{x}+2\log|\sqrt{x}-1|+c$$

(c) $t=\sqrt{1+e^x}$ とおくと $t^2=1+e^x$. これより $2tdt=e^xdx$. ここで被積分関数と dx を全て t の関数と dt で表すと

$$dx = \frac{2tdt}{e^x} = \frac{2tdt}{t^2-1}.$$

したがって,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{2t}{t(t^2-1)}\ dt$$
$$= 2\int \frac{1}{t^2-1}\ dt \quad \left(\begin{array}{l} \int \frac{1}{x^2-a^2}\ dx \\ = \frac{1}{2a}\log|\frac{x-a}{x+a}|+c \end{array}\right)$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}\log|\frac{t-1}{t+1}|+c$$
$$= \log|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x+1}}|+c$$

(d) $t=\sqrt{x-1}$ とおくと $t^2=x-1$. これより $2tdt=dx$. ここで被積分関数と dx を全て t の関数と dt で表すと

$$x^2\sqrt{x-1}dx = (t^2+1)^2(t)(2tdt) = 2t^6+4t^4+2t^2$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{x-1}dx &= \int 2t^6+4t^4+2t^2\ dt \\
&= \frac{2t^7}{7}+\frac{4t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}+c \\
&= \frac{2(x-1)^{7/2}}{7}+\frac{4(x-1)^{5/2}}{5}+\frac{2(x-1)^{3/2}}{3}+c
\end{aligned}
$$

(e) $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ とおくと $t^2=\frac{x+1}{x-1}$. ここで dx を求めるには, 上の式を一旦 x について解く必要がある.

$$
\begin{aligned}
t^2 &= \frac{x+1}{x-1} \text{ より} \\
xt^2-t^2 &= x+1 \\
x(t^2-1) &= t^2+1 \text{ となるので} \\
x &= \frac{t^2+1}{t^2-1}
\end{aligned}
$$

これより

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{2t(t^2-1)-(t^2+1)(2t)}{(t^2-1)^2}dt \\
&= \frac{-4t}{(t^2-1)^2}dt
\end{aligned}
$$

これを元の式に代入すると

$$
\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\ dx = \int\frac{-4t^2}{(t^2-1)^2}\ dt
$$

この積分を行なうには部分分数分解を行なう.

$$
\begin{aligned}
\frac{-4t^2}{(t^2-1)^2} &= \frac{-4t^2}{(t+1)^2(t-1)^2} \\
&= \frac{A}{t+1}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{t-1}+\frac{D}{(t-1)^2}
\end{aligned}
$$

分母を払うと

$$
-4t^2 = A(t+1)(t-1)^2+B(t-1)^2+C(t+1)^2(t-1)+D(t+1)^2
$$

$t=1$ とおくと

$$
-4=4D \Rightarrow D=-1
$$

$t=-1$ とおくと

$$
-4=4B \Rightarrow B=-1
$$

t^3 の係数を合わせると

$$0 = A + C$$

t^0 の係数を合わせると

$$-4 = A + B - C + D \Rightarrow A - C = -2$$

これより

$$A = -1,\ C = 1 \text{ が求まる．}$$

よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{-4t^2}{(t^2-1)^2}\ dt &= \int \frac{-1}{t+1}\ dt + \int \frac{-1}{(t+1)^2}\ dt \\
&\quad + \int \frac{1}{t-1}\ dt + \int \frac{-1}{(t-1)^2}\ dt \\
&= -\log|t+1| + \frac{1}{t+1} + \log|t-1| + \frac{1}{t-1} + c \\
&= -\log|t+1| + \log|t-1| + \frac{2t}{t^2-1} + c \\
&= \log|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1| - \log|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}| + \frac{(x-1)}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + c
\end{aligned}$$

2.

(a) $t = x^2 - 4$ とおくと $dt = 2xdx$ より，この問題は置換積分で求めることができる．

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\ dx &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} \\
&= \frac{1}{2}\int t^{-1/2}\ dt = \frac{1}{2}\cdot 2t^{1/2} + c \\
&= \sqrt{x^2-4} + c
\end{aligned}$$

(b) $t = \sqrt{4-x^2}$ とおくと $t^2 = 4 - x^2$ より $2tdt = -2xdx$ となり，全てを t と dt で表すと再び無理関数が登場してしまう．そこで，平方根の中が 2 乗の差であることに注意し，斜辺 2，高さ x，底辺 $\sqrt{4-x^2}$ で角 t の直角三角形を考える．すると $x = 2\sin t$ より $dx = 2\cos tdt$．また，

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = \sqrt{4\cos^2 t} = 2\cos t$$

より

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\ dx &= \int \frac{4\sin^2 t}{2\cos t} 2\cos t\ dt = 4\int \sin^2 t\ dt \\
&= 4\int \frac{1 - \cos 2t}{2}\ dt = 2[t - \frac{\sin 2t2}{]} + c \\
&= 2[t - \sin t\cos t] + c = 2[\sqrt{4-x^2} - \frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + c
\end{aligned}$$

(c) $t = e^x$ とおくと $dt = e^x dx$ となり，全てを t と dt で表すことができる．よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{9-e^{2x}}\ dx &= \int \frac{1}{9-t^2}\ dt \\
&= \frac{1}{6}\int \frac{1}{3-t} + \frac{1}{3+t}\ dt \\
&= \frac{1}{6}[-\log|3-t| + \log|3+t|] + c = \frac{1}{6}\log|\frac{3+t}{3-t}| + c \\
&= \frac{1}{6}\log|\frac{3+e^x}{3-e^x}| + c
\end{aligned}$$

(d) $t = \sqrt{1-x^2}$ とおくと $t^2 = 1-x^2$ より $2tdt = -2xdx$ となり，全てを t と dt で表すと再び無理関数が登場してしまう．そこで，平方根の中が 2 乗の差であることに注意し，斜辺 1，高さ x，底辺 $\sqrt{1-x^2}$ で角 t の直角三角形を考える．すると $x = \sin t$ より $dx = \cos t dt$．また，

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$$

より

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\ dx = \int \frac{\cos t}{\sin^4 t}\cos t\ dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t}\ dt$$

ここで，全ての三角関数は有理関数に直せることに注意する．特にこの場合は分子，分母とも偶数乗であるので $u = \tan t$ とおくと $t = \tan^{-1} u$ より

$$\begin{aligned}
dt &= \frac{1}{1+u^2}\ du \\
\sin t &= \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \\
\cos t &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}
\end{aligned}$$

となる．これより

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^2 t}{\sin^4 [t}\ dt &= \int \frac{\frac{1}{1+u^2}}{\frac{u^4}{(1+u^2)^2}}\frac{1}{1+u^2}\ du \\
&= \int \frac{1}{u^4}\ du = \int u^{-4}\ du \\
&= -\frac{1}{3}u^{-3} + c = -\frac{1}{3}\frac{1}{\tan^3 t} + c \\
&= -\frac{1}{3}(\frac{\cos t}{\sin t})^3 + c = -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3x^3} + c
\end{aligned}$$

(e) $t = \sqrt{x^2-a^2}$ とおくと $t^2 = x^2 - a^2$ より $2tdt = 2xdx$ となり，全てを t と dt で表すと再び無理関数が登場してしまう．そこで，平方根の中が 2 乗の差であることに注意し，斜辺 x，底

辺 a，高さ $\sqrt{x^2-a^2}$ で角 t の直角三角形を考える．すると $x = a\sec t$ より $dx = a\sec t\tan t dt$．また，

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = \sqrt{a^2\tan^2 t} = a\tan t$$

より

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{dx}}{x^2\sqrt{x^2-4}} &= \int \frac{a\sec t\tan t}{a^2\sec^2 t a\tan t}\ dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\sec t}\ dt \\
&= \frac{1}{a^2}\int \cos t\ dt = \frac{1}{a^2}\sin t + c \\
&= \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2 x} + c
\end{aligned}$$

(f)　$t = \sqrt{4+e^{2x}}$ とおくと $t^2 = 4 + e^{2x}$ より $2tdt = 2e^{2x}dx$ となり，全てを t と dt で表すと再び無理関数が登場してしまう．そこで，平方根の中が 2 乗の和であることに注意し，斜辺 $\sqrt{4+e^{2x}}$，底辺 2，高さ e^x で角 t の直角三角形を考える．すると $e^x = 2\tan t$ より $e^x dx = 2\sec^2 t dt$．また，

$$\sqrt{4+e^{2x}} = \sqrt{4+(2\tan t)^2} = \sqrt{4\sec^2 t} = 2\sec t$$

より

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{dx}}{e^x\sqrt{4+e^{2x}}} &= \int \frac{1}{2\tan t 2\sec t}\frac{2\sec^2 t}{2\sec t}\ dt \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\sec t}{\tan^2 t}\ dt = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\ dt \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\ dt = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} \\
&= -\frac{1}{4u} + c = -\frac{1}{4\sin t} + c = -\frac{\sqrt{4+e^{2x}}}{4e^x} + c
\end{aligned}$$

(g)　平方根の中が 2 乗の和または差になるように平方完成を行なうと

$$x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4 = (x-1)^2 - 2^2$$

斜辺 $x-1$，底辺 2，高さ $\sqrt{(x-1)^2-4}$ で角 t の直角三角形を考える．すると $x - 1 = 2\sec t$ より $dx = 2\sec t\tan t dt$．また，

$$\sqrt{(x-1)^2-4} = \sqrt{4\sec^2 t - 4} = \sqrt{4\tan^2 t} = 2\tan t$$

より

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}} &= \int \frac{2\sec t\tan t}{2\tan t}\ dt \\
&= \int \sec t\ dt = \log|sect + \tan t| + c \\
&= \log|\frac{x-1}{2} + \frac{sqrt(x-1)^2-4}{2}| + c
\end{aligned}$$

最後の部分で公式 $\int \sec t\ dt = \log|sect + \tan t| + c$ を用いたが，公式を用いなくとも次のように積分できる．

$$\begin{aligned}
\int \sec t\ dt &= \int \frac{1}{\cos t}\ dt = \int \frac{\cos t}{\cos^2 t}\ dt \\
&= \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\ dt \\
&= \int \frac{du}{1-u^2}\ du = \frac{1}{2}\log|\frac{1+u}{1-u}| + c \\
&= \frac{1}{2}\log|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}| + c
\end{aligned}$$

(h) 平方根の中が 2 乗の和または差になるように平方完成を行なうと

$$6x - x^2 = 9 - 9 + 6x - x^2 = 9 - (9 - 6x + x^2) = 3^2 - (3-x)^2$$

斜辺 3，底辺 $\sqrt{3^2-(3-x)^2}$，高さ $3-x$ で角 t の直角三角形を考える．すると $3 - x = 3\sin t$ より $-dx = 3\cos t dt$．また，

$$\sqrt{3^2-(3-x)^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \sqrt{9\cos^2 t} = 3\cos t$$

より

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{3^2-(3-x)^2}}\ dx &= \int \frac{3-3\sin t}{3\cos t}(-3\cos t)\ dt \\
&= -\int 3 - 3\sin t\ dt = -[3t + 3\cos t] + c \\
&= -3\sin^{-1}(\frac{3-x}{3}) - 3\frac{\sqrt{9-(3-x)^2}}{3} + +c \\
&= -3\sin^{-1}(\frac{3-x}{3}) - \sqrt{6x-x^2} + c
\end{aligned}$$

(i) 平方根の中が 2 乗の和または差になるように平方完成を行なうと

$$x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 2^2$$

斜辺 $x-1$，底辺 2，高さ $\sqrt{(x-1)^2-4}$ で角 t の直角三角形を考える．すると $x - 1 = 2\sec t$ より $dx = 2\sec t\tan t dt$．また，

$$\sqrt{(x-1)^2-4} = \sqrt{4\sec^2 t - 4} = \sqrt{4\tan^t} = 2\tan t$$

より

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x-3}}\ dx &= \int \frac{2\sec t+1}{2\tan t}(2\sec t\tan t)\ dt\\ &= \int (2\sec^2 t+\sec t)\ dt\\ &= 2\tan t+\log|\sec t+\tan t|+c\\ &= 2(\frac{\sqrt{(x-1)^2-4}}{2})+\log|\frac{x-1}{2}+\frac{\sqrt{(x-1)^2-4}}{2}+c\\ &= \sqrt{x^2-2x-3}+\log|\frac{x-1+\sqrt{(x-1)^2-4}}{2}|+c\end{aligned}$$

(j) 平方根の中が 2 乗の和または差になるように平方完成を行なうと

$$6x-x^2-8=9-9+6x-x^2-8=1-(9-6x+x^2)=1-(3-x)^2$$

斜辺 1，底辺 $\sqrt{1-(3-x)^2}$，高さ $3-x$ で角 t の直角三角形を考える．すると $3-x=\sin t$ より $-dx=\cos t dt$．また，

$$\sqrt{1-(3-x)^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$$

より

$$\begin{aligned}\int \sqrt{6x-x^2-8}\ dx &= \int \cos t(-\cos t)\ dt\\ &= -\int \cos^2 t\ dt\\ &= -\int \frac{1+\cos t}{2}\ dt=-[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}]+c\\ &= -[\frac{t}{2}+\frac{\sin t\cos t}{2}]+c\\ &= -\frac{\sin^{-1}(3-x)}{2}-\frac{(3-x)\sqrt{1-(3-x)^2}}{2}+c\end{aligned}$$

(k) 平方根の中が 2 乗の和または差になるように平方完成を行なうと

$$x^2+6x=(x+3)^2-9$$

斜辺 $x+3$，底辺 3，高さ $\sqrt{(x+3)^2-9}$ で角 t の直角三角形を考える．すると $x+3=3\sec t$ より $dx=3\sec t\tan t dt$．また，

$$\sqrt{(x+3)^2-9}=\sqrt{9\sec^2 t-9}=\sqrt{9\tan^2 t}=3\tan t$$

より

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2+6x}\ dx &= \int (3\sec t-3)3\tan t 3\sec t\tan t\ dt\\ &= 27\int (\sec^2 t\tan^2 t-\sec t\tan^2 t\ dt\\ &= 27\int (\frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}-\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t})\ dt\end{aligned}$$

ここで，全ての三角関数は有理関数に直せることに注意する．まず，$\int \frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}\ dt$ の積分を行なう．この場合は分子，分母とも偶数乗であるので $u = \tan t$ とおくと $t = \tan^{-1} u$ より

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{1+u^2}\ du \\ \sin t &= \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \\ \cos t &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \end{aligned}$$

となる．これより

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}\ dt &= \int \frac{\frac{u^2}{1+u^2}}{\frac{1}{(1+u^2)^2}} \frac{1}{1+u^2}\ du \\ &= \int u^2\ du = \frac{u^3}{3} + c \\ &= \frac{\tan^3 t}{3} + c \end{aligned}$$

次に，$\int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}\ dt$ の積分を行なう．この場合，分母に奇数乗を含んでいるので，分母と分子に $\cos t$ をかける．すると

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}\ dt &= \int \frac{\sin^2 t \cos t}{\cos^4 t}\ dt \\ &= \int \frac{\sin^2 t \cos t}{(1-\sin^2 t)^2}\ dt \end{aligned}$$

ここで，$u = \sin t$ とおくと $du = \cos t\ dt$ となるので

$$\int \frac{\sin^2 t \cos t}{(1-\sin^2 t)^2}\ dt = \int \frac{u^2}{(1-u^2)^2}\ du = \int \frac{u^2}{(1+u)^2(1-u)^2}\ du$$

この積分を行なうには部分分数分解を行なう．

$$\frac{u^2}{(1+u)^2(1-u)^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{(1+u)^2} + \frac{C}{1-u} + \frac{D}{(1-u)^2}$$

分母を払うと

$$u^2 = A(1+u)(1-u)^2 + B(1-u)^2 + C(1+u)^2(1-u) + D(1+u)^2$$

$u = 1$ とおくと

$$1 = 4D \Rightarrow D = \frac{1}{4}$$

$u = -1$ とおくと

$$1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

t^3 の係数を合わせると

$$0 = A - C$$

t^0 の係数を合わせると

$$0 = A + B + C + D \Rightarrow A + C = \frac{-1}{2}$$

これより

$$A = \frac{-1}{4},\ C = \frac{-1}{4} \text{が求まる.}$$

よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{u^2}{(1-u^2)^2}\ du &= \int \frac{-1/4}{1+u}\ du + \int \frac{1/4}{(1+u)^2}\ du \\
&\quad - \int \frac{1/4}{1-u}\ du + \int \frac{1/4}{(1-u)^2}\ du \\
&= -\frac{1}{4}\log|1+u| - \frac{1}{4}(\frac{1}{1+u}) + \frac{1}{4}(\log|1-u|) + \frac{1}{4}(\frac{1}{1-u}) + c \\
&= \frac{1}{4}\log|\frac{1-u}{1+u}| - \frac{1}{4}(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{1-u}) + c \\
&= \frac{1}{4}\log|\frac{1-u}{1+u}| + \frac{1}{4}(\frac{2u}{1-u^2}) + c \\
&= \frac{1}{4}\log|\frac{1-\sin t}{1+\sin t}| + \frac{1}{4}(\frac{2\sin t}{1-\sin^2 t}) + c
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x^2+6x}\ dx &= 27\int \frac{\sin^2 t}{\cos^4 t} - \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}\ dt \\
&= 27[\frac{\tan^3 t}{3} + \frac{1}{4}\log|\frac{1-\sin t}{1+\sin t}| + \frac{1}{4}(\frac{2\sin t}{1-\sin^2 t})] + c \\
&= 27[\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{x^2+6x}}{3})^3 + \frac{1}{4}\log|\frac{1-\frac{\sqrt{x^2+6x}}{x+3}}{1+\frac{\sqrt{x^2+6x}}{x+3}}| + \frac{1}{4}(\frac{2\frac{\sqrt{x^2+6x}}{x+3}}{1-(\frac{\sqrt{x^2+6x}}{x+3})^2})] + c
\end{aligned}$$

3.7 解答

3.7

1.

微分積分学の基本定理は次のように使う．$f(t)$ が $[a,b]$ で連続で，$a < x < b$ ならば

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\ dt = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^u f(t)\ dt = \frac{d}{du}(\int_a^u f(t)\ dt)\frac{du}{dx} = f(u)\frac{du}{dx}$$

(a)

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\ dt = \frac{d}{dx}(-\int_b^x f(t)\ dt) = -f(x)$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_x^{x+1} f(t)\ dt &= \frac{d}{dx}[\int_x^a f(t)\ dt + \int_a^{x+1} f(t)\ dt] \\ &= -f(x) + f(x+1)\frac{d(x+1)}{dx} = -f(x) + f(x+1)\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^{2x} x^2 f(t)\ dt &= \frac{d}{dx}(x^2\int_0^{2x} f(t)\ dt \quad \left(\begin{array}{l} t\text{ についての積分なので} \\ x^2\text{は積分記号の外に} \\ \text{出せる}\end{array}\right) \\ &= 2x\int_0^{2x} f(t)\ dt + x^2\frac{d}{dx}\int_0^{2x} f(t)\ dt \\ &= 2x\int_0^{2x} f(t)dt + x^2 f(2x)\cdot 2\end{aligned}$$

2.　定積分は次のようにして求める．$F'(x) = f(x)$ のとき，つまり $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\ |_a^b = F(b) - F(a)$$

特に，不定積分を求めるのに置換積分を使った場合

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx$$

を求めるには $t = g(x)$ とおくと $dt = g'(x)dx$ となるので

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{t=g(a)}^{t=g(b)} f(t)\ dt$$

として求める．

(a)　$t = \sqrt{x-1}$ とおくと $t^2 = x - 1$ より $2tdt = dx$．このとき

x	1	$\Rightarrow$	5
t	0	$\Rightarrow$	2

に注意すると

$$\begin{aligned}\int_1^5 2\sqrt{x-1}\ dx &= 2\int_0^2 t(2tdt) \\ &= 4\int_0^2 t^2\ dt = \frac{4}{3}t^3\ |_0^2 = \frac{32}{3}\end{aligned}$$

(b)

$$\int_1^2 \frac{2-t}{t^3}\ dt = \int_1^2 (2t^{-3} - t^{-2})\ dt = [-t^{-2} + t^{-1}\ |_1^2$$
$$= [-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\ |_1^2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - (-1+1) = \frac{1}{4}$$

(c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = \sin x\ |_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin 0 = 1$$

(d) $t = -x^2$ とおくと $dt = -2xdx$．このとき

x	0	$\Rightarrow$	1
t	0	$\Rightarrow$	-1

に注意すると

$$\int_0^1 xe^{-x^2}\ dx = \int_0^{-1} e^t(-2tdt)$$
$$= 2\int_{-1}^0 e^t\ dt = 2e^t\ |_{-1}^0 = 2(e^0 - e^{-1}) = 2(1 - \frac{1}{e})$$

(e) $t = e^x + 1$ とおくと $dt = e^x dx$．このとき

x	0	$\Rightarrow$	$\log 2$
t	2	$\Rightarrow$	3

に注意すると

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{e^x+1}\ dx = \int_2^3 \frac{dt}{t}\ dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\sec t}$$
$$= \log|t|\ |_2^3 = \log 3 - \log 2 = \log 32$$

3.

4.

(a) $0 < x < 1$ で $n > 2$ のとき $1 + x^n$ の評価を行なう．まず，$1 + x^n < 1 + x^2$ より

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+x^n}$$

また，$1 + x^n > 1$ より

$$\frac{1}{1+x^n} < 1$$

これより

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\ dx < \int_0^1 1\ dx$$

ここで

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx = \tan^{-1} x \ |_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$$

より

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\ dx < 1$$

(b)　$0 < x < 1$ で $n \geq 1$ のとき $\frac{x^n}{1+x}$ の評価を行なう．

$$\frac{x^n}{2} < \frac{x^n}{1+x} < x^n$$

より

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2}\ dx < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\ dx < \int_0^1 x^n\ dx$$

ここで

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2}\ dx = \frac{x^{n+1}}{2(n+1)}\ |_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}$$

また，

$$\int_0^1 x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ |_0^1 = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

よって

$$\frac{1}{2(n+1)} < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\ dx < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

5.

定積分と和の極限値の関係は次の式で与えられる．区間 $[a,b]$ 上で定義された関数 $f(x)$ の積分は，区間 $[a,b]$ を幅 $\frac{b-a}{n}$ の小区間で刻んでいくと，そこに生まれる長方形の面積 (ただし $f(x) > 0$) は

$$f(a + \frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n} + f(a + \frac{2(b-a)}{n})\frac{b-a}{n} + \cdots + = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + \frac{i(b-a)}{n})$$

で与えられる．このとき $n \to \infty$ で収束する定数を次のように表わす．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + \frac{i(b-a)}{n}) = \int_a^b f(x)\ dx$$

しかし，一般的には $f(x) = f(\frac{i(b-a)}{n})$ と考えて，次のように求める方が簡単である．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i(b-a)}{n}) = \int_0^{b-a} f(x)\ dx$$

(a)　極限値の式から $\frac{1}{n}$ を取り出すと

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(1 + \frac{i}{n})$$

ここで $f(x) = f(1+\frac{i}{n}) = \frac{1}{1+\frac{i}{n}}$ より $f(x) = \frac{1}{x}$ であることが分かる．したがって，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}) &= \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \log|x|\,|_1^2 \\ &= \log 2 - \log 1 = \log 2\end{aligned}$$

別解　$f(x) = f(\frac{i}{n}) = \frac{1}{1+\frac{i}{n}}$ より $f(x) = \frac{1}{1+x}$ となるので

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}) &= \int_1^2 \frac{1}{1+x}\,dx = \log|1+x|\,|_0^1 \\ &= \log 2 - \log 1 = \log 2\end{aligned}$$

(b)　極限値の式から $\frac{1}{n}$ を取り出すと

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{n^2+i^2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}}$$

ここで $f(x) = f(\frac{i}{n}) = \sqrt{\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}}$ より $f(x) = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$ であることが分かる．したがって，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{n^2+i^2}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}} \\ &= \int_0^1\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}\,dx \\ &= \log|x+\sqrt{1+x^2}|\,|_0^1 = \log 1+\sqrt{2}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \tan(t^2)dt}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x^2}{3x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x\sec^2 2x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 2x + 8x\sec^2 2x\tan 2x}{6} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

3.8 解答

3.8

1.

(a)　$t = \cos x$ とおくと $dt = -\sin x dx$．このとき

x	0	$\Rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	1	$\Rightarrow$	0

に注意すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin x \ dx &= \int_1^0 t^4(-dt) \\ &= \int_0^1 t^4 \ dt = \frac{t^5}{5} \ |_0^1 = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

(b)　$t = \sqrt{1+\cos x}$ とおくと $t^2 = 1 + \cos x$ より $2tdt = -\sin x dx$．このとき

x	0	$\Rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\sqrt{2}$	$\Rightarrow$	1

に注意すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} \ dx &= \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-2tdt}{t} \\ &= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ dt = -2t \ |_{\sqrt{2}}^1 = -2(1-\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

(c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \ dx = \frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

(d)　部分積分の復習

$$\int f(x)g'(x) \ dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) \ dx$$

より

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^2 & g'(x) = \cos x \\ f'(x) = 2x & g(x) = \sin x \end{array}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x^2 \cos x \ dx &= x^2 \sin x \ |_{-1}^1 - \int 2x \sin x \ dx \\ &= \sin 1 - \sin(-1) - \int 2x \sin x \ dx = 2\sin 1 - \int 2x \sin x \ dx\end{aligned}$$

ここで，もう一度部分積分を用いると

$$\begin{array}{ll} f(x) = 2x & g'(x) = \sin x \\ f'(x) = 2 & g(x) = -\cos x \end{array}$$

より

$$\begin{aligned}\int 2x \sin x \ dx &= -2x\cos x \ |_{-1}^1 + 2\int \cos x \ dx \\ &= -2\cos 1 - 2\cos(-1) + 2\sin x \ |_{-1}^1 \\ &= -2\cos 1 - 2\cos 1 + 2\sin 1 - 2\sin(-1) = -4\cos 1 + 4\sin 1\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2 \cos x \; dx &= 2\sin 1 - [-4\cos 1 + 4\sin 1] \\ &= 4\cos 1 - 2\sin 1\end{aligned}$$

(e) $n > 0$ のとき

$$\int_0^{\pi} \cos nx \; dx = \frac{1}{n} \sin nx \mid_0^{\pi} = 0$$

(f) $x = 2\cos\theta$ とおくと，$dx = -2\sin\theta d\theta$, $\sqrt{4 - x^2} = 2\sin\theta$．ここで，

x	$0 \rightarrow$	1
θ	$\frac{\pi}{2} \qquad \rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

より，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \; dx &= -4 \int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{4\cos^3\theta(-2\sin\theta)}{2\sin\theta} d\theta \\ &= -4 \int_{\pi/2}^{\pi/3} \cos^2\theta d\theta = -4 \int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= -2 \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi/3} \\ &= -2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2} - (-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2})\right) \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

(g)

$$\int u dv = uv - \int v du$$

より

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array}$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_0^1 x e^x \; dx &= x e^x \mid_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - e^x \mid_0^1 = e - (e - 1) = 1\end{aligned}$$

2. $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

$J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos x dx = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$

3.

(a) $F(-x) = -F(x)$ を示せばよい.

$$F(-x) = \int_x^{-x} f(t)dt = -\int_{-x}^{x} f(t)dt = -F(x)$$

(b) $f'(-x) = -f'(x)$ を示す.

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-(x-h)) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-(f(x) - f(x-h)}{h} = -f'(x) \end{aligned}$$

(c) $f'(x) = f(x) - f(-x)(-1)$. ここで，3(a) より，$f(x)$ は奇関数．したがって，$f'(x) = f(x) - f(x) = 0$

(d) $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ とおくと，$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ は偶関数．$h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ は奇関数となる．なぜならば,

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x), h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$$

4. $x = \tan t$ とおくと，$x^2 + 1 = \sec^2 t$, $dx = \sec^2 t dt$, $\begin{array}{c|ll} x & 0 & \to 1 \\ t & 0 & \to \pi/4 \end{array}$ ．よって,

$$\int_0^{\pi/4} \log(\tan t + 1)\ dt$$

次に，$t = \frac{\pi}{4} - u$ とおくと，$\tan(\frac{\pi}{4} - u) = \frac{1-\tan u}{1+\tan u}$ より，

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} \log(\tan t + 1)\ dt = \int_0^{\pi/4} \log(\frac{2}{\tan u + 1})\ du \\ &= \int_0^{\pi/4} \log 2du - I = \frac{\pi \log 2}{4} - I \end{aligned}$$

したがって,

$$I = \frac{\pi \log 2}{8}$$

3.9 解答

3.9

1.

広義積分を行なう前に次のような記号を理解する.

$$f(a+0) = \lim_{x\to a+} f(x),\ f(a-0) = \lim_{x\to a-} f(x)$$

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ の積分を行なう前に，$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ は $[0, 1)$ で連続であることに注意すると

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_0^{1-} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

と表わせる．よって $t = \sqrt{1-x}$ とおくと $t^2 = 1 - x$ より $2tdt = -dx$．また，

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \rightarrow & 1-0 \\ \hline t & 1 & \rightarrow & 0+ \end{array}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}\int_0^{1-} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \int_1^{0+} \frac{-2tdt}{t} \\ &= \int_1^{0+} (-2)\ dt \quad (t \text{ は } 0 \text{ にならない}) \\ &= -2t\ |_1^{0+} = -2(\lim_{t \to 0+} t - 1) = 2\end{aligned}$$

(b) $\int_0^1 \frac{1}{x}\ dx$ の積分を行なう前に，$f(x) = \frac{1}{x}$ は $(0, 1]$ で連続であることに注意すると

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\ dx = \int_{0+}^1 \frac{1}{x}\ dx$$

と表わせる．よって

$$\int_{0+}^1 \frac{1}{x}\ dx = \log|x|\ |_{0+}^1 = \log 1 - \lim_{x \to 0+} \log|x| = \infty$$

(c) $\int_0^1 \log x\ dx$ の積分を行なう前に，$f(x) = \log x$ は $(0, 1]$ で連続であることに注意すると

$$\int_0^1 \log x\ dx = \int_{0+}^1 \log x\ dx$$

と表わせる．ここで部分積分を用いると

$$\begin{pmatrix} f(x) = \log x & g'(x) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g(x) = x \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned}\int_{0+}^1 \log x\ dx &= x \log x\ |_{0+}^1 - \int_{0+}^1 dx \\ &= (x \log x - x)\ |_{0+}^1 \\ &= \log 1 - 1 - \lim_{x \to 0+} (x \log x - x) \\ &= -1 - \lim_{x \to 0+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \\ &= -1 - \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} \quad (\text{ロピタルの定理より}) \\ &= -1 - \lim_{x \to 0+} (-x) = -1\end{aligned}$$

2.

(a)　$\int_0^\infty xe^{-x}\ dx$ の積分を行なう前に，$f(x) = xe^{-x}$ は $[0, \infty)$ で連続であることに注意すると

$$\int_0^\infty xe^{-x}\ dx = \int_0^{\infty-} xe^{-x}\ dx$$

と表わせる．ここで部分積分を用いると

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\begin{pmatrix} u = x & dv = e^{-x} \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty-} xe^{-x}\ dx &= -xe^{-x}\ |_0^{\infty-} + \int_0^{\infty-} e^{-x}\ dx \\ &= \lim_{x\to\infty-} (-xe^{-x} - e^{-x})\ |_0^{\infty-} \\ &= \lim_{x\to\infty-} (\frac{-x}{e^x}) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{e^x} = 0\ (\text{ロピタルの定理})\end{aligned}$$

(b)　$\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\ dx$ の積分を行なう前に，$f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\alpha}$ は $[2, \infty)$ で連続であることに注意すると

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\ dx = \int_2^{\infty-} \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\ dx$$

と表わせる．ここで $t = \log x$ とおくと $dt = \frac{1}{x}dx$．このとき積分範囲は

x	2	$\to$	$\infty-$
t	$log2$	$\to$	$\infty-$

より

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty-} \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\ dx &= \int_{\log 2}^{\infty-} \frac{1}{t^{-\alpha}} dt \\ &= \begin{cases} \frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\ |_{\log 2}^{\infty-}, & \alpha \neq 1 \\ \log|t|\ |_{\log 2}^{\infty-}, & \alpha = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{x\to\infty-} \frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha < 1 \end{cases}$$

に注意すると

$$\int_2^{\infty-} \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\, dx = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha \le 1 \end{cases}$$

となる．

(c)　$\int_2^\infty \frac{1}{x^\alpha \log x}\, dx$ の積分を行なう前に，$f(x) = \frac{1}{x^\alpha \log x}$ は $[2, \infty)$ で連続であることに注意すると

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^\alpha \log x}\, dx = \int_2^{\infty-} \frac{1}{x^\alpha \log x}\, dx$$

と表わせる．次に，

$$x^\alpha f(x) = \frac{1}{\log x} \le \frac{1}{\log 2}$$

より

$$\int_2^{\infty-} f(x)\, dx \le \frac{1}{\log 2} \int_2^{\infty-} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

ここで $\int_2^{\infty-} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ は $\alpha > 1$ で収束．次に，$\alpha = 1$ のとき，$t = \log x$ とおくと $dt = \frac{1}{x} dx$．また，

x	2	$\to$	$\infty-$
t	$\log 2$	$\to$	$\infty-$

に注意すると

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{1}{x \log x}\, dx &= \int_{\log 2}^{\infty-} \frac{dt}{t} \\ &= \log|t| \,|_{\log 2}^{\infty-} = \infty \end{aligned}$$

最後に $\alpha < 1$ で $2 < x < \infty$ のとき $\frac{1}{x^\alpha} > \frac{1}{x}$ より

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^\alpha \log x}\, dx > \int_2^\infty \frac{1}{x \log x}\, dx$$

したがって，$\int_2^\infty \frac{1}{x^\alpha \log x}\, dx$ は発散．

3.

(a)　この問題は収束，発散について調べろという問題であり，何に収束するかという問題ではない．まず，$\cos x$ のテーラー展開を思いだすと

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots +$$

であるから次の不等式が成り立つ．

$$\cos x \le 1 - \frac{x^2}{2}$$

これより

$$\frac{1}{\sqrt{\cos x}} < \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}$$

が成り立ち，$\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$ は上からの押さえることができた．ここで，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}\ dx < \infty$$

を示せば，求める積分は収束することがいえる．

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}\ dx &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\ dx\\ &= \sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) < \infty\end{aligned}$$

(b)　$f(x)$ は $(0,1]$ で連続．$t=\sqrt{x}$ とおくと $t^2=x$ より $2tdt=dx$．また，

x	$0+$	$\to$	1
t	$0+$	$\to$	1

より

$$\begin{aligned}\int_{0+}^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\ dx &= \int_{0+}^1 \frac{\log t^2}{t}(2tdt) = 4\int_{0+}^1 \log t\ dt\\ &= 4[t\log t - t\ |_{0+}^1 = 4[\log 1 - 1 - \lim_{t\to 0+}(t\log t - t)]\\ &= 4[-1-\lim_{t\to 0+}(\frac{\log t - 1}{\frac{1}{t}})]\end{aligned}$$

$$4[-1-\lim_{t\to 0+}\frac{1/t}{-1/t^2}] = -4$$

4. $k^2=0$ のとき，$agm(1,1)=1$．また，$K(1)=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\sin^{-1}x]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

3.10 解答

3.10

1.

図形の面積を求めるには図を描く．

(a)　$x=y^2$ と $x=3-2y^2$ の交点を求めると $y^2=3-2y^2$ より $y=\pm 1$ となる．つまり，この 2 つの曲線は点 $(1,-1)$ と点 $(1,1)$ で交わっている．そこでこの図形の面積は横方向の長方形の面積 ΔA の和として考える．y 軸に垂直な直線でこの図形を切断するとその幅は，右側の曲線 - 左側の曲線で与えられ，また高さは y 軸方向に小さな幅となるので Δy で与えられる．よって

$$\Delta A = (3-2y^2-y^2)\Delta y$$

となる．これより求める面積 A は

$$A = \int_{-1}^{1} (3 - 2y^2 - y^2)dy = \int_{-1}^{1} (3 - 3y^2)dy$$
$$= 3y - y^3 \mid_{-1}^{1} = (3-1) - (-3+1) = 4.$$

(b)

この図形は $t = \frac{\pi}{2}$ で微分可能ではないので，面積を求めるには $t = 0$ から $t = \frac{\pi}{2}$ までの面積を求めて 2 倍する．縦方向に小さな幅を持つ長方形で切断すると切断面の面積 ΔA は

$$\Delta A = y\Delta x$$

で与えられるので，求める面積 A は

$$A = 2\int_0^1 ydx$$

ここで，x, y は t でパラメター化されていることに注意すると，

x	0	$\to$	1
t	$\pi/2$	$\to$	0

となる．したがって，

$$A = 2\int_0^1 ydx = \int_{\pi/2}^{0} \sin^3 t(3\cos^2 t(-\sin t)dt$$
$$= 6\int_0^{\pi/2} \sin^4 \cos^2 tdt$$
$$= 6\int_0^{\pi/2} \sin^4 t(1 - \sin^2 t)dt = 6\int_0^{\pi/2} (\sin^4 t - \sin^6 t)dt$$

となる．ここで，次の公式を用いる

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n xdx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & n \text{ 偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 奇数,} \end{cases}$$

ただし，$n!! = n(n-2)(n-4)\cdots$ を表わす．これより，

$$A = 6(\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}\frac{\pi}{2} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2}\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{16}.$$

2.

(a)　回転軸に垂直な平面で切断すると，その断面はワッシャーと呼ばれる 5 円玉のような形になる．その断面積 A は全体の面積から中の面積を引いたものになる．$(y-2)^2 = 1 - x^2$ より $y = 2 \pm \sqrt{1 - x^2}$．これより

$$y_{out} = 2 + \sqrt{1 - x^2},\ y_{in} = 2 - \sqrt{1 - x^2}.$$

よって，断面積 A は

$$A = \pi(y_{out}^2 - y_{in}^2) = 8\pi\sqrt{1-x^2}.$$

したがって，これに少しの厚み Δx をつけると，その体積 ΔV は

$$\Delta V = A\Delta x = 8\pi\sqrt{1-x^2}\Delta x$$

となるので，求める体積は

$$V = \int_{-1}^{1} 8\pi\sqrt{1-x^2}dx = 16\pi\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

ここで，$x = \sin\theta$ とおくと，$dx = \cos\theta$, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta$ となるので，

$$V = 16\pi\int_0^{\pi/2} \cos\theta\cos\theta d\theta = 16\pi\frac{\pi}{4} = 4\pi^2.$$

(b)　この関数の図形はサイクロイドと呼ばれる．x 軸との交点は $t = 0$ と $t = 2\pi$ のときである．この図形を x 軸に回転してできる回転体を x 軸に垂直な平面で切断すると，その断面積は πy^2 となる．これに少しの厚み Δx を付けると，その体積は

$$\Delta V = \pi y^2\Delta x.$$

したがって，求める体積は

$$V = \int_0^{2\pi} \pi y^2 dx$$

となるが，この図形は $x = \pi$ で対称となるので

$$V = 2\int_0^{\pi} \pi y^2 dx.$$

ここで，x, y をパラメター t で表わすと

$$\begin{aligned} V &= 2\int_0^{\pi} \pi y^2 dx \\ &= 2\pi\int_0^{\pi} (1-\cos t)^2(1-\cos t)dt \\ &= 2\pi\int_0^{\pi} (1-\cos t)^3 dt \end{aligned}$$

ここで，$1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$ であることを用いると

$$\begin{aligned} V &= 16\pi\int_0^{\pi} \sin^6\frac{t}{2}dt \\ &= 32\pi\int_0^{\pi/2} \sin^6\theta d\theta \ (\frac{t}{2} = \theta) \text{ とおく} \\ &= 32\pi(\frac{5!!}{6!!}\frac{\pi}{2}) = 16\pi^2(\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}) = 5\pi^2. \end{aligned}$$

3.

(a)　$x^{2/3}+y^{2/3}=1$ のグラフはアステロイドと呼ばれる．これをパラメター化すると $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t\ (0\le t\le 2\pi)$ となる．ここで，$x\ge 0, y\ge 0$ の長さを求めて 4 倍する．曲線の 1 部分 ΔL は

$$\Delta L=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2+(\frac{\Delta y}{\Delta t})^2}\Delta t$$

で与えられるので，求める曲線の長さは

$$\begin{aligned}
L&=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt\\
&=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}dt\\
&=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)}dt\\
&=12\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}dt\\
&=12\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t dt=12\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2}=6
\end{aligned}$$

(b)　パラメター化を行なう．$x=\cos^4 t, y=\sin^4 t\ (0\le t\le\frac{\pi}{2})$ とおくと

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

求める曲線の長さは

$$\begin{aligned}
L&=\int_0^{\pi/2}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt\\
&=\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-4\cos^3 t\sin t)^2+(4\sin^3 t\cos t)^2}dt\\
&=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^6 t\sin^2 t+\sin^6 t\cos^2 t}dt\\
&=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}\ \cos t\sin t dt\\
&=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(1-\sin^2 t)^2+\sin^4 t}\ \sin t\cos t dt
\end{aligned}$$

ここで，$u=\sin^2 t$ とおくと $du=2\sin t\cos t dt$．また

t	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$
u	0	$\to$	1

となるので，

$$L = 2\int_0^1 \sqrt{(1-u)^2+u^2}du = 2\int_0^1 \sqrt{2u^2-2u+1}du$$
$$= 2\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{(u-\frac{1}{1})^2+\frac{1}{4}}du$$

$w = u - \frac{1}{2}$ とおくと $dw = du$

u	0	$\rightarrow$	1
w	$-\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{2}$

より

$$L = 2\sqrt{2}\int_{-1/2}^{1/2}\sqrt{w^2+\frac{1}{4}}dw$$

ここで，次の積分公式を用いると

$$\int \sqrt{x^2+A}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+A}+A\log|x+\sqrt{x^2+A}|)$$

$$L = 2\sqrt{2}\frac{1}{2}(w\sqrt{w^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\log|w+\sqrt{w^2+\frac{1}{4}}|)\ |_{-1/2}^{1/2}$$
$$= \sqrt{2}(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\log|\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}} - (-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\log|-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}))$$
$$= \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\log|\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{-1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}})$$
$$= 1+\frac{\sqrt{2}}{4}\log|\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}|$$
$$= 1+\frac{\sqrt{2}}{4}\log|\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2}|$$
$$= 1+\frac{sqrt2}{2}\log|1+\sqrt{2}|$$

(c)　$r = 1+\cos\theta$ は x 軸で対称．また，

$$\Delta L = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta\theta})^2+(\frac{\Delta y}{\Delta\theta})^2}\Delta\theta$$

x, y を極形式になおすと，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$．よって

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta\cos\theta - \sin\theta(1+\cos\theta)$$
$$= -\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta = -\sin\theta - \sin 2\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta} = -\sin^2\theta + \cos\theta(1+\cos\theta)$$
$$= \cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos\theta + \cos 2\theta$$

これより

$$
\begin{aligned}
L &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2} d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2(\sin\theta\sin 2\theta + \cos\theta\cos 2\theta)} d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos(2\theta - \theta)} d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta} d\theta \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos\theta} d\theta \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}} d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\theta \\
&= 4 \cdot 2 \cdot \sin\frac{\theta}{2} \;|_0^{\pi} = 8
\end{aligned}
$$

4. 級数 (SERIES)

4.1 解答

4.1

1.

級数 $\sum a_n$ は $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ のとき発散する.

(a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+1}$ は発散

(b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) = \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})$ は発散

(c)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{n} = 1$$

より $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$ は発散

2.

(a) 部分分数分解すると

$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

より部分和は

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$$

(b)

$$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

より部分和は

$$S_n=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}S_n=1$$

(c) 部分分数分解すると

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})\right)$$

より部分和は

$$\begin{aligned}2S_n&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\&\quad-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\\&=1-\frac{1}{n+1}-(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2})\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$$

4.2 解答

4.2

1. 正項級数 $\sum a_n$ において，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ が存在するとき，$0 \leq \rho < 1$ ならば，$\sum a_n$ は収束.

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n} \cdot \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ は収束.

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \\ &= \frac{1}{e} < 1\end{aligned}$$

より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ は収束.

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= e > 1\end{aligned}$$

より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ は発散.

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{n^2}{2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ は収束.

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$$

より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ は収束.

(f) 部分和を求めると

$$S_n=1+2^{1/3}-1+3^{1/3}-2^{1/3}+4^{1/3}-3^{1/3}+\cdots+(n+1)^{1/3}-n^{1/3}=(n+1)^{1/3}$$

よって

$$\sum(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)^{1/3}=\infty$$

4.3 解答

4.3

1. 交項級数 $\sum(-1)^n a_n$ において，$a_1\geq a_2\geq a_3\geq\cdots\geq a_n\geq$ で

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \text{ ならば, } \sum(-1)^n a_n \text{は収束}$$

$$\sum a_n<\infty \text{ ならば, } \sum(-1)^n a_n \text{は絶対収束}$$

$$\sum(-1)^n a_n<\infty \text{ で } \sum a_n=\infty \text{ ならば, } \sum(-1)^n a_n \text{は条件収束}$$

(a) 数列 $\{a_n\}=\{\frac{\log n}{n}\}$ は単調減少数列で $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ よって収束．次に，$\sum\frac{\log n}{n}$ について調べる．$f(x)=\frac{\log x}{x}$ とおくと

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{\log x}{x}dx\ \left(t=\log x, dt=\frac{1}{x}dx\right)$$
$$=\int_0^{\infty}tdt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^{\infty-0}=\infty$$

よって，積分判定法により $\sum\frac{\log n}{n}$ は発散．したがって，$\sum(-1)^n\frac{\log n}{n}$ は条件収束.

(b) $\sum\frac{n}{3^n}$ について考える.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1$$

より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ は収束．したがって，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3^n}$ は絶対収束.

(c)

$$\sum(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})=\sum\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\sum\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

より $\sum\frac{1}{n^{3/2}}<\infty$ と比較する．比較判定法を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\cdot n^{2/3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2/3}}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}(\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1))}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}=\frac{1}{2}<1.\end{aligned}$$

したがって，$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})$ は収束．

(d) 数列 $\{a_n\}=\{\frac{1}{2n-1}\}$ は単調減少数列で $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ よって収束．次に，$\sum\frac{1}{2n-1}$ について調べる．$\sum\frac{1}{n}=\infty$ を用いて比較すると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}$$

よって，比較判定法により $\sum\frac{1}{2n-1}$ は発散．したがって，$\sum(-1)^n\frac{1}{2n-1}$ は条件収束．

(e) 数列 $\{a_n\}=\{\frac{1}{n\log n}\}$ は単調減少数列で $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ よって収束．次に，$\sum\frac{1}{n\log n}$ について調べる．$f(x)=\frac{1}{x\log x}$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty}f(x)dx&=\int_1^{\infty}\frac{2}{x\log x}dx\ \left(t=\log x, dt=\frac{1}{x}dx\right)\\&=\int_{\log 2}^{\infty}\frac{1}{t}dt=[\log t]_{\log 2}^{\infty-0}=\infty\end{aligned}$$

よって，積分判定法により $\sum\frac{\log n}{n}$ は発散．したがって，$\sum(-1)^n\frac{1}{n\log n}$ は条件収束．

(f)

$$\sum|\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^3+n}}|=\sum\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$$

より $\sum\frac{1}{n^{3/2}}<\infty$ と比較する．比較判定法を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}\cdot n^{2/3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2/3}}{\sqrt{n^3+n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1.\end{aligned}$$

したがって，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ は収束．つまり，$\sum\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^3+n}}$ は絶対収束．

4.4 解答

4.4

1. ベキ級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径は次の式で与えられる．

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$$

(a)

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{2n+2}{2n+1}| = 1$$

(b) $\sum \frac{n}{3^n}$ について考える．

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{2^{2n}}{2n!}\frac{2(n+1)!}{2^{2(n+1)}}| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n+1)}{2^{2n+2}} = \infty\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{n!}{(n+1)!}| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}\log(\frac{1+x}{1-x}) &= \log(1+x) - \log(1-x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \\ &= 2[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots +]\end{aligned}$$

(b) 部分分数分解すると

$$\frac{1}{3x^2-4x+1} = \frac{1}{(3x-1)(x-1)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{x-1}$$

より $A = -\frac{3}{2}, B = \frac{1}{2}$．ここで，

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ (|x| < 1)$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{3x^2-4x+1} &= \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{3x-1}) \\ &= \frac{1}{2}(-\frac{1}{1-x} + 3\frac{1}{1-3x}) \\ &= \frac{1}{2}(-\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n)\end{aligned}$$

5. ベクトル関数 (VECTOR FUNCTIONS)

5.1 解答

5.1

1. ベクトル関数の微分，積分はそれぞれの成分の微分，積分で求められる．

(a)

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'(t) &= ((\sin t)', (\cos^2 t)', (t^2)') \\ &= (\cos t, -2\sin t\cos t, 2t)\end{aligned}$$

(b) $\sum \frac{n}{3^n}$ について考える．

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'(t) &= (\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt, \int \frac{1}{1+t^2}dt, \int \tan t dt) \\ &= (\log|1+\sqrt{1+t^2}|, \tan^{-1} t, \log|sect)\end{aligned}$$

(c) $\mathbf{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), \mathbf{G}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$ とおくと

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t)$$

より

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{G}(t))' &= f_1'(t)g_1(t) + f_1(t)g_1'(t) + f_2'(t)g_2(t) + f_2(t)g_2'(t) + f_3'(t)g_3(t) + f_3(t)g_3'(t) \\ &= (f_1(t), f_2(t), f_3(t))\cdot(g_1'(t), g_2'(t), g_3'(t)) \\ &+ (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))\cdot(g_1(t), g_2(t), g_3(t)) \\ &= F'(t)\cdot G(t) + F(t)\cdot G'(t)\end{aligned}$$

(d) $\mathbf{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), G(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$ とおくと

$$(\mathbf{F}\times\mathbf{G})(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t)\end{vmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}\times\mathbf{G})'(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1'(t) & f_2'(t) & f_3'(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t)\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1'(t) & g_2'(t) & g_3'(t)\end{vmatrix} \\ &= \mathbf{F}'(t)\times\mathbf{G}(t) + \mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}'(t)\end{aligned}$$

5.2 解答

5.2

1. 曲線 $\vec{r}(t)$ において，点 $\vec{r}(a)$ を通る接線の方程式を考える．接線上に任意の点 $\vec{r}(t)$ を取り，既知の点 $\vec{r}(a)$ と結ぶと，$\vec{t}(t)-\vec{r}(a)$ は接線ベクトル $\vec{r}'(a)$ のスカラー倍で表わせる．したがって，接線の方程式は

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(a)+t\vec{r}'(a)$$

で与えられる．

(a) $\vec{r}(t)=(e^t,e^{-t},-\log t)$ より $t=1$ での接線ベクトルは

$$\vec{r}'(1)=(e^t,-e^{-t},-\frac{1}{t})\mid_{t=1}=(e,-e^{-1},-1)$$

よって，接線の方程式は

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(1)+t\vec{r}'(1)=(e,e^{-1},0)+t(e,-e^{-1},-1)$$

(b) $\vec{r}(t)=(\cos\pi t,\sin\pi t,t)$ より $t=2$ での接線ベクトルは

$$\vec{r}'(2)=(-\pi\sin\pi t,\pi\cos\pi t,1)\mid_{t=2}=(0,\pi,1)$$

よって，接線の方程式は

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(2)+t\vec{r}'(2)=(1,0,2)+t(0,\pi,1)$$

2.

(a) $\vec{r}(t)=(at,bt^2)$ より $x=at,y=bt^2$．これより t を消去する．$t=\frac{x}{a}$ より $y=bt^2=b(\frac{x^2}{a^2})$.

(b) $\vec{r}(t)=(t^3,t^2)$ より $x=t^3,y=t^2$．これより t を消去する．$t=x^{1/3}$ より $y=t^2=x^{2/3}$.

(c) $\vec{r}(t)=(\cos 2t,\sin 2t,t)$ より $x=\cos 2t,y=\sin 2t,z=t$．これより t を消去する．まず，$x^2+y^2=\cos^2 2t+\sin^2 2t=1$．次に，$x=\cos 2z,y=\sin 2z$ となるので，$\frac{y}{x}=\tan 2z$．よって，　$z=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{y}{x})$.

3. 微小時間 Δt に対する弧長 Δs は速さ $\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\|$ に微小時間 Δt をかけたものである．したがって，$\vec{r}(a)$ から $\vec{r}(t)$ までの弧長 s は

$$s(t)=\int_a^t\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\|dt$$

で与えられる．

(a)

$$\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\|=\|(1,\frac{\sec t\tan t}{\sec t},0)\|=\sqrt{1+\tan^2 t}=\sec t$$

より

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\| dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t dt \\
&= [\log|\sec t + \tan t|]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \log|sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}| - \log|\sec 0 + \tan 0| \\
&= \log|\sqrt{2}+1| - \log 1 = \log(1+\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\| &= \|e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)\| \\
&= e^t\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2} = e^t\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^{\pi} \|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\| dt \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{2}e^t dt \\
&= \left[\sqrt{2}e^t|\right]_0^{\pi} \\
&= \sqrt{2}(e^{\pi} - 1)
\end{aligned}
$$

(c) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1,\ y \geq 0$ をパラメター化すると

$$x = \cos^3 t, y = \sin^3 t,\ 0 \leq t \leq \pi$$

となるので，$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

$$
\begin{aligned}
\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\| &= \|(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)\| \\
&= 3\sqrt{\cos^4(t)\sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} = 3\cos t \sin t
\end{aligned}
$$

ここで，$\vec{r}(t)$ は $t = \frac{\pi}{2}$ で滑らかでないことに注意すると

$$
\begin{aligned}
s &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\| dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin t dt \\
&= 6\left[\frac{\sin^2 t}{2}|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3
\end{aligned}
$$

4. 曲線が $y = f(x)$ で与えられるとき，曲率 κ は $\kappa = |\frac{d\phi}{ds}|$ で表わされる．ここで，ϕ は曲線と x 軸のなす角で，s は曲線の長さを表わす．つまり，曲線の長さが Δs だけ変化したとき，角 ϕ はどれだけ変化するかを測っている．

$\frac{d\phi}{ds}$ の求め方

$\tan\phi$ は曲線の接線の傾きなので，$y' = \tan\phi$．つまり，$\phi = \tan^{-1}(y')$．また，

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + (y')^2}\Delta x$$

より

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{y''}{1 + (y')^2}\frac{1}{ds/dx} = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$$

(a)　$y = e^{-x}$ の曲率は

$$\kappa = |\frac{d\phi}{ds} = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}}|$$

ここで，

$$y' = -e^{-x},\ y'' = e^{-x}$$

より

$$\kappa = \frac{e^{-x}}{(1 + (e^{-x})^2)^{3/2}} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-2x})^{3/2}}$$

(b)　$y = \log(\sec x)$ の曲率は

$$\kappa = |\frac{d\phi}{ds} = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}}|$$

ここで，

$$y' = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \tan x,\ y'' = \sec^2 x$$

より

$$\kappa = \frac{\sec^2 x}{(1 + (\tan x)^2)^{3/2}} = \frac{\sec^2 x}{\sec^3 x} = \frac{1}{\sec x} = \cos x$$

(c)　空間のベクトルの曲率 κ は，曲線の長さが Δs だけ変化したとき，接線単位ベクトル $\hat{t}$ がどれだけ変化するかを測る．つまり

$$\kappa = \|\frac{d\hat{t}}{ds}\| = \|\frac{d\hat{t}/dt}{ds/dt}\|$$

で与えられる．ここで，

$$\begin{aligned}\hat{t} &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\\ &= \frac{(-3\sin t, 3\cos t)}{\|(-3\sin t, 3\cos t)\|} = (-\sin t, \cos t)\end{aligned}$$

より $\frac{d\hat{t}}{dt} = (-\cos t, -\sin t)$．また，

$$\frac{ds}{dt} = \|\frac{d\vec{r}}{dt}\| = \|\sqrt{(-3\sin t, 3\cos t)}\| = 3$$

したがって，

$$\kappa = \|\frac{d\hat{t}}{ds}\| = \|\frac{(-\cos t, -\sin t)}{3}\| = \frac{1}{3}$$

5.3 解答

5.3

1.

1. 位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ に対して，$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ は速度ベクトルを意味する．幾何学的には運動している物体の接線方向のベクトルである．また，$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$ は加速度ベクトルで，幾何学的には，接線方向の加速度ベクトル $\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{t}}}$ と法線方向の加速度ベクトル $\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}}}$ の和で表わされる．つまり

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{t}}} + \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}}}$$

ここで，$\hat{\mathbf{t}}$ は接線単位ベクトル，$\hat{\mathbf{n}}$ は法線単位ベクトルを表わす．言い換えると，

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}$$

(a)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (2bt - a\pi\sin\pi t, \pi a\cos\pi t - 2bt)$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (-\pi^2 a\cos\pi t + 2b, -\pi^2 a\sin\pi t - 2b)$$

より $t = 1$ のとき

$$\mathbf{v}(1) = (2b, \pi a - 2b), \mathbf{a}(1) = (\pi^2 a + 2b, -2b)$$

となるので，

$$v = \|\mathbf{v}(1)\| = \sqrt{4b^2 + (\pi a - 2b)^2}$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{v}(1)}{v} = \frac{(2b, \pi a - 2b)}{\sqrt{4b^2 + (\pi a - 2b)^2}}$$

(b) $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (3t^2, 1)$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (6t, 0)$$

より $t = 1$ のとき

$$\mathbf{v}(1) = (3, 1),\ \mathbf{a}(1) = (6, 0)$$

となるので，

$$v = \|\mathbf{v}(1)\| = \sqrt{10}$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{v}(1)}{v} = \frac{(3,1)}{\sqrt{10}}$$

最後に，$\hat{\mathbf{n}}$ を求める．

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{t}}} &= (\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{t}})\hat{\mathbf{t}} = ((6,0)\cdot\frac{(3,1)}{\sqrt{10}})\frac{(3,1)}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{(27,9)}{5}\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}}} &= \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{t}}} \\ &= (6,0) - \frac{(27,9)}{5} = \frac{(3,-9)}{5}\end{aligned}$$

ここで，$\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}}} = (x,y)$ とおくと，$\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}}} = (\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$ より

$$(6,0)\cdot(x,y)(x,y) = \frac{(3,-9)}{5}$$

これを x, y について解くと

$$6x(x,y) = \frac{(3,-9)}{5}$$

より $x = \frac{1}{\sqrt{10}}, y = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

(c)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (0, 2t, 2(t-1))$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (0,2,2)$$

より $t = 1$ のとき

$$v = 2, \hat{\mathbf{t}} = (0,1,0)$$

最後に，$\hat{\mathbf{n}}$ を求める．

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{t}}(t) &= \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{(0,2t,2(t-1))}{\sqrt{4t^2+4t^2-8t+4}} \\ &= \frac{(0,t,t-1)}{\sqrt{2t^2-2t+1}}\end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{t}}'(t) = \frac{-(4t-2)}{(2t^2-2t+1)^{3/2}}(0,t,t-1) + \frac{1}{\sqrt{2t^2-2t+1}}(0,1,1)$$

より

$$\hat{\mathbf{t}}'(1) = -2(0,1,0) + (0,1,1) = (0,-1,1)$$

したがって，

$$\hat{\mathbf{n}}(1) = \frac{\hat{\mathbf{t}}'(1)}{\|\hat{\mathbf{t}}'(1)\|} = \frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}$$

2.

(a) $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (1, 2t, 2t^2)$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (0, 2, 4t)$$

より

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \left(\frac{1}{1+2t^2}, \frac{2t}{1+2t^2}, \frac{2t^2}{1+2t^2}\right)$$

$$\kappa = \frac{2}{(1-2t^2)}, \hat{\mathbf{n}} = \left(\frac{-2t}{1+2t^2}, \frac{1-2t^2}{1+2t^2}, \frac{2t}{1+2t^2}\right)$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\frac{2t^2}{1+2t^2}, \frac{-2t}{1+2t^2}, \frac{1}{1+2t^2}\right), \tau = \frac{2}{(1+2t^2)}$$

(b)

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{2}(-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\kappa = \frac{1}{2}, \hat{\mathbf{n}} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{2}(\sin t, -\cos t, 1)$$

$$\tau = \frac{1}{2}$$

6. 偏微分法 (PARTIAL DIFFERENTIATION)

6.1 解答

6.1

1.

$f(x,y)$ の定義域とは関数 $f(x,y)$ が実数の値をとる (x,y) の範囲のことである．

2 変数関数のグラフは正面図 $(x=0)$，側面図 $(y=0)$，等位面 $(z=c)$ を用いて描く．(a)

$$\begin{aligned} D(f) &= \{(x,y) : f(x,y) \in \mathcal{R}\} \\ &= \{(x,y) : x^2 - y^2 \in \mathcal{R}\} = \mathcal{R}^2 \end{aligned}$$

$x=0$ とおくと，$z=f(x,y)=-y^2$ より $y-z$ 平面に放物線．$y=0$ とおくと，$z=f(x,y)=x^2$ より $x-z$ 平面に放物線．$z=c$ とおくと，$z=f(x,y)=x^2-y^2=c$ より，等位面 $z=c$ に双曲線となる．これを用いて図を描く．

(b)

$$\begin{aligned}D(f)&=\{(x,y):f(x,y)\in\mathcal{R}\}\\&=\{(x,y):\frac{x^2}{x^2+y^2}\in\mathcal{R}\}=\mathcal{R}^2-(0,0)\end{aligned}$$

$x=0$ とおくと，$z=f(x,y)=0$．$y=0$ とおくと，$z=f(x,y)=1$ より $x-z$ 平面に直線．$z=c$ とおくと，$z=f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}=c$ より，$x^2=c(x^2+y^2)$．$(1-c)x^2-y^2=0$ より $y=\pm\sqrt{(1-c)}x$

(c)

$$\begin{aligned}D(f)&=\{(x,y):f(x,y)\in\mathcal{R}\}\\&=\{(x,y):\log(1-xy)\in\mathcal{R}\}\\&=\{(x,y):xy<1\}\end{aligned}$$

$z=c$ とおくと，$z=f(x,y)=\log(1-xy)=c$ より，$1-xy=e^c$．$y=\frac{1-e^c}{x}$．ここで，c の値を変化させながらグラフを描く

6.2 解答

6.2

1.

(a)

$z_x=3x^2+y^2, z_y=2xy+3y^2$

(b)

$$\begin{aligned}z_x&=\frac{\partial(e^x)}{\partial x}\sin y=e^x\sin y\\z_y&=e^x\frac{\partial(\sin y)}{\partial y}=e^x\cos y\end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
z_x &= \frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} \\
&= \frac{2x}{x^2+y^2} \\
z_y &= \frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} \\
&= \frac{2y}{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

2.

(a)

$$z_x = \frac{\partial(x^3)}{\partial x}y + \frac{\partial(x)}{\partial x}y^2 = 3x^2y + y^2,$$

$$z_y = x^3\frac{\partial(y)}{\partial y} + x\frac{\partial(y^2)}{\partial y} = x^3 + 2xy$$

$$z_{xx} = 6xy, z_{xy} = 3x^2 + 2y, z_{yx} = 3x^2 + 2y, z_{yy} = 2x$$

(b)

$$
\begin{aligned}
z_x &= \frac{\partial(x)}{\partial x} y^2 e^{\frac{x}{y}} + xy^2 \frac{\partial(e^{x/y})}{\partial x} \\
&= y^2 e^{\frac{x}{y}} + xy^2 \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} = (y^2 + xy) e^{\frac{x}{y}} \\
z_y &= x \frac{\partial(y)}{\partial y} e^{\frac{x}{y}} + xy^2 \frac{\partial(e^{x/y})}{\partial y} \\
&= 2xy e^{\frac{x}{y}} + xy^2 e^{\frac{x}{y}} (-\frac{x}{y^2}) = (2xy - x^2) e^{\frac{x}{y}} \\
z_{xx} &= \frac{\partial(y^2 + xy)}{\partial x} e^{\frac{x}{y}} + (y^2 + xy) \frac{\partial(e^{x/y})}{\partial x} \\
&= y e^{\frac{x}{y}} + (y^2 + xy) e^{\frac{x}{y}} (\frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial x}) \\
&= y e^{\frac{x}{y}} + (y^2 + xy)(\frac{1}{y}) e^{\frac{x}{y}} \\
&= e^{\frac{x}{y}} (y + y + x) = e^{\frac{x}{y}} (x + 2y) \\
z_{xy} &= \frac{\partial(y^2 + xy)}{\partial y} e^{\frac{x}{y}} + (y^2 + xy) \frac{\partial(e^{x/y})}{\partial y} \\
&= (2y + x) e^{\frac{x}{y}} + (y^2 + xy) e^{\frac{x}{y}} (\frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial y}) \\
&= (2y + x) e^{\frac{x}{y}} + (y^2 + xy)(-\frac{x}{y^2}) e^{\frac{x}{y}} \\
&= e^{\frac{x}{y}} (2y + x - x - \frac{x}{y^2}) = e^{\frac{x}{y}} (2y - \frac{x^2}{y}) \\
z_{yy} &= \frac{\partial(2xy - x^2)}{\partial y} e^{\frac{x}{y}} + (2xy - x^2) \frac{\partial(e^{x/y})}{\partial y} \\
&= 2x e^{\frac{x}{y}} + (2xy - x^2) e^{\frac{x}{y}} (\frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial y}) \\
&= 2x e^{\frac{x}{y}} + (2xy - x^2)(-\frac{x}{y^2}) e^{\frac{x}{y}} \\
&= e^{\frac{x}{y}} (2x - \frac{2x^2}{y} + \frac{x^3}{y^2})
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
z_x &= \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} \\
&= \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2} \\
z_y &= \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} \\
&= \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2} \\
z_{xx} &= \frac{\frac{\partial(2x)}{\partial x}(1+(x^2+y^2)^2) - 2x(\frac{\partial(1+(x^2+y^2)^2)}{\partial x})}{(1+(x^2+y^2)^2)^2} \\
&= \frac{2(1+(x^2+y^2)^2) - 2x(2(x^2+y^2)(2x))}{(1+(x^2+y^2)^2)^2} \\
&= \frac{2+2(x^2+y^2)^2 - 8x^2(x^2+y^2)}{(1+(x^2+y^2)^2)^2} \\
z_{xy} &= -\frac{2x(2(x^2+y^2)(2x))}{(1+(x^2+y^2)^2)^2} \\
&= \frac{-8x(x^2+y^2)}{(1+(x^2+y^2)^2)^2} \\
z_{yy} &= \frac{\frac{\partial(2y)}{\partial y}(1+(x^2+y^2)^2) - 2y(\frac{\partial(1+(x^2+y^2)^2)}{\partial y})}{(1+(x^2+y^2)^2)^2} \\
&= \frac{2+2(x^2+y^2)^2 - 8y^2(x^2+y^2)}{(1+(x^2+y^2)^2)}
\end{aligned}
$$

3.

$f_x(0,0), f_y(0,0)$ が存在するか調べればよい．$fx(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$ より $f_x(x,0) = 0$．したがって，$f_x(0,0) = 0$．$fy(0,y) = \frac{y^3}{y^2} = y$．$f_y(0,y) = 1$．したがって，$f_y(0,0) = 1$．

(b) $f(x,0) = \log 1 = 0$ より $f_x(x,0) = 0$．したがって，$f_x(0,0) = 0$．$f(0,y) = \log(1+y^2)$ より $f_y(0,y) = \frac{2y}{1+y^2}$．したがって，$f_y(0,0) = 0$．

6.3 解答

6.3

1.

(a) $D = \{(x,y) : 0 < x^2+y^2 < 1\}$ は半径 1 の円を表わし，中心とその外周を含んでいない．したがって，D の中にどんな点をとってもその近傍が D に含まれるようにすることができる．よって，D は開集合である．

D は中心を原点とする半径 $R > 1$ の円に含まれるので有界.

D に属するどの 2 点も，D の中だけを通る連続な曲線で結べるので連結.

連結な開集合を領域というので D は領域.

D の境界 $\partial D = \{(x,y) : x^2+y^2=1\}$

D の閉領域 $\bar{D} = \{(x,y) : 0 \le x^2+y^2 \le 1\}$

(b)

$D = \{(x,y) : xy \le 0\}$ より $\sim D = \{(x,y) : xy > 0\}$．$\sim D$ は開集合なので，D は閉集合である．

どんな半径 R を持つ開円板 $\{(x,y) : x^2+y^2 < R\}$ にも集合 D は含まれないので非有界.

D に属するどの 2 点も，D の中だけを通る連続な曲線で結べるので連結.

D の境界 $\partial D = \{(x,y) : xy = 0\}$

D の閉領域 $\bar{D} = \{(x,y) : 0 \le xy \le 0\}$

2.

(a) 分子の項の最小次数 $= 1 <$ 分母の項の最小次数 $= 2$．よって分母の方が速く 0 に近づく．そこで，$y = mx$ とおくと

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{mx^2}}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{m}}{x(1+m^2)} = \infty$$

となり，存在しない.

(b) 分子の項の最小次数 $=$ 分母の項の最小次数 $= 2$ より $y = mx$ とおくと

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2+m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{m}}{(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}.$$

これは，m の値によって異なるから，$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2+y^4}$ は存在しない.

(c) 分子の項の最小次数 $= 2 >$ 分母の項の最小次数 $= 1$ より $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと

$$|\frac{xy}{x^2+y^2+y}| = |\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2+r\sin\theta}| \le |\frac{r^2}{r^2+r\sin\theta}| = |\frac{1}{1+\frac{1}{r}\sin\theta}| \to 0.$$

したがって，はさみ撃ちの定理より $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2+y} = 0$.

3.

(a)

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

が成り立つか調べる.

分子の項の最小次数 $= 3 >$ 分母の項の最小次数 $= 2$．よって分子の方が速く 0 に近づく．そこで，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと

$$|\frac{x^2y}{x^2+y^2}| = |\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2}| = |r\cos^2\theta\sin\theta| \le |r| \to 0 \ (r \to 0).$$

よって，$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$ となり $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続である.

(b) 分子の項の最小次数 $=$ 分母の項の最小次数 $= 2$ より $y = mx$ とおくと

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-m^2}{(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

これは，m の値によって異なるから，$\lim_{(x,y)\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は存在しない．したがって，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で不連続.

(c) (x,y) が $(0,0)$ に近づくとき，xy が 0 に近づく速さは，$\log(x^2+y^2)$ が無限大に近づく速さよりも速い．そこで，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくと

$$0 \le |f(x,y)| = |2r^2\cos\theta\sin\theta\log r| \le |2r^2\log r| \to 0\ (r\to 0).$$

よって，$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0 \ne f(0,0) = -1$ となり $f(x,y)$ は $(0,0)$ で不連続である．

6.4 解答

6.4

1. 次のことを確認します．$z=f(x,y)$ の全微分 $df(x,y)$ は

$$df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

で与えられる．$z=f(x,y)$ の勾配 ∇f は

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)$$

で与えられる．点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0)$ を通る $z=f(x,y)$ の接平面の方程式は

$$z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)$$

で与えられる．点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0)$ を通る $z=f(x,y)$ の法線の方程式は

$$(x,y,z) - (x_0,y_0,f(x_0,y_0)) = t(f_x(x_0,y_0,-1)$$

で与えられる．

(a) $f_x(x,y) = 3x^2y^4, f_y(x,y) = 4x^3y^3$ より

$$\begin{aligned} df(x,y) &= 3x^2y^4dx + 4x^3y^3dy \\ \nabla f(x,y) &= (3x^2y^4, 4x^3y^3) \end{aligned}$$

点 $(1,1)$ に対応する点を通る接平面の方程式は

$$\begin{aligned} z &= f(1,1) + \nabla f(1,1)\cdot(x-1, y-1) \\ &= 1 + 3(x-1) + 4(y-1) = 3x + 4y - 6 \end{aligned}$$

点 $(1,1)$ に対応する点を通る法線の方程式は

$$(x,y,z) - (1,1,1) = t(3,4,-1)$$

または,

$$t = \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-1}$$

(b)

$f_x(x,y) = 3x^2y + 2xy^4, f_y(x,y) = x^3 + 4x^2y^3$ より

$$\begin{aligned} df(x,y) &= (3x^2y + 2xy^4)dx + (x^3 + 4x^2y^3)dy \\ \nabla f(x,y) &= (3x^2y + 2xy^4, x^3 + 4x^2y^3) \end{aligned}$$

点 $(1,1)$ に対応する点を通る接平面の方程式は

$$\begin{aligned} z &= f(1,1) + \nabla f(1,1) \cdot (x-1, y-1) \\ &= 2 + (5,5) \cdot (x-1, y-1) = 2 + 5x - 5 + 5y - 5 \\ &= 5x + 5y - 8 \end{aligned}$$

点 $(1,1)$ に対応する点を通る法線の方程式は

$$(x,y,z) - (1,1,2) = t(5,5,-1)$$

または,

$$t = \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{-1}$$

(c)

$z_x = 2xye^{2x} + 2x^2ye^{2x}, z_y = x^2e^{2x}$ より

$$\begin{aligned} dz &= (2xye^{2x} + 2x^2ye^{2x})dx + x^2e^{2x}dy \\ \nabla f(x,y) &= (2xye^{2x} + 2x^2ye^{2x}, x^2e^{2x}) \end{aligned}$$

点 $(1,1)$ に対応する点を通る接平面の方程式は

$$\begin{aligned} z &= e^2 + (2e^2 + 2e^2, e^2) \cdot (x-1, y-1) \\ &= e^2 + 4e^2(x-1) + e^2(y-1) \end{aligned}$$

点 $(1,1)$ に対応する点を通る法線の方程式は

$$(x,y,z) - (1,1,e^2) = t(4e^2, e^2, -1)$$

または,

$$t = \frac{x-1}{4e^2} = \frac{y-1}{e^2} = \frac{z-e^2}{-1}$$

(d)

$z_x = -y\sin xy, z_y = -x\sin xy$ より

$$\begin{aligned} dz &= -y\sin xydx - x\sin xydy \\ \nabla z &= (-y\sin xy, -x\sin xy) \end{aligned}$$

点 $(1,1)$ に対応する点を通る接平面の方程式は

$$\begin{aligned} z &= \cos 1 + (-\sin 1, -\sin 1) \cdot (x-1, y-1) \\ &= \cos 1 - (x-1)\sin 1 - (y-1)\sin 1 \end{aligned}$$

点 $(1,1)$ に対応する点を通る法線の方程式は

$$(x,y,z)-(1,1,\cos 1)=(-\sin 1,-\sin 1,-1)t$$

または,

$$t=\frac{x-1}{-\sin 1}=\frac{y-1}{-\sin 1}=\frac{z-\cos 1}{-1}$$

2.

(a) $f(x,y)=\sqrt{x}\sqrt[4]{y}$ を考えると $f(121,16)=\sqrt{121}\sqrt[4]{16}=22$. 求める値は $f(125,17)=f(121+4,16+1)$. ここで, $\Delta x=4,\Delta y=1$ とおくと

$$\begin{aligned} f(121+4,16+1)&=f(121,16)+\Delta f(121,16)\\ &\approx f(121,16)+df(121,16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df&=f_x dx+f_y dy\\ &=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}dx+\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}dy \end{aligned}$$

$\Delta x=dx,\ \Delta y=dy$ より

$$df(121,16)=\frac{4}{11}+\frac{11}{32}\approx 0.7$$

したがって, $f(125,17)\approx 22.7$

(b) $f(x,y)=\sin x\cos y$ を考えると $f(\pi,\frac{\pi}{3})=\sin\pi\cos\frac{\pi}{3}=0$. 求める値は $f(\frac{6\pi}{7},\frac{\pi}{3})=f(\pi-\frac{\pi}{7},\frac{\pi}{3})$. ここで, $\Delta x=-\frac{\pi}{7},\Delta y=0$ とおくと

$$\begin{aligned} f(\frac{6\pi}{7},\frac{\pi}{3})&=f(\pi,\frac{\pi}{3})+\Delta f(\pi,\frac{\pi}{3})\\ &\approx f(\pi,\frac{\pi}{3})+df(\pi,\frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df&=f_x dx+f_y dy\\ &=\cos x\cos y dx-\sin x\sin y dy \end{aligned}$$

$\Delta x=dx,\ \Delta y=dy$ より

$$df(\pi,\frac{\pi}{3})=\cos\pi\cos\frac{\pi}{3}dx-\sin\pi\sin\frac{\pi}{3}dy=\frac{\pi}{14}\approx 0.22$$

したがって, $f(\frac{6\pi}{7},\frac{\pi}{3})\approx 0.22$

6.5 解答

1. 方向微分は

$$f'_{\hat{u}}(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot\hat{u}$$

で与えられる. ここで, $\hat{u}$ は u 方向の単位ベクトルを表わす.

(a) 単位方向ベクトル $\hat{u}$ を求めると

$$\hat{u} = \frac{(1, \sqrt{3})}{\|(1, \sqrt{3})\|} = \frac{(1, \sqrt{3})}{\sqrt{1+3}} = \frac{(1, \sqrt{3})}{2}$$

$$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = (2x + 1, 1)$$

よって，点 $(0, 0)$ における方向微分は

$$f'_{\hat{u}}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \hat{u} = (1, 1) \cdot \frac{(1, \sqrt{3})}{2} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$$

(b)

単位方向ベクトル $\hat{u}$ を求めると

$$\hat{u} = \frac{(1, \sqrt{3})}{\|(1, \sqrt{3})\|} = \frac{(1, \sqrt{3})}{\sqrt{1+3}} = \frac{(1, \sqrt{3})}{2}$$

$$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = (-\sin x, \cos y)$$

よって，点 $(0, 0)$ における方向微分は

$$f'_{\hat{u}}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \hat{u} = (0, 1) \cdot \frac{(1, \sqrt{3})}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.

(a) $\frac{2\pi}{3}$ 方向とは，x 軸から $\frac{2\pi}{3}$ の方向のことである．そこで，単位方向ベクトル $\hat{u}$ を求めると

$$\hat{u} = (\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = (\frac{x^2y - 2xy^2}{(x-y)^2}, \frac{x^3}{(x-y)^2})$$

よって，点 $(1, -1)$ における方向微分は

$$f'_{\hat{u}}(1, -1) = \nabla f(1, -1) \cdot \hat{u} = (-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \cdot (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3 + \sqrt{3}}{8}$$

(b) $\frac{2\pi}{3}$ 方向とは，x 軸から $\frac{2\pi}{3}$ の方向のことである．そこで，単位方向ベクトル $\hat{u}$ を求めると

$$\hat{u} = (\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = (\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2})$$

よって，点 $(1, -1)$ における方向微分は

$$f'_{\hat{u}}(1, -1) = \nabla f(1, -1) \cdot \hat{u} = (1, -1) \cdot (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$$

3.

(a) 単位方向ベクトル $\hat{u}$ を求めると

$$\hat{u} = \frac{(-1,3)}{\|(-1,3)\|} = \frac{(-1,3)}{\sqrt{1+9}} = \frac{(-1,3)}{\sqrt{10}}$$

$$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (\log y, \frac{x+1}{y})$$

よって，点 $(0,1)$ における方向微分は

$$f'_{\hat{u}}(0,1) = \nabla f(0,1)\cdot\hat{u} = (0,1)\cdot\frac{(-1,3)}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

方向微分が最大になるのは，方向が ∇f と同じ方向のときなので，

$$\hat{u} = (0,1)$$

(b) 単位方向ベクトル $\hat{u}$ を求めると

$$\hat{u} = \frac{(-1,3)}{\|(-1,3)\|} = \frac{(-1,3)}{\sqrt{1+9}} = \frac{(-1,3)}{\sqrt{10}}$$

$$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (y^2e^{xy} + (x-1)y^3e^{xy}, 2(x-1)ye^{xy} + x(x-1)y^2e^{xy})$$

よって，点 $(0,1)$ における方向微分は

$$f'_{\hat{u}}(0,1) = \nabla f(0,1)\cdot\hat{u} = (0,-2)\cdot(\frac{(-1,3)}{\sqrt{10}} = \frac{-6}{\sqrt{10}}$$

方向微分が最大になるのは，方向が ∇f と同じ方向のときなので，

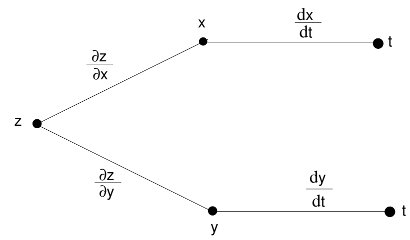
$$\hat{u} = \frac{(0,-2)}{\|(0,-2)\|} = (0,-1)$$

6.6 解答

6.6

1.

(a)



より

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{2x}{x^2+y^2}(1-\frac{1}{t^2}) + \frac{2y}{x^2+y^2}(2t-1)\end{aligned}$$

(b)

$x = t^2,\ y = e^t$ とおくと $z = f(x,y)$.

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= z_x(2t) + z_y(e^t)\end{aligned}$$

(c)

$x = 2t,\ y = 4t^2$ とおくと $z = f(x,y)$.

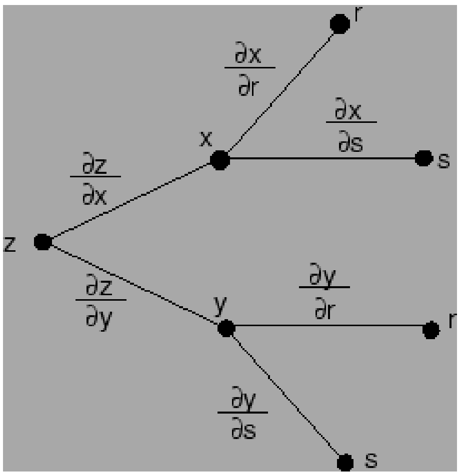
$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= z_x(2) + z_y(8t)\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= 2x(-\sin t) - 4y(\cos t)\end{aligned}$$

2.

(a)



より

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}(-\frac{y}{x^2})(3r^2-3s^2) + \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(\frac{1}{x})(6rs)\\ &= \frac{-y}{x^2+y^2}(3r^2-3s^2) + \frac{x}{x^2+y^2}(6rs)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2})(-6rs) + \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(\frac{1}{x})(3r^2-3s^2)\\ &= \frac{-y}{x^2+y^2}(6rs) + \frac{x}{x^2+y^2}(3r^2-3s^2)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= \frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{y}{x}}(2(r-1)) + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{y}{x}}(2(r+1))\\ &= \frac{-2(r-1)}{x} + \frac{2(r+1)}{y}\\ &= \frac{-2(r-1)}{(r-1)^2+s^2} + \frac{2(r+1)}{(r+1)^2+s^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= \frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{y}{x}}(2s) + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{y}{x}}(2s)\\ &= \frac{-2s}{x} + \frac{2s}{y}\\ &= \frac{-2s}{(r-1)^2+s^2} + \frac{2s}{(r+1)^2+s^2}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= z_x\cos\theta + z_y\sin\theta\\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\\ &= z_x(-r\sin\theta) + z_y(r\cos\theta)\\ &= r(-z_x\sin\theta + z_y\cos\theta)\end{aligned}$$

6.7 解答

6.7

1.

(a) $f(x,y)=2x^2+y^2-xy-7y$ より $f_x=4x-y, f_y=2y-x-7$. $f(x,y)$ が (x_0,y_0) で極値をとるならば

$$f_x(x_0,y_0)=4x_0-y_0=0, f_y(x_0,y_0)=2y_0-x_0-7=0$$

これを x_0,y_0 について解くと $x_0=1$, $y_0=4$. 次に $f_{xx}(x,y)=4, f_{xy}(x,y)=-1, f_{yy}(x,y)=2$, $\Delta=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=8-1=7>0$ より $\Delta>0, A=f_{xx}(1,4)=4>0$ となるので $f(1,4)=2+16-4-28=-14$ は極小値.

(b)

$f(x,y)=\frac{x}{y^2}+xy$ より $f_x=\frac{1}{y^2}+y, f_y=-\frac{2x}{y^2}+x$. $f(x,y)$ が (x_0,y_0) で極値をとるならば

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{1}{y_0^2}+y_0=0, f_y(x_0,y_0)=-\frac{2x_0}{y_0^3}+x_0=0$$

これを x_0,y_0 について解く. $\frac{1}{y_0^2}+y_0=0$ より $\frac{1+y_0^3}{y_0^2}=0$. よって $y_0=-1$. また, $-\frac{2x_0}{y_0^3}+x_0=x_0(\frac{-2}{y_0^3}+1)=0$ より $x_0=0$.

次に $f_{xx}(x,y)=0, f_{xy}(x,y)=-\frac{2}{y^3}+1, f_{yy}(x,y)=\frac{6x}{y^4}$. $(0,1)$ では

$$\Delta=f_{xx}(0,1)f_{yy}(0,1)-(f_{xy}(0,1))^2=-9<0$$

したがって, 極値なし.

(c)

$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ より $f_x=3x_0^2-3y_0, f_y=-\frac{2x}{y^2}+x$. $f(x,y)$ が (x_0,y_0) で極値をとるならば

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{1}{y_0^2}+y_0=0 \tag{10.1}$$

$$f_y(x_0,y_0)=3y_0^2-3x_0=0 \tag{10.2}$$

これを x_0,y_0 について解く. 式 (10.1) より $y_0=x_0^2$ を式 (10.2) に代入すると,

$$3x_0^4-3x_0=3x_0(x_0^3-1)=0$$

よって, $x_0=0,1$. したがって, $(x_0=0,y_0=0),(x_0=1,y_0=1)$. 次に $f_{xx}(x,y)=6x, f_{xy}(x,y)=-3, f_{yy}(x,y)=6y$. $(0,0)$ では

$$\Delta=f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)-(f_{xy}(0,0))^2=-9<0$$

したがって，$f(0,0)$ は極値でない．$(1,1)$ では

$$\Delta = f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1) - (f_{xy}(1,1))^2 = 6\cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0, A = f_{xx}(1,1) = 6 > 0$$

したがって，$f(1,1) = 1+1-3 = -1$ は極小値．

(d)

$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$ より

$$f_x = 2(x^2+y^2)(2x) - 4x = 4x(x^2+y^2-1)$$
$$f_y = 4y(x^2+y^2) + 4y = 4y(x^2+y^2+1)$$

$f(x,y)$ が (x_0, y_0) で極値をとるならば

$$f_x(x_0,y_0) = 4x_0(x_0^2+y_0^2-1) = 0 \qquad (10.3)$$
$$f_y(x_0,y_0) = 4y_0(x_0^2+y_0^2+1) = 0 \qquad (10.4)$$

これを x_0, y_0 について解く．式 (10.4) より $y_0 = 0$ となり，これを式 (10.3) に代入すると，

$$4x_0(x_0^2-1) = 0$$

よって，$x_0 = 0, \pm 1$．したがって，$(x_0 = 0, y_0 = 0), (x_0 = 1, y_0 = 0), (x_0 = -1, y_0 = 0)$．次に

$$f_{xx}(x,y) = 4(x^2+y^2-1) + 8x^2 = 4(3x^2+y^2-1)$$
$$f_{xy}(x,y) = 8xy$$
$$f_{yy}(x,y) = 4(x^2+y^2+1) + 8y^2 = 4(x^2+3y^2+1)$$

$(0,0)$ では

$$\Delta = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2 = (-4)(4) - 0 = -16 < 0$$

したがって，$f(0,0)$ は極値でない．$(1,0)$ では

$$\Delta = f_{xx}(1,0)f_{yy}(1,0) - (f_{xy}(1,0))^2 = 8\cdot 8 - 0 = 64 > 0, A = f_{xx}(1,0) = 8 > 0$$

したがって，$f(1,0) = -1$ は極小値．$(-1,0)$ では

$$\Delta = f_{xx}(-1,0)f_{yy}(-1,0) - (f_{xy}(-1,0))^2 = 8\cdot 8 - 0 = 64 > 0, A = f_{xx}(-1,0) = 8 > 0$$

したがって，$f(-1,0) = -1$ は極小値．

2. 2 変数関数の Taylor の定理

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0) + \cdots$$

(a) Taylor の定理で $x_0 = 0, y_0 = 0, h = x, k = y$ とおくと

$$f(x,y) = f(0,0) + (x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})f(0,0) + \frac{1}{2!}(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(0,0) + \cdots$$

$$f_x = e^x \cos y, f_y = -e^x \sin y$$

$$f_{xx} = e^x \cos y, f_{xy} = -e^x \sin y, f_{yy} = -e^x \cos y$$

よって

$$f_x(0,0) = 1, f_y(0,0) = 0, f_{xx}(0,0) = 1, f_{xy}(0,0) = 0, f_{yy}(0,0) = -1$$

したがって,

$$f(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

(b) Taylor の定理で $x_0 = 2, y_0 = 1, x = x_0 + h, y = k_0 + k$ とおくと

$$f(x,y) = f(2,1) + (x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})f(2,1) + \frac{1}{2!}(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(2,1) + \cdots$$

$$f_x = \frac{1}{x+y^2}, f_y = \frac{2y}{x+y^2}$$

$$f_{xx} = \frac{-1}{(x+y^2)^2}, f_{xy} = -\frac{-2y}{(x+y^2)^2}, f_{yy} = \frac{2(x+y^2) - 4y^2}{(x+y^2)^2}$$

よって

$$f_x(2,1) = \frac{1}{3}, f_y(2,1) = \frac{2}{3}, f_{xx}(2,1) = \frac{-1}{9}, f_{xy}(2,1) = \frac{-2}{9}, f_{yy}(2,1) = \frac{2}{9}$$

したがって,

$$f(x,y) = \log 3 + \frac{1}{3}(x-2) + \frac{2}{3}(y-1) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{9}(x-2)^2 - \frac{4}{9}(x-2)(y-1) + \frac{2}{9}(y-1)^2$$

6.8 解答

6.8

1.

(a) $f(x,y) = 2x^2 + 5xy - 3y^2 - 1 = 0$ とおき，$f(x,y)$ の全微分を求めると,

$$df = f_x dx + f_y dy = (4x+5y)dx + (5x-6y)dy = 0$$

これより,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+5y}{5x-6y}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{(4+5\frac{dy}{dx})(5x-6y) - (4x+5y)(5-6\frac{dy}{dx})}{(5x-6y)^2} \\ &= -\frac{4(5x-6y)^2 - 10(4x+5y)(5x-6y) - 6(4x+5y)^2}{(5x-6y)^3}\end{aligned}$$

(b)

$f(x,y) = y - e^{x+y} = 0$ とおき，$f(x,y)$ の全微分を求めると，

$$df = f_x dx + f_y dy = -e^{x+y}dx + (1 - e^{x+y})dy = 0$$

これより，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{x+y}}{1 - e^{x+y}}.$$

次に，$\frac{d^2y}{dx^2}$ を求める．ここでは，

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{xx}f_y^2}{f_y^3}$$

を用いる．

$$f_{xx} = -e^{x+y}, f_{xy} = -e^{x+y}, f_{yy} = -e^{x+y}$$

より

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{-e^{x+y}(1 - e^{x+y})^2 + 2e^{x+y}(-e^{x+y})(1 - e^{x+y}) - e^{x+y}e^{2(x+y)}}{(1 - e^{x+y})^3} \\
&= -\frac{-e^{x+y} + 2e^{2(x+y)} - e^{3(x+y)} - 2e^{2(x+y)} + 2e^{3(x+y)} - e^{3(x+y)}}{(1 - e^{x+y})^3} \\
&= \frac{e^{x+y}}{(1 - e^{x+y})^3}
\end{aligned}$$

(c)

$f(x,y) = x^2 - y^2 - xy = 0$ とおき，$f(x,y)$ の全微分を求めると，

$$df = f_x dx + f_y dy = (2x - y)dx + (-2y - x)dy = 0$$

これより，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{2y + x}.$$

次に，$\frac{d^2y}{dx^2}$ を求める．ここでは，

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{xx}f_y^2}{f_y^3}$$

を用いる．

$$f_{xx} = 2, f_{xy} = -1, f_{yy} = -2$$

より

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{2(-2y - x)^2 + 2(2x - y)(-2y - x) - 2(2x - y)^2}{(-2y - x)^3} \\
&= \frac{2(x + 2y)^2 - 2(2x - y)(x + 2y) - 2(2x - y)^2}{(x + 2y)^3}
\end{aligned}$$

(d)
$f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} - \tan^{-1}\frac{y}{x} = 0$ とおき，$f(x,y)$ の全微分 df を求める．

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+y^2}) - \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2} \\ f_y &= \frac{1}{2}(\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} \\ &= \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y-x}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

より

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{x+y}{y-x} = \frac{x+y}{x-y}$$

次に，$\frac{d^2y}{dx^2}$ を求める．ここでは，直接求める．

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{(1+\frac{dy}{dx})(x-y) - (x+y)(1-\frac{dy}{dx})}{(x-y)^2} \\ &= \frac{(x-y+x+y)(x-y) - (x-y)(x-y-x-y)}{(x-y)^3} \\ &= \frac{2x^2-2xy+2xy+2y^2}{(x-y)^3} \\ &= \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3} \end{aligned}$$

2.

(a) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4 = 0, g(x,y) = x^2+y^2-4x = 0$ とおき全微分を求めると，

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \tag{10.5}$$
$$dg = g_x dx + g_y dy = (2x-4)dx + 2ydy = 0 \tag{10.6}$$

式 (10.6) より，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4-2x}{2y} = \frac{2-x}{y}$$

また，式 (10.5) と式 (10.6) より dy の項を消去すると

$$4dx + 2zdz = 0$$

よって

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2}{z}.$$

(b) $f(x,y,z) = xyz - 1 = 0, g(x,y,z) = xy + yz + zx - 1 = 0$ とおき全微分を求めると，

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = yzdx + xzdy + xydz = 0 \tag{10.7}$$
$$dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz = (y+z)dx + (x+z)dy + (y+x)dz = 0 \tag{10.8}$$

ここで，式 (10.7) と式 (10.8) より dz の項を消去すると

$$((y+x)yz - xy(y+z))dx + ((y+x)xz - xy(x+z))dy = 0$$

よって

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2z - xy^2}{x^2z - x^2y} = \frac{y^2(x-z)}{x^2(z-y)}.$$

また，式 (10.7) と式 (10.8) より dy の項を消去すると

$$((x+z)yz - xz(y+z))dx + ((x+z)xy - xz(y+x))dz = 0$$

$$z^2(y-x)dx + x^2(y-z)dz = 0$$

よって

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2(x-y)}{x^2(y-z)}.$$

3.

$2x^2 + 5y^2 = 12$ より $\frac{dy}{dx}$ を求めると，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{4x}{10y} = -\frac{2x}{5y}$$

これより，接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}\,|_{(1,\sqrt{2})} = -\frac{2}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{5}$$

よって，点 $(1,\sqrt{2})$ を通る接線の方程式は

$$y - \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{5}(x-1).$$

また，法線は接線と垂直なので，その傾きは $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$．よって点 $(1,\sqrt{2})$ を通る法線の方程式は

$$y - \sqrt{2} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}(x-1).$$

4.

$f(x,y,z) = \tan^{-1}\frac{y}{x} - z = 0$ とおくと

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\frac{-y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}, \frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}, -1\right) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, -1\right)$$

よって

$$\nabla f(1,1,\frac{\pi}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$$

ここで，∇f は曲面 $f(x,y,z)=0$ に直交するので，接平面 Γ 上に任意の点 (x,y,z) を取ると，ベクトル $(x-1, y-1, z-\frac{\pi}{2})$ と $\nabla f(1,1,\frac{\pi}{2})$ は直交する．よって，接平面の方程式は

$$(x-1, y-1, z-\frac{\pi}{2})\cdot(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) = 0$$

又は,

$$-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)-(z-\frac{\pi}{2})=0$$

法線は ∇f と同方向にあるので，法線上に任意の点 (x,y,z) を取ると,

$$(x-1,y-1,z-\frac{\pi}{2})=t(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)$$

又は,

$$t=\frac{x-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{\frac{1}{2}}=\frac{z-\frac{\pi}{2}}{-1}$$

5.

(a) まず，$f(x,y)=0, f_x(x,y)=0$ を満たす (x,y) を求めます.

$$f(x,y)=8x^2+4xy+5y^2-36=0,\ f_x(x,y)=16x+4y=0$$

より $y=-4x$. これを $f(x,y)=0$ に代入すると $8x^2-16x^2+80x^2-36=36(2x^2-1)=0$. よって，$(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}},-2\sqrt{2}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},2\sqrt{2})$. 次に

$$f_{xx}=16,\ f_y=4x+10y$$

より $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を計算すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{(\frac{1}{\sqrt{2}},-2\sqrt{2})}=-\frac{f_{xx}(\frac{1}{\sqrt{2}},-2\sqrt{2})}{f_y(\frac{1}{\sqrt{2}},-2\sqrt{2})}=-\frac{16}{-18\sqrt{2}}>0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{(-\frac{1}{\sqrt{2}},2\sqrt{2})}=-\frac{f_{xx}(-\frac{1}{\sqrt{2}},2\sqrt{2})}{f_y(-\frac{1}{\sqrt{2}},2\sqrt{2})}=-\frac{16}{18\sqrt{2}}<0$$

したがって，$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときの $y=-2\sqrt{2}$ は極小値，$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときの $y=2\sqrt{2}$ は極大値.

(b) まず，$f(x,y)=0, f_x(x,y)=0$ を満たす (x,y) を求めます.

$$f(x,y)=x^2y+x+y=0,\ f_x(x,y)=2xy+1=0$$

より $y=-\frac{1}{2x}$. これを $f(x,y)=0$ に代入すると $x^2(-\frac{1}{2x})+x-\frac{1}{2x}=\frac{-x^2+2x^2-1}{2x}=\frac{x^2-1}{2x}=0$. よって，$(x,y)=(1,-\frac{1}{2}),(-1,\frac{1}{2})$. 次に

$$f_{xx}=2y,\ f_y=x^2+1$$

より $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を計算すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{(1,-\frac{1}{2})}=-\frac{f_{xx}(1,-\frac{1}{2})}{f_y(1,-\frac{1}{2})}=-\frac{-1}{2}>0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{(-1,\frac{1}{2})}=-\frac{f_{xx}(-1,\frac{1}{2})}{f_y(-1,\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}<0$$

したがって， $x=1$ のときの $y=-\frac{1}{2}$ は極小値， $x=-1$ のときの $y=\frac{1}{2}$ は極大値.

(c) まず， $f(x,y)=0, f_x(x,y)=0$ を満たす (x,y) を求めます.

$$f(x,y)=x^3+y^3-6xy=0,\ f_x(x,y)=3x^2-6y=0$$

より $y=\frac{x^2}{2}$. これを $f(x,y)=0$ に代入すると $x^3+\frac{x^6}{8}-3x^3=\frac{x^3(x^3-16)}{8}=0$. よって， $(x,y)=(0,0),(2^{4/3},2^{5/3})$. 次に

$$f_{xx}=6x,\ f_y=3x^2-6x$$

より $(0,0)$ で $f_y=0$ となるので，$(0,0)$ では極値はとらない. $(2^{4/3},2^{5/3})$ で $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を計算すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}\mid_{(2^{4/3},2^{5/3})}=-\frac{f_{xx}(2^{4/3},2^{5/3})}{f_y(2^{4/3},2^{5/3})}=-\frac{6\cdot 2^{4/3}}{6\cdot 2^{2/3}-6\cdot 2^{5/3}}>0$$

したがって， $x=2^{4/3}$ のときの $y=2^{5/3}$ は極小値

6.9 解答

6.9

1. $f(x,y)=0$ より定まる陰関数 $y=g(x)$ が $x=x_0$ で極値 $y_0=g(x_0)$ をとるならば,

$$f(x_0,y_0)=0, f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)\neq 0$$

さらに

$$\frac{d^2y}{dx^2}\mid_{(x_0,y_0)}=-\frac{f_{xx}(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}>0 \text{ ならば } y_0=g(x_0) \text{ 極小値である.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\mid_{(x_0,y_0)}=-\frac{f_{xx}(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}<0 \text{ ならば } y_0=g(x_0) \text{ 極大値である.}$$

(a) まず，$f(x,y)=0, f_x(x,y)=0$ を満たす (x,y) を求める.

$$f(x,y)=8x^2+4xy+5y^2-36=0, f_x(x,y)=16x+4y=0$$

より $(\frac{\sqrt{2}}{2},-2\sqrt{2}),(-\frac{\sqrt{2}}{2},2\sqrt{2})$. 次に,

$$f_{xx}=16,\ f_y=4x+10y$$

より $\frac{d^2y}{dx^2}$ を計算すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}\mid_{(\frac{\sqrt{2}}{2},-2\sqrt{2})}=-\frac{16}{2\sqrt{2}-20\sqrt{2}}>0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\mid_{(-\frac{\sqrt{2}}{2},2\sqrt{2})}=-\frac{16}{-2\sqrt{2}+20\sqrt{2}}<0$$

よって $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $y=-2\sqrt{2}$ は極小値，$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $y=2\sqrt{2}$ は極大値.

(b)

まず，$f(x,y)=0, f_x(x,y)=0$ を満たす (x,y) を求める．

$$f(x,y)=x^2y+x+y=0, f_x(x,y)=2xy+1=0$$

より $y=-\frac{1}{2x}$．これを $f(x,y)=0$ に代入すると

$$x^2(-\frac{1}{2x})+x-\frac{1}{2x}=\frac{x^2-1}{2x}=0$$

よって $(1,-\frac{1}{2}),(-1,\frac{1}{2})$．次に，

$$f_{xx}=2y,\ f_y=2x$$

より $\frac{d^2y}{dx^2}$ を計算すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}\mid_{(1,-\frac{1}{2})}=-\frac{-1}{2}>0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\mid_{(-1,\frac{1}{2})}=-\frac{1}{-2}>0$$

よって $x=1$ のとき $y=-\frac{1}{2}$ は極小値，$x=-1$ のとき $y=\frac{1}{2}$ も極小値.

(c)

まず，$f(x,y)=0, f_x(x,y)=0$ を満たす (x,y) を求める．

$$f(x,y)=x^3+y^3-6xy=0, f_x(x,y)=3x^2-6y=0$$

より $y=\frac{x^2}{2}$．これを $f(x,y)=0$ に代入すると

$$x^3+\frac{x^6}{8}-3x^3=\frac{x^3}{8}(x^3-16)=0$$

よって $(0,0),(2\sqrt[3]{2},2\cdot 2^{\frac{2}{3}})$．次に，

$$f_{xx}=6x,\ f_y=-6$$

より $\frac{d^2y}{dx^2}$ を計算すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}\mid_{(0,0)}=-\frac{0}{-6}=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\mid_{(2\sqrt[3]{2},2\cdot 2^{\frac{2}{3}})}=-\frac{6\cdot 2\sqrt[3]{2}}{-6}>0$$

よって $x=2\sqrt[3]{2}$ のとき $y=2\cdot 2^{\frac{2}{3}}$ は極小値.

2. $g_x(x_0,y_0)$ と $g_y(x_0,y_0)$ の少なくとも一方は 0 でないとする．条件 $g(x,y)=0$ の元で，$f(x,y)$ が (x_0,y_0) で極値をとるための必要条件は

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

とおいて，(x_0, y_0) で

$$F_\lambda(x,y) = 0, F_x(x,y) = 0, F_y(x,y) = 0$$

が成り立つことである．ここで，$g(x,y) = 0, g_x(x,y) = g_y(x,y) = 0$ の点を特異点という．

(a) $F(x,y,\lambda) = xy^3 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ とおくと

$$F_\lambda = 0 \text{ より } x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{10.9}$$
$$F_x = 0 \text{ より } y^3 - 2x\lambda = 0 \tag{10.10}$$
$$F_y = 0 \text{ より } 3xy^2 - 2y\lambda = 0 \tag{10.11}$$

$y = 0$ のとき式 (10.9) より，$x = \pm 1$，式 (10.10) より $\lambda = 0$．$y \neq 0$ のとき，式 (10.11) より $2\lambda = 3xy$．式 (10.10) に代入して，$y^3 - x(3xy) = y(y^2 - 3x^2) = 0$ より $y^2 = 3x^2$．式 (10.9) に代入して $x^2 + 3x^2 - 1 = 0$ より $x = \pm\frac{1}{2}$．よって，$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$．したがって，式 (10.9),(10.10),(10.11) の解は,

$$(x,y) = (1,0), (-1,0), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

このとき，xy^3 の値は,

$$0, 0, \frac{3\sqrt{3}}{16}, -\frac{3\sqrt{3}}{16}, -\frac{3\sqrt{3}}{16}, \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

一方，$g(x,y) = 0$ は有界閉集合で，この上で f は連続だから最大値，最小値を持つ．以上より，最大値は

$$f(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = f(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{16},$$

最小値は

$$f(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = f(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

(b) $F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^3 + y^3 - 6xy)$ とおくと

$$F_\lambda = 0 \text{ より } x^3 + y^3 - 6xy = 0 \tag{10.12}$$
$$F_x = 0 \text{ より } 2x - \lambda(3x^2 - 6y) = 0 \tag{10.13}$$
$$F_y = 0 \text{ より } 2y - \lambda(3y^2 - 6x) = 0 \tag{10.14}$$

式 (10.12),(10.13) より

$$\lambda = \frac{2x}{3x^2 - 6y} = \frac{2y}{3y^2 - 6x}$$
$$6xy^2 - 12x^2 = 6x^2y - 12y^2$$
$$(x - y)(xy + 2(x + y)) = 0$$

よって，$x = y$，または，$y = -\frac{2x}{x+2}$．$F_\lambda = 0$ より $x^3 + x^3 - 6x^2 = 2x^2(x - 3) = 0$．したがって，$(x = 0, y = 0), (x = 3, y = 3)$．一方，$g(x,y) = 0$ の第 1 象限の部分に原点をつけ加えたものは有界閉曲線で，$f(x,y)$ はその上で連続だから最大値，最小値を持つ．以上より，最大値は

$$f(3,3) = 18.$$

又，$(x,y)\neq(0,0)$ なら $f(x,y)>0$ であるから，$f(0,0)=0$ が極小値かつ最小値である．

(c) $F(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x^2-xy+y^2-1)$ とおくと

$$F_\lambda=0 \text{ より } x^2-xy+y^2-1=0 \tag{10.15}$$
$$F_x=0 \text{ より } y-\lambda(2x-y)=0 \tag{10.16}$$
$$F_y=0 \text{ より } x-\lambda(2y-x)=0 \tag{10.17}$$

式 (10.16),(10.17) より

$$\lambda=\frac{y}{2x-y}=\frac{x}{2y-x}$$
$$2y^2-xy=2x^2-xy$$
$$x^2=y^2$$

よって，$x=\pm y$．$x=y$ のとき $F_\lambda=0$ より $x^2-x^2+x^2-1=x^2-1=0$．したがって，$(x=1,y=1),(x=-1,y=-1)$．$x=-y$ のとき $x^2+x^2+x^2-1=3x^2-1=0$．したがって，$(x=\frac{\sqrt{3}}{3},y=-\frac{\sqrt{3}}{3}),(x=-\frac{sqrt3}{3},y=\frac{\sqrt{3}}{3})$．このとき，$f(x,y)=xy$ の値は,

$$1,1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}$$

一方，$g(x,y)=0$ は有界閉集合で，この上で f は連続だから最大値，最小値を持つ．以上より，最大値は

$$f(1,1)=f(-1,-1)=1,$$

最小値は

$$f(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})=f(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{1}{3}.$$

3. $g(x,y)=2x+3y-12=0$ とおくと $F(x,y,\lambda)=xy-\lambda(2x+3y-12)$.

$$F_\lambda=0 \text{ より } 2x+3y-12=0 \tag{10.18}$$
$$F_x=0 \text{ より } y-2\lambda=0 \tag{10.19}$$
$$F_y=0 \text{ より } x-3\lambda=0 \tag{10.20}$$

式 (10.19),(10.20) より $y=2\lambda,x=3\lambda$．これを式 (10.18) に代入すると

$$6\lambda+6\lambda-12=12\lambda-12=0$$

よって，$\lambda=1$ より $(x=3,y=2)$．一方，$g(x,y)=0$ は有界閉集合で，この上で f は連続だから最大値を持つ．以上より，最大値は

$$f(3,2)=6.$$

4.

$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ とおくと $F(x,y,z,\lambda)=x^2+2y^2+3z^2-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$.

$$F_\lambda=0 \text{ より } x^2+y^2+z^2-1=0 \tag{10.21}$$
$$F_x=0 \text{ より } 2x-2x\lambda=0 \tag{10.22}$$
$$F_y=0 \text{ より } 4y-2y\lambda=0 \tag{10.23}$$
$$F_z=0 \text{ より } 6z-2z\lambda=0 \tag{10.24}$$

式 (10.22),(10.23),(10.24) より $2x(1-\lambda)=0$, $2y(2-\lambda)=0$, $2z(3-\lambda)=0$. ここで，$x\neq 0$ とすると，$\lambda=1$ より $y=z=0$. これを式 (10.21) に代入すると

$$x^2-1=0 \text{ より } x=\pm 1$$

よって，$(1,0,0),(-1,0,0)$. $y\neq 0$ とすると，$\lambda=2$ より $x=z=0$. これを式 (10.21) に代入すると

$$y^2-1=0 \text{ より } y=\pm 1$$

よって，$(0,1,0),(0,-1,0)$. $z\neq 0$ とすると，$\lambda=3$ より $x=y=0$. これを式 (10.21) に代入すると

$$z^2-1=0 \text{ より } z=\pm 1$$

よって，$(0,0,1),(0,0,-1)$. これより式 (10.21) の値を求めると

$$f(1,0,0)=f(-1,0,0)=1, f(0,1,0)=f(0,-1,0)=2, f(0,0,1)=f(0,0,-1)=3$$

一方，$g(x,y,z)=0$ は有界閉集合で，この上で f は連続だから最大値，最小値を持つ．以上より，最大値は

$$f(0,0,1)=f(0,0,-1)=3.$$

また，最小値は

$$f(1,0,0)=f(-1,0,0)=1.$$

7. 重積分法 (MULTIPLE INTEGRATION)

7.2 解答

7.2

1. 積分の領域を，V-simple または H-simple で表わす.

(a)

$$\Omega=\{(x,y):-1\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 3\}$$

より V-simple を用いると

$$\begin{aligned}\iint_\Omega x^2 dxdy &= \int_{x=-1}^{1}(\int_{y=0}^{3} x^2 dy)dx \\ &= \int_{-1}^{1}([x^2y]_{y=0}^3)dx = \int_{-1}^{1} 3x^2 dx \\ &= [x^3]_{-1}^1 = 1-(-1) = 2\end{aligned}$$

(b)

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$$

より V-simple を用いると

$$\begin{aligned}\iint_\Omega e^{x+y} dxdy &= \int_{x=0}^{1}(\int_{y=0}^{x} e^{x+y} dy)dx \\ &= \int_{0}^{1}([e^{x+y}]_{y=0}^3)dx = \int_{0}^{1} (e^{2x}-e^x)dx \\ &= [\frac{e^{2x}}{2} - e^x]_0^1 = \frac{e^2}{2} - e - (\frac{1}{2}-1) \\ &= \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(c)

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \le y \le 1, y^2 \le x \le y\}$$

より H-simple を用いると

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \sqrt{xy}dxdy &= \int_{y=0}^{1}(\int_{x=y^2}^{y} \sqrt{xy}dx)dy \\ &= \int_{0}^{1}(\sqrt{y}\int_{y^2}^{y}\sqrt{x}dx)dy = \int_0^1 \sqrt{y}([\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_{y^2}^{y})dy \\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{y}(y^{\frac{3}{2}} - y^3)dy = \frac{2}{3}\int_0^1 (y^2 - y^{\frac{7}{2}})dy \\ &= \frac{2}{3}[\frac{y^3}{3} - \frac{2}{9}y^{\frac{9}{2}}]_0^1 = \frac{2}{3}(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}) \\ &= \frac{2}{27}\end{aligned}$$

(d) $y^2 = 2x$ と $y^2 = 8-2x$ の交点を求めると，$2x = 8-2x$ より $x = 2, y = \pm 2$ となる．そこで H-simple を用いると

$$\Omega = \{(x,y) : -2 \le y \le 2, \frac{y^2}{2} \le x \le \frac{8-y^2}{2}\}$$

よって

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega (4-y^2)dxdy &= \int_{y=-2}^{2}(\int_{x=\frac{y^2}{2}}^{\frac{8-y^2}{2}}(4-y^2)dx)dy \\
&= \int_{-2}^{2}([4x-y^2x]_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{8-y^2}{2}})dy \\
&= \int_{-2}^{2}(2(8-y^2)-y^2(\frac{8-y^2}{2})-(2y^2-\frac{y^4}{2}))dy \\
&= \int_{-2}^{2}(16-2y^2-4y^2+\frac{y^4}{2}-2y^2+\frac{y^4}{2})dy \\
&= \int_{-2}^{2}(y^4-8y^2+16)dy = 2\int_0^2 (y^4-8y^2+16)dy \\
&= 2[\frac{y^5}{5}-\frac{8y^3}{3}+16y]_0^2 = 2(\frac{256}{15}) = \frac{512}{15}.
\end{aligned}
$$

2.

(a) $\int_0^1 \int_{x^4}^{x^2} f(x,y)dydx$ より

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, x^4 \le y \le x^2\}$$

は V-simple で与えられている．そこで，Ω を H-simple で表わすと

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \le y \le 1, \sqrt{y} \le x \le y^{\frac{1}{4}}\}$$

よって

$$\int_0^1 \int_{x^4}^{x^2} f(x,y)dydx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{y^{\frac{1}{4}}} f(x,y)dxdy$$

(b) $\int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)dxdy$ より

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \le y \le 1, -y \le x \le y\}$$

は H-simple で与えられている．そこで，Ω を V-simple で表わすと

$$\Omega = \{(x,y) : -1 \le x \le 0, -x \le y \le 1\} \cup \{(x,y) : 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\}$$

よって

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{0}\int_{-x}^{1} f(x,y)dydx \\
&\quad + \int_0^1 \int_x^1 f(x,y)dydx
\end{aligned}
$$

(c) $\displaystyle\int_1^4 \int_x^{2x} f(x,y)dydx$ より

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$$

は V-simple で与えられている．そこで，Ω を H-simple で表わすと

$$\Omega = \{(x,y) : 1 \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq y\} \cup \{(x,y) : 2 \leq y \leq 4, \frac{y}{2} \leq x \leq y\}$$
$$\cup \{(x,y) : 4 \leq y \leq 8, \frac{y}{2} \leq x \leq 4\}$$

よって

$$\int_1^4 \int_x^{2x} f(x,y)dydx = \int_1^2 \int_1^y f(x,y)dxdy + \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^y f(x,y)dxdy + \int_4^8 \int_{\frac{y}{2}}^4 f(x,y)dxdy$$

3.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{y/x}dxdy$ をこのまま積分できない．そこで，積分順序の交換を行なう．

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, y \ \leq x \leq 1\}$$

は H-simple で与えられている．そこで，Ω を V-simple で表わすと

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_y^1 e^{y/x}dxdy &= \int_{x=0}^1 (\int_{y=0}^x e^{y/x}dy)dx \\ &= \int_0^1 [xe^{y/x}]_0^x \ dx \\ &= \int_0^1 (xe - x)dx = [\frac{(e-1)x^2}{2}]_0^1 = \frac{e-1}{2}\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}dydx$ をこのまま積分できない．そこで，積分順序の交換を行なう．

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

は V-simple で与えられている．そこで，Ω を H-simple で表わすと

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_x^1 e^{y^2}dydx &= \int_{y=0}^1(\int_{x=0}^y e^{y^2}dx)dy\\ &= \int_0^1 [xe^{y^2}]_0^y\ dy\\ &= \int_0^1 ye^{y^2}dy = [\frac{1}{2}e^{y^2}]_0^1 = \frac{e-1}{2}\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}dx$ をこのまま積分できない．そこで，積分順序の交換を行なう．

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \le y \le 1, y \le x \le \sqrt{y}\}$$

は H-simple で与えられている．そこで，Ω を V-simple で表わすと

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}$$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}dx &= \int_{x=0}^1(\int_{y=x^2}^x\frac{\sin x}{x}dy)dx\\ &= \int_0^1[y\frac{\sin x}{x}]_{x^2}^x\ dx\\ &= \int_0^1(\sin x - x\sin x)dx \quad \left(\begin{array}{ll}\int x\sin xdx & = \int x(-\cos x)'dx\\ & = -x\cos x + \int\cos xdx\\ & = -x\cos x + \sin x + c\end{array}\right)\\ &= [-\cos x + x\cos x - \sin x]_0^1\\ &= -\cos 1 + \cos 1 - \sin 1 - (-1) = 1 - \sin 1.\end{aligned}$$

7.3 解答

7.3

1. 積分の領域が円，楕円，ひし形などの場合は，変数変換を用いる．

(a)

$$\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4\}$$

より極座標を用いると $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より $x^2 + y^2 = r^2 \le 4$．よって Ω は

$$\Gamma = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2\}$$

に移るので,

$$\begin{aligned}\iint_\Omega x^2 dxdy &= \iint_\Gamma r^2\cos^2\theta |J(r,\theta)|drd\theta \text{ (ただし}, |J(r, theta)| = r) \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\cos^2\theta drd\theta = (\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta)(\int_0^2 r^3 dr) \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta([\frac{r^4}{4}]_0^2 = \frac{1}{2}([\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}]_0^{2\pi})(4) \\ &= 2(2\pi) = 4\pi\end{aligned}$$

(b)

$$\Omega = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$

より極座標を用いると $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より $1 \le r^2 \le 4$. よって Ω は

$$\Gamma = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 1 \le r \le 2\}$$

に移るので,

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Omega \log(x^2+y^2)dxdy \\ &= \iint_\Gamma \log(r^2)|J(r,\theta)|drd\theta \text{ (ただし}, |J(r, theta)| = r) \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r\log r^2 drd\theta \text{ ここで } \left\{\begin{array}{l} \int r\log r^2 dr \\ = \int 2r\log r dr \ \left(\begin{array}{ll} u=\log r & dv = 2rdr \\ du = \frac{1}{r}dr & v = r^2\end{array}\right) \\ = r^2\log r - \int rdr \\ = r^2\log r - \frac{r^2}{2} + c \end{array}\right. \\ &= 2\pi[r^2\log r - \frac{r^2}{2}]_1^2 = 2\pi(4\log 2 - 2 + \frac{1}{2}) \\ &= 2\pi(4\log 2 - \frac{3}{2}) = 8\pi\log 2 - 3\pi\end{aligned}$$

(c)

$$\Omega = \{(x,y) : x+y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$$

より変数変換 $u = x+y, v = x-y$ を用いる.

$y = 0$ の直線は $u = x, v = x$ より $u = v$ に移り
$x = 0$ の直線は $u = y, v = -y$ より $v = -u$ に移り
$x + y = 1$ の直線は $u = x + y = 1$ に移るので

Ω は

$$\Gamma = \{(u,v) : 0 \le u \le 1, -u \le v \le u\}$$

に移る．よって，

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Omega} e^{(y-x)/(y+x)} dxdy \\
&= \iint_{\Gamma} e^{-v/u} |J(u,v)| dudv \text{ ただし,} \left\{ \begin{array}{ll} |J(u,v)| & = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| \\ & = |\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}| \\ & = |\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}| \\ & = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \end{array} \right. \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-u}^{u} e^{-v/u} dvdu \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 [-ue^{-v/u}]_{-u}^{u} du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (-ue^{-1} + ue) du \\
&= \frac{1}{2} [-\frac{u^2}{2e} + \frac{u^2 e}{2}]_0^1 \\
&= \frac{1}{4} (-\frac{1}{e} + e)
\end{aligned}$$

(d)

$$\Omega = \{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

より極座標を用いると $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より $1 < r^2 < 4$. よって Ω は

$$\Gamma = \{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 1 < r < 2\}$$

に移るので，

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Omega} e^{x^2+y^2} dxdy \\
&= \iint_{\Gamma} e^{r^2} |J(r,\theta)| drd\theta \text{ (ただし,} |J(r, theta)| = r) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 re^{r^2} drd\theta \text{ ここで} \left\{ \begin{array}{l} \int re^{r^2} dr \\ = \frac{1}{2} \int e^t dt \\ = \frac{1}{e^t} + c \\ = \frac{1}{e^{r^2}} + c \end{array} \right. \\
&= (\int_0^{2\pi} d\theta) [\frac{1}{2} e^{r^2}]_1^2 \\
&= 2\pi (\frac{1}{2}(e^4 - e)) = \pi(e^4 - e)
\end{aligned}$$

(e)

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

より極座標を用いると $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より $r^2 \leq 1$．よって Ω は

$$\Gamma = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1\}$$

に移るので,

$$\begin{aligned}
I &= \iint_\Omega \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy \\
&= \iint_\Gamma \sqrt{1 - r^2}|J(r, \theta)|drd\theta \ (\text{ただし}, |J(r, theta)| = r) \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 - r^2}rdr \ \text{ここで} \left\{ \begin{array}{l} \int \sqrt{1 - r^2}rdr \\ = -\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt \\ = -\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} \\ = -\frac{1}{3}(1 - r^2)^{\frac{3}{2}} + c \end{array} \right. \\
&= 2\pi[-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1 \\
&= 2\pi(\frac{1}{3}) = \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

(f)

$$\Omega = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

より極座標を用いると $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より $r^2 \leq 1$．また，$x = r\cos\theta \geq 0, y = r\sin\theta \geq 0$ より $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$．よって Ω は

$$\Gamma = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq 1\}$$

に移るので,

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Omega} (1 - x - 2y) dxdy \\
&= \iint_{\Gamma} (1 - r\cos\theta - 2r\sin\theta)|J(r,\theta)| drd\theta \text{ (ただし}, |J(r,\theta)| = r) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (1 - r\cos\theta - 2r\sin\theta) rdr \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r - r^2\cos\theta - 2r^2\sin\theta) drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ([\frac{r^2}{2} - \frac{r^3\cos\theta}{3} - \frac{2r^3\sin\theta}{3}]_0^1) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} - \frac{\cos\theta}{3} - \frac{2\sin\theta}{3}) d\theta \\
&= [\frac{\theta}{2} - \frac{\sin\theta}{3} + \frac{2\cos\theta}{3}]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

2.

$$\Omega = \{(x,y) : -1 \le x + y \le 1, -1 \le x - y \le 1\}$$

より変数変換 $u = x + y, v = x - y$ を用いる．

$x + y = -1$ の直線は $u = x + y$ より $u = -1$ に移り
$x + y = 1$ の直線は $u = x + y = 1$ に移り
$x - y = -1$ の直線は $v = x - y$ より $v = -1$ に移り
$x - y = 1$ の直線は $v = x - y = 1$ に移るので

Ω は

$$\Gamma = \{(u,v) : -1 \le u \le 1, -1 \le v \le 1\}$$

に移る．また，$x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$ より

$$x^2 + y^2 = (\frac{u+v}{2})^2 + (\frac{u-v}{2})^2 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

よって，

$$I = \iint_\Omega (x^2+y^2)e^{-x+y}dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_\Gamma (u^2+v^2)e^{-v}|J(u,v)|dudv \text{ ここで，}$$

$$\begin{aligned} |J(u,v)| &= |\tfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| \\ &= |\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}| \\ &= |\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}| \\ &= |-\tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}\int_{v=-1}^{1}\int_{u=-1}^{1}(u^2+v^2)e^{-v}dudv \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}[\frac{u^3}{3}e^{-v}+uv^2e^{-v}]_{-1}^{1}dv \\ &= \frac{2}{4}\int_{-1}^{1}(\frac{1}{3}e^{-v}+v^2e^{-v})dv \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \int v^2e^{-v}dv &= \int v^2(-e^{-v})'dv \\ &= -v^2e^{-v}+\int e^{-v}(2v)dv \\ &= -v^2e^{-v}+2\int(-e^{-v})'vdv \\ &= -v^2e^{-v}+2[-e^{-v}v+\int e^{-v}dv] \\ &= -v^2e^{-v}-2ve^{-v}-2e^{-v}+c \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}[-\frac{1}{3}e^{-v}-v^2e^{-v}-2ve^{-v}-2e^{-v}]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2}(-\frac{e^{-1}}{3}-e^{-1}-2e^{-1}-2e^{-1}-(-\frac{e}{3}-e+2e-2e)) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{4e}{3}-\frac{16}{3e}) = \frac{2e}{3}-\frac{8}{16e} \end{aligned}$$

7.4 解答

7.4

1.

(a) H-simple を用いると

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \le y \le 1, 0 \le x <\}$$

となる．よって

$$I = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{y} \frac{1}{(y^2 - x^2)^{1/2}} dxdy$$

ここで，$f(x,y) = 1/(y^2 - x^2)^{1/2}$ は $x = y$ で定義されないので，

$$J = \int_0^y \frac{1}{(y^2 - x^2)^{1/2}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{y-\varepsilon} \frac{1}{(y^2 - x^2)^{1/2}} dx$$

とおくと

$$\begin{aligned} J &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{y-\varepsilon} \frac{1}{(y^2 - x^2)^{1/2}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} [\sin^{-1} xy]_0^{y-\varepsilon} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

したがって，

$$I = \int_0^1 \frac{\pi}{2} dy = \frac{\pi}{2}$$

(b) $\Omega = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ は有界でないので

$$\Omega_n = \{(x,y) : 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n\}$$

を考えると $\Omega = \lim_{n \to \infty} \Omega_n$ より

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{\Omega_n} e^{-(x+y)} dxdy = \int_{x=0}^{n} \int_{y=0}^{n} e^{-(x+y)} dydx \\ &= \int_0^n \left[-e^{-(x+y)} \right]_0^n dx \\ &= \int_0^n (-e^{(x+n)} + e^{-x}) dx = \left[e^{-(x+n)} + e^{-x} \right]_0^n \\ &= e^{-2n} - e^{-n} - (e^{-n} - 1) = e^{-2n} - 2e^{-n} + 1 \end{aligned}$$

よって

$$I = \iint_{\Omega} e^{-(x+y)} dxdy = \lim_{n \to \infty} I_n = 1.$$

(c)

$\Omega = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ は有界．$f(x,y) = \tan^{-1} yx$ は $\Omega - \{(0,0)\}$ で有界．そこで，

$$\Omega_n = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, \frac{2}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

を考えると $\Omega = \lim_{n \to \infty} \Omega_n$ より

$$I_n = \iint_{\Omega_n} \tan^{-1} (\frac{y}{x}) dxdy$$

極座標に変換すると

$$\Gamma = \{(x,y) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{n} \le r \le 1\}$$

より

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_\Gamma \tan^{-1}\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right)|J| dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\sqrt{2}}{n}}^1 \tan^{-1}(\tan\theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\sqrt{2}}{n}}^1 \theta r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta d\theta \int_{\frac{\sqrt{2}}{n}}^1 r dr \\ &= \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{n}}^1 = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

よって

$$I = \iint_\Omega \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) dx dy = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi^2}{16}.$$

(d)　$\Omega = \{(x,y) : x \ge 1, y \ge 1\}$ は有界でないので

$$\Omega_n = \{(x,y) : 1 \le x \le n, 1 \le y \le n\} \ (n \ge 1)$$

を考えると $\Omega = \lim_{n\to\infty} \Omega_n$ より

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{\Omega_n} \frac{1}{x^2y^2} dx dy = \int_{x=1}^n \int_{y=1}^n \frac{1}{x^2y^2} dy dx \\ &= \int_1^n \left[-\frac{1}{x^2y}\right]_1^n dx \\ &= \int_1^n \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2n}\right) dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{xn}\right]_1^n \\ &= -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \left(-1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

よって

$$I = \iint_\Omega \frac{1}{x^2y^2} dx dy = \lim_{n\to\infty} I_n = 1.$$

(e)　$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}$ は曲線 $x = y^2$ 上で定義されない．そこで，$x < y^2 + \frac{1}{n}$ を除いた集合を Ω_n とする．H-simple を用いると

$$\Omega_n = \{(x,y) : -\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \le y \le \sqrt{1 - \frac{1}{n}}, y^2 + \frac{1}{n} \le x \le 1\}$$

$\Omega = \lim_{n\to\infty} \Omega_n$ より

$$\begin{aligned}
I_n &= \iint_{\Omega_n} \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}dxdy = \int_{-\sqrt{1-\frac{1}{n}}}^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \int_{y^2+\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}dxdy \\
&= \int_{-\sqrt{1-\frac{1}{n}}}^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \left[2\sqrt{x-y^2}\right]_{y^2+\frac{1}{n}}^{1} dy \\
&= 2\int_{-\sqrt{1-\frac{1}{n}}}^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} (\sqrt{1-y^2} - \sqrt{\frac{1}{n}})dy \text{ ここで} \left(\begin{array}{l} \int \sqrt{a^2-x^2}dx \\ = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}) \end{array} \right) \\
&= 2(\frac{1}{2}) \left[\sqrt{1-y^2} + \sin^{-1} y - \sqrt{\frac{1}{n}}y\right]_{-\sqrt{1-\frac{1}{n}}}^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}} + \sin^{-1}(\sqrt{1-\frac{1}{n}}) - \sin^{-1}(-\sqrt{1-\frac{1}{n}}) - \sqrt{\frac{1}{n}}(\sqrt{1-\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}})
\end{aligned}$$

よって

$$I = \iint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}dxdy = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

(f) $\Omega = \{(x,y) : -\infty < x, y < \infty\}$ は xy 平面全体を表わすので有界でない．そこで

$$\Omega_n = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq n^2\}\ (n \geq 1)$$

を考えると $\Omega = \lim_{n\to\infty} \Omega_n$．極座標変換をすると

$$\Gamma_n = \{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq n\}$$

より

$$\begin{aligned}
I_n &= \iint_{\Omega_n} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}dxdy = \iint_{\Gamma_n} \frac{1}{1+r^4}|J|drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^n \frac{r}{1+r^4}drd\theta \quad \left(\begin{array}{l} t = r^2 \text{とおくと } dt = 2rdr \text{ より} \\ \int \frac{r}{1+(r^2)^2}dr \\ = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt \\ = \frac{1}{2}\tan^{-1} t + c \\ = \frac{1}{2}\tan^{-1} r^2 + c \end{array} \right) \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{2}\tan^{-1} r^2\right]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{2}(\tan^{-1} n^2 - \tan^{-1} 0
\end{aligned}$$

よって

$$I = \iint_{\Omega} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}dxdy = \lim_{n\to\infty} I_n = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

2.

$t = x^{\frac{1}{2}}$ とおくと，$2tdt = dx$．したがって，

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx, I = \int_0^\infty e^{-y^2} dt$ とおくと，

$$I^2 = \iint_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

ここで例題 7.5 を用いると，$I^2 = \frac{\pi}{4}$ より $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

7.5 解答

7.5

1.

(a) V-simple で Ω を表わすと，

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq (1-x^{2/3})^{3/2}\}$$

となる．よって

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Omega dxdy = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{(1-x^{2/3})^{3/2}} dydx \\ &= \int_0^1 (1-x^{2/3})^{3/2} dx \end{aligned}$$

ここで，$x = \cos^3 t$ とおくと $dx = -3\cos^2 t \sin t dt$

x	0	$\to$	1
t	$\frac{\pi}{2}$	$\to$	0

より

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos^2 t)^{3/2}(-3\cos^2 t \sin t) dt \\ &= -3\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 t \cos^2 t dt \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t(1-\sin^2 t) dt \\ &= 3\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\frac{\pi}{2} - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{32} \end{aligned}$$

(b) $r = a\cos 3\theta$ の囲む範囲を求める．その方法として, $r = 0$ となる角を求めると, $\cos 3\theta = 0$ より，$\theta = \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{2}, \cdots$,．また，$r = \cos 3\theta$ は x 軸に対称．これより，$\theta = 0$ と $\theta = \frac{\pi}{6}$ との間の

部分の 12 倍が求める面積となる．Ω を $\theta=0$ と $\theta=\frac{\pi}{6}$ との間とおき，極座標で表わすと Ω は

$$\Gamma=\{(r,\theta):0\le\theta\le\frac{\pi}{6},0\le r\le a\cos3\theta\}$$

に移される．よって

$$\begin{aligned}I&=\iint_\Omega dxdy=\iint_\Gamma rdrd\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{a\cos3\theta}rdrd\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a\cos\theta}d\theta\\&=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos6\theta}{2}d\theta\\&=\frac{a^2}{4}\left[\theta+\frac{\sin6\theta}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{a^2}{6}(\frac{\pi}{6})=\frac{a^2\pi}{24}\end{aligned}$$

したがって，求める面積は $\dfrac{a^2\pi}{2}$

(c)

まず，2 つの曲線の交点を求めると，

$$\frac{8}{x^2+4}=\frac{x^2}{4}$$

より $x^4+4x^2-32=(x^2+8)(x^2-4)=0$．よって，$x=\pm2$．これより V-simple を用いて Ω を表わすと

$$\Omega=\{(x,y):-2\le x\le2,\frac{x^2}{4}\le y\le\frac{8}{x^2+4}\}$$

よって

$$\begin{aligned}I&=\iint_\Omega dxdy=\int_{-2}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{8}{x^2+4}}dydx\\&=\int_{-2}^{2}[y]_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{8}{x^2+4}}dx\\&=\int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{x^2+4}-\frac{x^2}{4}\right)dx\\&=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos6\theta}{2}d\theta\\&=\left[8\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2}\\&=4\tan^1-\frac{8}{12}-(4\tan^{-1}(-1)-\frac{-8}{12})\\&=2\pi-\frac{3}{4}-(-2\pi+\frac{3}{4})=4\pi-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

2.

(a) 曲面の面積を求めるには，曲面を表わす関数 $z = f(x, y)$ と曲面を正射影してできる Ω が必要となる．問題より，曲面は $z = \pm\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$．$xy$ 平面への正射影を取ると，つまり，$z = 0$ とおくと

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

よって

$$S = 2\iint_{\Omega} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}dxdy$$

ここで，

$$z_x = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}},\ z_y = \frac{-y}{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

より

$$z_x^2 + z_y^2 + 1 = \frac{x^2 + y^2 + a^2 - (x^2 + y^2)}{a^2 - (x^2 + y^2)} = \frac{a^2}{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$S = 2\iint_{\Omega} \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}dxdy$$

領域 Ω は円なので，極座標に変換すると

$$\Gamma = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a\}$$

したがって，求める曲面積は

$$\begin{aligned}
S &= 2a\iint_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}rdrd\theta \\
&= 2a\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}drd\theta \quad \left(\begin{array}{l} t = a^2 - r^2 \text{とおくと} \\ dt = -2rdr \text{ より} \\ \int \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{-dr}{\sqrt{t}} \\ = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt \\ = -t^{\frac{1}{2}} + c \\ = -\sqrt{a^2 - r^2} \end{array}\right) \\
&= 2a\int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{a^2 - r^2}\right]_0^r d\theta \\
&= 2a\int_0^{2\pi} ad\theta = 2a^2\left[\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= 2a^2(2\pi) = 4a^2\pi
\end{aligned}$$

(b) 曲面の面積を求めるには，曲面を表わす関数 $z = f(x, y)$ と曲面を正射影してできる Ω が必要となる．問題より，曲面は $z = \pm\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$．$xy$ 平面への正射影を取ると，つまり，$z = 0$ とおくと

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

よって

$$S = 2\iint_{\Omega} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}dxdy$$

ここで,

$$z_x = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}},\ z_y = \frac{-y}{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

より

$$z_x^2 + z_y^2 + 1 = \frac{x^2 + y^2 + a^2 - (x^2 + y^2)}{a^2 - (x^2 + y^2)} = \frac{a^2}{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$S = 2\iint_{\Omega} \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}dxdy$$

極座標に変換すると

$$\Gamma = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a\}$$

したがって，求める曲面積は

$$\begin{aligned}
S &= 2a \iint_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr d\theta \quad \left(\begin{array}{l} t = a^2 - r^2 \text{とおくと} \\ dt = -2rdr \text{ より} \\ \int \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{-dr}{\sqrt{t}} \\ = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\ = -t^{\frac{1}{2}} + c \\ = -\sqrt{a^2 - r^2} \end{array} \right) \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^r d\theta \\
&= 2a \int_0^{2\pi} a d\theta = 2a^2 [\theta]_0^{2\pi} \\
&= 2a^2(2\pi) = 4a^2\pi
\end{aligned}$$

確かに球の表面積

(c) 曲面の面積を求めるには，曲面を表わす関数 $z = f(x, y)$ と曲面を正射影してできる Ω が必要となる．この問題では，$x^2 + y^2 = a^2$ で切り取るので，切り取られた曲面の xy 平面への正射影は

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

ここで，$z = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ より

$$S = 2\iint_{\Omega} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}dxdy$$

$$z_x = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}},\ z_y = 0$$

より

$$z_x^2 + z_y^2 + 1 = \frac{x^2}{a^2 - x^2} + 1 = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} S &= 2\iint_\Omega \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} dxdy \\ &= 2\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dydx \\ &= 2\int_{-a}^{a} \left[\frac{ay}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ &= 4\int_{-a}^{a} adx = 8a\int_{0}^{a} dx = 8a[x]_0^a = 8a^2 \end{aligned}$$

(d) 曲線 $y = f(x),\ a \leq x \leq b$ を x 軸の回りに回転してできる回転体の表面積 S は

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^k 2\pi m x \sqrt{1 + m^2} dx = 2\pi m \sqrt{1 + m^2} \int_0^k x dx \\ &= 2\pi m \sqrt{1 + m^2} [x]_0^k = \pi m \sqrt{1 + m^2} k^2 \end{aligned}$$

3. 有界閉領域 Ω 上で連続な関数 $z = f(x, y) > z = f(x, y)$ が与えられたとき，Ω の境界 $\partial\Omega$ を通り z 軸に平行な直線群と f, g のグラフ曲面で囲まれた立体の体積は

$$V = \iint_\Omega (f(x, y) - g(x, y)) dxdy$$

で与えられる．

(a) 問題より求める立体は $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2,\ x \geq 0\}$ の境界を通り z 軸に平行な直線群と関数 $z = 0,\ z = x$ のグラフで囲まれている．Ω を極座標に変換すると，$x = r\cos\theta > 0$ より

$$\Gamma = \{(r, \theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq a\}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
V &= \iint_\Omega x dx dy \\
&= \iint_\Gamma r\cos\theta r dr d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\cos\theta dr d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^a r^2 dr \\
&= 2\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a \\
&= \frac{2a^3}{3}
\end{aligned}$$

(b) 問題より求める立体は $\Omega = \{(x,y) : x \leq 1-y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ の境界を通り z 軸に平行な直線群と関数 $z=0,\ z=1-x^2$ で囲まれている．H-simple を用いて Ω を表わすと

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1-y^2\}.$$

したがって，

$$\begin{aligned}
V &= \iint_\Omega (f(x,y)-g(x,y))dxdy \\
&= \iint_\Omega (1-x^2)dxdy \\
&= \int_0^1\int_0^{1-y^2}(1-x^2)dxdy \\
&= \int_0^1\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{1-y^2} dy \\
&= \int_0^1(1-y^2-\frac{(1-y^2)^3}{3})dy \\
&= \int_0^1(1-y^2-\frac{1}{3}(1-3y^2+3y^4-y^6))dy \\
&= \int_0^1(\frac{2}{3}-y^4+\frac{1}{3}y^6)dy \\
&= \left[\frac{2}{3}y-\frac{y^5}{5}+\frac{1}{21}y^7\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{21} = \frac{54}{105} = \frac{18}{35}
\end{aligned}$$

(c) 問題より求める立体は $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq ax\}$ の境界を通り z 軸に平行な直線群と関数 $z = -\sqrt{a^2-(x^2+y^2)},\ z = \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$ で囲まれている．極座標を用いて Ω の境界

を表わすと $x^2+y^2=ax$ より $r^2=ar\cos\theta$．よって，$r=a\cos\theta$ が 0 になるのは，$\theta=-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$．これより

$$\Gamma=\{(r,\theta):-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ r\le a\cos\theta\}.$$

したがって，

$$\begin{aligned}
V&=\iint_{\Omega}(f(x,y)-g(x,y))dxdy\\
&=2\iint_{\Omega}\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}dxdy\\
&=2\iint_{\Gamma}\sqrt{a^2-r^2}rdrd\theta\\
&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}rdrd\theta \quad \left(\begin{array}{l} a^2-t^2=t \text{ とおくと}\\ -2rdr=dt \text{ より}\\ \int\sqrt{a^2-r^2}rdr=\int\sqrt{t}(\frac{dt}{-2})\\ =-\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt\\ =-\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+c\\ =-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}+c\end{array}\right)\\
&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\cos\theta}d\theta\\
&=-\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}((a^2-a^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}-a^3)d\theta\\
&=-\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}((a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}-a^3)d\theta\\
&=-\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^3\sin^3\theta-a^3)d\theta\\
&=-\frac{4a^3}{3}(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

(d)　$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ と平面 $z=x$ の交線は，$x=1-\sqrt{x^2+y^2}$．よって，求める立体は $\Omega=\{(x,y):0\le x\le 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$ の境界を通り z 軸に平行な直線群と関数 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$，$z=x$ で囲まれている．極座標を用いて Ω の境界を表わすと $r\cos\theta=1-r$ より $r=\frac{1}{1+\cos\theta}$．$x\ge 0$ より，$r\cos\theta\ge 0$．よって，$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$．これより，

$$\Gamma=\{(r,\theta):-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le\frac{1}{1+\cos\theta}\}.$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_{\Omega} (f(x,y) - g(x,y))dxdy \\
&= \iint_{\Omega} (1 - \sqrt{x^2+y^2} - x)dxdy \\
&= \iint_{\Gamma} (1 - r - r\cos\theta) r dr d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{1+\cos\theta}} (r - r^2(1+\cos\theta))drd\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}(1+\cos\theta)\right]_0^{\frac{1}{1+\cos\theta}} d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2(1+\cos\theta)^2} - \frac{1}{3(1+\cos\theta)^3}(1+\cos\theta)\right) d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6(1+\cos\theta)^2} d\theta \quad \begin{array}{l}\text{ここで} \\ 1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}\end{array} \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\cos^4\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^4\frac{\theta}{2} d\theta \\
&= \frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{\theta}{2}\sec^2\frac{\theta}{2} d\theta \\
&= \frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\tan^2\frac{\theta}{2})\sec^2\frac{\theta}{2} d\theta \quad \left(\begin{array}{l}\tan\frac{\theta}{2} = t \text{ とおくと} \\ \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}d\theta = dt \\ \begin{array}{c|ccc} \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & \to & 1 \end{array}\end{array}\right) \\
&= \frac{1}{12}\int_0^1 (1+t^2)(2dt) \\
&= \frac{1}{6}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6}(1+\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

7.6 解答

7.6

1.

(a)

$$T = \{(x,y,z) : 0 \le x \le y \le z \le 1\}$$

を xy 平面に正射影すると

$$\Omega_{xy} = \{(x,y) : 0 \le x \le y \le 1\}$$

V-simple を用いて表わすと

$$\Omega_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\}$$

よって，

$$\begin{aligned}
V &= \iint_{\Omega} \int_{z=y}^{1} dz dx dy \\
&= \int_{x=0}^{1} \int_{x}^{1} [z]_y^1 dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_x^1 (1-y) dy dx \\
&= \int_0^1 \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_x^1 dx \\
&= \int_0^1 (1 - \frac{1}{2} - (x - \frac{x^2}{2})) dx \\
&= \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(b)

$$T = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$$

を xy 平面に正射影すると

$$\Omega_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

V-simple を用いて表わすと

$$\Omega_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_{\Omega} \int_{z=y}^{1} e^{x+y+z} dz dx dy \\
&= \int_{x=0}^{1} \int_{x}^{1} [e^{x+y+z}]_{y}^{1} dy dx \\
&= \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \int_{x}^{1} (e^{x+y+1} - \frac{1}{2} e^{x+2y}) dy dx \\
&= \int_{0}^{1} (e^{x+2} - \frac{1}{2} e^{x+2} - e^{2x+1} + \frac{1}{2} e^{3x}) dx \\
&= \left[\frac{1}{2} e^{x+2} - \frac{1}{2} e^{2x+1} + \frac{1}{6} e^{3x} \right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{2} e^{3} - \frac{1}{2} e^{3} + \frac{1}{6} e^{3} - (\frac{1}{2} e^{2} - \frac{1}{2} e + \frac{1}{6}) \\
&= \frac{1}{6} e^{3} - \frac{1}{2} e^{2} + \frac{1}{2} e - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} (e-1)^{3}
\end{aligned}
$$

2.

(a)

$$T = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3\}$$

より，T は直円錐 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ と $z = 3$ で囲まれている．また，$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ と $z = 3$ の交線は $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$．よって

$$\Omega_{xy} = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\}$$

極座標に変換すると

$$\Gamma = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ r \leq 3\}$$

よって

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_T dxdydz = \iint_{\Omega_{xy}} \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{3} dzdxdy \\
&= \iint_{\Omega_{xy}} (3-\sqrt{x^2+y^2})dxdy \\
&= \iint_{\Gamma} (3-r)rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (3r-r^2)drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right]_0^3 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\frac{27}{2}-\frac{27}{3})d\theta \\
&= \frac{27}{6}[\theta]_0^{2\pi} = 9\pi
\end{aligned}$$

(b)

$$T = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1\}$$

より，T は楕円体を表わしている．球面座標が使えるようにする為に，次のような変数変換を行ない，楕円体を球に移す．

$$x = au,\ y = bv,\ z = cw$$

より T は $T' = \{(u,v,w) : u^2+v^2+w^2 \le 1\}$ に移される．このとき

$$\begin{aligned}
J(u,v,w) &= |\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}| \\
&= \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_T (x^2+y^2+z^2)dxdydz \\
&= \iiint_{T'} (a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)abcdudvdw
\end{aligned}$$

球面座標に変換すると

$$u = \rho\sin\phi\cos\theta, v = \rho\sin\phi\sin\theta, w = \rho\cos\theta$$

より T'

$$T'' = \{(\rho, \phi, \theta) : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

また，$|J| = \rho^2 \sin\phi$ より

$$V = abc \iiint_{T'} (a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2) dudvdw$$

ここで，

$$\begin{aligned} V_1 &= abc \iiint_{T'} (a^2u^2) dudvdw \\ V_2 &= abc \iiint_{T'} (b^2v^2) dudvdw \\ V_3 &= abc \iiint_{T'} (c^2w^2) dudvdw \end{aligned}$$

とおき，V_1 を求めれば，$V_2 = \frac{b^2}{a^2} V_1$, $V_3 = \frac{c^2}{a^2} V_1$ となる．

$$\begin{aligned} V_1 &= abc \iiint_{T'} (a^2u^2) dudvdw \\ &= abc \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 (a^2 \rho^2 \sin^2\phi \cos^2\phi) |J| d\rho d\phi d\theta \\ &= a^3 bc \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^{\pi} \sin^3\phi d\phi \int_0^1 \rho^4 \\ &= a^3 bc \cdot \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15} \pi a^3 bc \end{aligned}$$

注

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^3\phi d\phi &= \int_0^{\pi} \sin^2\phi \sin\phi d\phi \\ &= \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\phi) \sin\phi d\phi \quad \left(\begin{array}{l} t = \cos t \text{ とおくと} \\ dt = -\sin t dt \text{ より} \end{array} \right) \\ &= 2 \int_0^1 (1 - t^2) dt \\ &= 2 \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

3.

(a) 密度を σ すると $\sigma =$ 一定.

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}$$

より

$$\bar{x} = \frac{\iint_\Omega \sigma x dxdy}{\iint_\Omega \sigma dxdy}$$

$$\frac{\int_0^1 \int_{x^2}^x xdydx}{\int_0^1 \int_{x^2}^x dydx}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\int_0^1 [xy]_{x^2}^x dx}{\int_0^1 [y]_{x^2}^x dx} \\
&= \frac{\int_0^1 (x^2 - x^3)dx}{\int_0^1 (x - x^2)dx} \\
&= \frac{\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1}{\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1} \\
&= \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_\Omega \sigma y dxdy}{\iint_\Omega \sigma dxdy}$$

より

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega y dxdy &= \int_0^1 \int_{x^2}^x y dydx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4)dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

よって，

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{5}$$

(b) 対称性より $\bar{x} = \bar{y} = 0$．密度を σ とすると

$$\bar{z} = \frac{\iiint_T \sigma z dxdydz}{\iiint_T \sigma dxdydz}$$

ここで，$\sigma = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$$

を球面座標を用いて表わすと

$$T' = \{(\rho, \phi, \theta) : \rho \leq a, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, 0\theta \leq 2\pi\}$$

より

$$\begin{aligned}
\iiint_T \sigma z dxdydz &= \iiint_{T'} k\rho(\rho\cos\phi)|J|d\rho d\phi d\theta \\
&= k\iiint_{T'} \rho^2\cos\phi(\rho^2\sin\phi)d\rho d\phi d\theta \\
&= k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\cos\phi d\phi \int_0^a \rho^4 d\rho \\
&= 2k\pi \left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^a \\
&= 2k\pi(\frac{1}{2})\frac{a^5}{5} = \frac{k\pi a^5}{5}
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
\iiint_T \sigma dxdydz &= \iiint_{T'} k\rho|J|d\rho d\phi d\theta \\
&= k\iiint_{T'} \rho(\rho^2\sin\phi)d\rho d\phi d\theta \\
&= k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi d\phi \int_0^a \rho^3 d\rho \\
&= 2k\pi \left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^a \\
&= 2k\pi \cdot 1 \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{k\pi a^4}{2}
\end{aligned}$$

よって,

$$\bar{z} = \frac{k\pi a^5}{5} \cdot \frac{2}{k\pi a^4} = \frac{2a}{5}$$

(c) 底面の半径が a, 高さが h の直円錐 T は

$$T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{k^2}z^2 \ (0 \leq z \leq h)\}$$

と表わせる．対称性より $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_T zdxdydz$$

ここで, $V = \frac{1}{3}\pi a^2 h$. T を円柱座標を用いて表わすと

$$T' = \{(r.\theta, z) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{hr}{a} \leq z \leq h\}$$

よって

$$\begin{aligned}
\iiint_T zdxdydz &= \iiint_{T'} z|J|dzdrd\theta \\
&= \iiint_{T'} zrdzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{\frac{hr}{a}}^h zdzrdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0 a\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\frac{hr}{a}}^h rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{2}(h^2 - \frac{h^2r^2}{a^2})rdrd\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (h^2r - \frac{h^2r^3}{a^2})dr \\
&= \pi\left[\frac{h^2r^2}{2} - \frac{h^2a^4}{4a^2}\right]_0^a d\theta \\
&= \pi(\frac{h^2a^2}{2} - \frac{h^2a^4}{4a^2}) = \frac{\pi h^2a^2}{4}
\end{aligned}$$

これより

$$\bar{z} = \frac{\pi h^2a^2}{4}\cdot\frac{3}{\pi a^2h} = \frac{3h}{4}$$

(d)

$$\Omega = \{(x,y) : ax \le x^2 + y^2 \le a^2\}$$

の面積 A は

$$A = \pi a^2 - \pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{3\pi a^2}{4}$$

また，対称性より $\bar{y} = 0$．ここで，極座標を用いて Ω を表わすと

$$\Gamma = \{(r,\theta) : -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, a\cos\theta \le r \le a\} \cup \{(r,\theta) : \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}, 0 \le r \le a\}$$

よって

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{A}\iint_{\Omega} xdxdy \\
&= \frac{2}{A}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{a\cos\theta}^{a} r^2\cos\theta drd\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{a} r^2\cos\theta drd\theta\right) \\
&= \frac{2}{A}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3\cos\theta}{3}\right]_{a\cos\theta}^{a} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[\frac{r^3\cos\theta}{3}\right]_0^{a} d\theta\right) \\
&= \frac{2}{A}\left(int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3}{3}(\cos\theta - \cos^4\theta)d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{a^3\cos\theta}{3}d\theta\right) \\
&= \frac{2}{A}\left(\frac{a^3}{3}(1 - \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\frac{\pi}{2}) + \left[\frac{a^3\sin\theta}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) \\
&= \frac{2}{A}\left(\frac{a^3}{3}(1 - \frac{3\pi}{16}) - \frac{a^3}{3}\right) \\
&= \frac{8}{3\pi a^2}(-\frac{\pi a^3}{16}) = -\frac{a}{6}
\end{aligned}$$

(e)　3 重積分を計算するために T を適当な座標軸面に正射影します．ここでは xy 平面に正射影します．ここで V-simple を用いると

$$\Omega_{xy} = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$$

これより

$$T = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le 1-x-y\}$$

よって

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{M}\iiint_T xyydxdydz \\
&= \frac{1}{M}\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} xy^2dzdydx \\
&= \frac{1}{M}\int_0^1\int_0^{1-x} xy^2(1-x-y)dydx \\
&= \frac{1}{M}\int_0^1\int_0^{1-x} (x(1-x)y^2 - xy^3)dydx \\
&= \frac{1}{M}\int_0^1 \left[\frac{x(1-x)y^3}{3} - \frac{xy^4}{4})\right]_0^{1-x} dx \\
&= \frac{1}{M}\int_0^1 \left(\frac{x(1-x)^4}{3} - \frac{x(1-x)^4}{4}\right) dx \\
&= \frac{1}{12M}\int_0^1 (x(1-x)^4)dx \ \left(\begin{array}{l} t = 1-x \text{ とおくと} \\ dt = -dx \text{ より} \end{array}\right) \\
&= \frac{1}{12M}\int_0^1 (t^4(1-t)dt = \frac{1}{12M}\int_0^1 (t^4 - t^5)dt \\
&= \frac{1}{12M}\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{360M}
\end{aligned}
$$

ここで $M=\dfrac{1}{120}$ より $\bar{y}=\dfrac{1}{3}$．また，

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{1}{M}\iiint_T xyzdxdydz \\
&= \frac{1}{M}\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} xyzdzdydx \\
&= \frac{1}{M}\int_0^1\int_0^{1-x}\left[\frac{xyz^2}{2}\right]_0^{1-x-y} dydx \\
&= \frac{1}{2M}\int_0^1\int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2 dydx \\
&= \frac{1}{2M}\int_0^1\int_0^{1-x}\left(xy(1-x)^2-2xy^2(1-x)+xy^3\right)dydx \\
&= \frac{1}{2M}\int_0^1\left[\frac{x(1-x)^2y^2}{2}-\frac{2x(1-x)y^3}{3})+\frac{xy^4}{4}\right]_0^{1-x} dx \\
&= \frac{1}{2M}\int_0^1\left(\frac{x(1-x)^4}{2}-\frac{2x(1-x)^4}{3}+\frac{x(1-x)^4}{4}\right)dx \\
&= \frac{1}{24M}\int_0^1 (x(1-x)^4)dx \quad \left(\begin{array}{l} t=1-x \text{ とおくと} \\ dt=-dx \text{ より} \end{array}\right) \\
&= \frac{1}{24M}\int_0^1 (t^4(1-t)dt = \frac{1}{24M}\int_0^1 (t^4-t^5)dt \\
&= \frac{1}{24M}\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{720M}
\end{aligned}$$

ここで $M=\dfrac{1}{120}$ より $\bar{y}=\dfrac{1}{6}$．

(f) 密度 σ が原点からの距離に比例するので，$\sigma=k\sqrt{x^2+y^2}$．また，

$$\Omega=\{(x,y): ax\le x^2+y^2\le a^2\}$$

の質量 M は

$$M=\iint_\Omega \sigma dxdy$$

ここで，極座標を用いて Ω を表わすと

$$\Gamma=\{(r,\theta): -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, a\cos\theta\le r\le a\}\cup\{(r,\theta): \frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{2}, 0\le r\le a\}$$

よって

$$\begin{aligned}
M &= k\iint_{\Gamma} r|J|drd\theta \\
&= k\int_{\Gamma} r^2 drd\theta \\
&= 2k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{a\cos\theta}^{a} r^2drd\theta + 2k\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^a r^2drd\theta \\
&= 2k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{a\cos\theta}^{a}d\theta + 2k\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a d\theta \\
&= 2k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3(1-\cos^3\theta)}{3}d\theta + 2k\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{a^3}{3}d\theta \\
&= \frac{2ka^3}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}) + \frac{2ka^3}{3}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2ka^3}{3} - \frac{4ka^3}{9} = \frac{2ka^3(3\pi-2)}{9}
\end{aligned}$$

また，対称性より $\bar{y}=0$．よって

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{M}\iint_{\Omega}\sigma xdxdy \\
&= \frac{1}{M}\iint_{\Gamma} kr\cdot r\cos\theta|J|drd\theta \\
&= \frac{2k}{M}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{a\cos\theta}^{a} r^3\cos\theta drd\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^a r^3\cos\theta drd\theta\right) \\
&= \frac{2k}{M}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4\cos\theta}{4}\right]_{a\cos\theta}^{a}d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[\frac{r^4\cos\theta}{4}\right]_0^a d\theta\right) \\
&= \frac{ka^4}{2M}\left(int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta-\cos^5\theta)d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\theta d\theta\right) \\
&= \frac{ka^4}{2M}\left(1-\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3\cdot 1} + [\sin\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) \\
&= \frac{ka^4}{2M}\left(-\frac{8}{15}\right) = -\frac{4ka^4}{15M} \\
&= -\frac{4ka^4}{15M}\cdot\frac{9}{2ka^3(3\pi-2)} = -\frac{6a}{5(3\pi-2)}
\end{aligned}$$

8. ベクトル解析 (VECTOR ANALYSIS)

8.1 解答

8.1

1. $f(x,y,z)=0$ の法ベクトル $\mathbf{N}$ は

$$\mathbf{N} = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$

点 (x_0, y_0, z_0) を通り，法ベクトル $\mathbf{N} = (A, B, C)$ である平面の方程式は,

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

(a) $z = (x^2+y^2)^2$ の法ベクトルは $(4x(x^2+y^2), 4y(x^2+y^2), -1)$．よって点 $(1,1,4)$ における法ベクトルは $(8, 8, -1)$．これより求める平面の方程式は

$$8(x-1) + 8(y-1) - (z-4) = 0$$

(b) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 - 3xyz$ とおくと $f(x,y,z)=0$ の点 $(1, 2, \frac{3}{2})$ における法ベクトルは

$$\begin{aligned}\nabla f(1,2,\frac{3}{2}) &= (3x^2 - 3yz, 3y^2 - 3xz, -3xy)\mid_{(1,2,\frac{3}{2})} \\ &= (3-9, 12-\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}) = (-6, \frac{15}{2}, -\frac{9}{2})\end{aligned}$$

これより求める平面の方程式は

$$-12(x-1) + 15(y-2) - 9(z-\frac{3}{2}) = 0$$

または,

$$8x - 10y + 6z = -9$$

(c) $f(x,y,z) = \sin(x\cos y) - z$ とおくと $f(x,y,z)=0$ の点 $(0, \frac{\pi}{2}, 0)$ における法ベクトルは

$$\begin{aligned}\nabla f(0,\frac{\pi}{2},0) &= (\cos y\cos(x\cos y), -x\sin y\sin(x\cos y), -1)\mid_{(0,\frac{\pi}{2},0)} \\ &= (0, 0, 1)\end{aligned}$$

これより求める平面の方程式は

$$z = 0$$

2. 曲面 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ の面積素 dS は

$$dS = \|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\| dudv$$

(a) $\mathbf{r} = (u, v, u^2+v^2)$

$$\begin{aligned}dS &= \|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\| dudv \\ &= \|\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix}\| dudv = \|(-2u, -2v, 1)\| dudv \\ &= \sqrt{4u^2+4v^2+1}\, dudv\end{aligned}$$

(b) $\mathbf{r} = (u\cos v, u\sin v, 2v)$

$$
\begin{aligned}
dS &= \|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\| dudv \\
&= \| \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u|cosv & 2 \end{vmatrix} \| dudv = \|(2\sin v, -2\cos v, u)\| dudv \\
&= \sqrt{4\sin^2 v + 4\cos^2 v + u^2} dudv = \sqrt{u^2+4} dudv
\end{aligned}
$$

(c) $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ において $u = x, v = y$ とおくと

$$
\mathbf{r} = \mathbf{r}(x,y) = (x, y, f(x,y)) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})
$$

よって

$$
\mathbf{r}_x = (1, 0, f_x) = (1, 0, -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}})
$$

$$
\mathbf{r}_y = (0, 1, f_y) = (1, 0, -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}})
$$

これより

$$
\begin{aligned}
dS &= \|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\| dxdy \\
&= \| \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} \| dxdy = \|(-f_x, -f_y, 1)\| dxdy \\
&= \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dxdy = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxddy
\end{aligned}
$$

(d) $F(x,y,z) = 0$ のとき $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ は曲面 $F(x,y,z) = 0$ に直交．dS と $dxdy$ の面積比は

$$
dS|\cos\gamma| = dxdy
$$

ここで，γ は ∇F と $\hat{\mathbf{k}}$ の作る角．これより

$$
dS = |\frac{1}{\cos\gamma}| dxdy
$$

$$
\nabla F \cdot \hat{\mathbf{k}} = (F_x, F_y, F_z) \cdot (0, 0, 1) = F_z
$$

また，

$$
\nabla F \cdot \hat{\mathbf{k}} = \|\nabla F\| \cos\gamma
$$

より

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

したがって,

$$dS = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|}dxdy$$

8.2 解答

8.2

1. $f(x,y,z) = 0$ の法ベクトル $\mathbf{N}$ は

$$\mathbf{N} = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$

点 (x_0, y_0, z_0) を通り，法ベクトル $\mathbf{N} = (A, B, C)$ である平面の方程式は,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

(a) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z = 0$ とおくと

$$\nabla f(1,1,0) = (2x, -2y, -1)\mid_{(1,1,0)} = (2, -2, -1)$$

よって，法線単位ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ は

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{(2,-2,-1)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{(2,-2,-1)}{3}$$

また，棱平面は

$$2(x-1) - 2(y-1) - z = 0$$

(b) $f(x,y,z) = 2x - 4y^2 + z^3 = 0$ とおくと

$$\nabla f(-4,0,2) = (2, -8y, 3z^2)\mid_{(-4,0,2)} = (2, 0, 12)$$

よって，法線単位ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ は

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{(2,0,12)}{\sqrt{2^2 + 12^2}} = \frac{(1,0,6)}{\sqrt{37}}$$

また，接平面は

$$x + 4 + 6(z - 2) = 0$$

(c) $f(x,y,z) = \cos x + \sin y + z - 1 = 0$ とおくと

$$\nabla f(0,\pi,0) = (-\sin x, \cos y, 1)\mid_{(0,\pi,0)} = (0, -1, 1)$$

よって，法線単位ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ は

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{(0,-1,1)}{\sqrt{(-)^2+1^2}} = \frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}$$

また，棲平面は

$$y - z = \pi$$

2. $\hat{\mathbf{u}}$ を方向単位ベクトルとすると，$\rho(x,y,z) = ke^{-(x^2+y^2+z^2)}$ の $\hat{\mathbf{u}}$ 方向への方向微分は

$$\rho'_{\hat{\mathbf{u}}}(x,y,z) = \nabla\rho \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

で与えられる．よって変化が最大となるのは，$\nabla\rho$ と $\hat{\mathbf{u}}$ が平行の時である．

(a) $\hat{\mathbf{u}}$ を方向単位ベクトルとする．

$$\rho_x = -2xke^{-(x^2+y^2+z^2)}, \rho_y = -2yke^{-(x^2+y^2+z^2)}, \rho_z = -2zke^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

より

$$\nabla\rho(1,0,1) = (-2ke^{-2}, 0, -2ke^{-2})$$

変化が最大となるのは，$\nabla\rho$ と $\hat{\mathbf{u}}$ が平行の時であるので

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{(-1,0,-1)}{\sqrt{2}}$$

(b) $\hat{\mathbf{u}}$ を方向単位ベクトルとする．

$$\rho_x = -2xke^{-(x^2+y^2+z^2)}, \rho_y = -2yke^{-(x^2+y^2+z^2)}, \rho_z = -2zke^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

より

$$\nabla\rho(1,0,1) = (-2ke^{-2}, 0, -2ke^{-2})$$

変化が最小となるのは，$\nabla\rho$ と $\hat{\mathbf{u}}$ が直交する時であるので

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}, \text{または}\ \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}}$$

3. $\mathbf{F}(x,y)$ をベクトル場とし，$f(x,y) = c$ を力線の方程式とすると，$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y)$ は $f(x,y) = c$ の法線ベクトルを表わすので，

$$\nabla f(x,y) \cdot F(x,y) = 0 \text{ よって } (f_x, f_y) \cdot \mathbf{F}(x,y) = 0$$

が成り立つ．

(a) $f(x,y) = c$ を力線の方程式とするとすると，接線の傾きは

$$f_x dx + f_y dy = 0 \text{ より } \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

また，力線とベクトル場の関係から

$$\nabla f(x,y)\cdot F(x,y) = (f_x, f_y)\cdot(-2y, x) = 0$$

よって

$$-2yf_x + xf_y = 0$$

この 2 つの式から

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = \frac{2y}{x}$$

書き直すと

$$xdx + 2ydy = 0$$

これより $f_x = x, f_y = 2y$．したがって，

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2 = c.$$

(b) $f(x,y) = c$ を力線の方程式とするとすると，接線の傾きは

$$f_x dx + f_y dy = 0 \text{ より} \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

また，力線とベクトル場の関係から

$$\nabla f(x,y)\cdot \mathbf{F}(x,y) = (f_x, f_y)\cdot(x, -y) = 0$$

よって

$$xf_x - yf_y = 0$$

この 2 つの式から

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y}{x}$$

書き直すと

$$xdy + ydx = 0$$

これより $f_x = y, f_y = x$．したがって，

$$f(x,y) = xy = c.$$

8.3 解答

8.3

1. 演算子 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ を用いると

$$\mathrm{grad} f = \nabla f,\ \mathrm{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F}, \mathrm{curl}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F}$$

(a)　$f(x,y,z) = 3x^2 - yz$ より

$$\mathrm{grad} f(1,-1,1) = \nabla f(1,-1,1) = (6x,-z,-y)\,|_{(1,-1,1)} = (6,-1,1)$$

(b)　$\mathbf{F} = (3xyz^2, 2xy^3, -x^2yz)$ より

$$\mathrm{div}\mathbf{F}(1,-1,1) = 3yz^2 + 6xy^2 - x^2y\,|_{(1,-1,1)} = -3+6+1 = 4$$

(c)　$\mathbf{F} = (3xyz^2, 2xy^3, -x^2yz)$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3xyz^2 & 2xy^3 & -x^2yz \end{vmatrix} \\ &= (-x^2z, 9xyz^2 + 2xyz, 2y^3 - 3xz^2)\,|_{(1,1-1)} \\ &= (-1,-11,-5)\end{aligned}$$

(d)　$\mathbf{F} = (3xyz^2, 2xy^3, -x^2yz)$ より

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = (3xyz^2, 2xy^3, -x^2yz)$$

よって

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{F}) = (6y^2 - 2xy, 3z^2 + 12xy0x^2, 6yz)\,|_{(1,-1,1)} = (8,-9,-6)$$

(e)　$f(x,y,z) = 3x^2 - yz$ より

$$\mathrm{grad} f = \nabla f = (6x,-z,-y)$$

よって

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = \nabla\cdot(6x,-z,-y) = 6$$

(f)

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}(\mathrm{curl}\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x^2z & 9xyz^2 + 2xyz & 2y^3 - 3xz^2 \end{vmatrix} \\ &= (6y^2 - 18xyz - 2xy, -x^2 + 6xz, 9yz^2 + 2yz)\,|_{(1,-1,1)} \\ &= (-6+18+2, 5, -9-2) = (14,5,-11)\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}\nabla\times f\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (3x^2-yz)(3xyz^2) & (3x^2-yz)(2xy^3) & (3x^2-yz)(-x^2yz) \end{vmatrix} \\ &= (-z(-x^2yz) + 3x^2 - yz)(-2xyz) \\ &\quad ,\ -y(3xyz^2) + (3x^2-yz)(6xyz) \\ &\quad ,\ 6x(2xy^3) + (3x^2-yz)(2y^3))\,|_{(1,-1,1)} \\ &= (-1+8-2, -3-24-14, -12-8-15) = (5,-41,-35)\end{aligned}$$

(h)

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6x & -z & -y \end{vmatrix}$$
$$= (-1+1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

8.4 解答

8.4

1.

(a) 点 $(-1,0,2)$ と点 $(1,3,2)$ を結ぶ直線をパラメター化し，ベクトル表示すると

$$\mathbf{r}(t) = (-1,0,2) + t(2,3,0) = (2t-1, 3t, 2)\ (0 \leq t \leq 1)$$

この直線 C の弧長 s は

$$s(t) = \int_0^t \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|dt = \int_0^t \|(2,3,0)\|dt = \sqrt{13}t$$

これより $ds = \sqrt{13}$ となり，求める線積分は

$$\int_C xy^2 ds = \sqrt{13}\int_0^1 (2t-1)(3t)^2 dt = \sqrt{13}\int_0^1 (18t^3 - 9t^2)dt$$
$$= \sqrt{13}\left[\frac{9}{2}t^4 - 3t^3\right]_0^1 = \sqrt{13}(\frac{9}{2} - 3) = \frac{3\sqrt{13}}{2}$$

(b) 点 $(0,0,0)$ と点 $(1,3,2)$ を結ぶ直線をパラメター化し，ベクトル表示すると

$$\mathbf{r}(t) = t(1,3,2) = (t, 3t, 2t)\ (0 \leq t \leq 1)$$

この直線 C の弧長 s は

$$s(t) = \int_0^t \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|dt = \int_0^t \|(1,3,2)\|dt = \sqrt{14}t$$

これより $ds = \sqrt{14}$ となり，求める線積分は

$$\int_C (x+y^2)ds = \sqrt{14}\int_0^1 (t+9t^2)dt = \sqrt{14}\left[\frac{t^2}{2} + 3t^3\right]_0^1$$
$$= \sqrt{14}(\frac{1}{2} + 3) = \frac{7\sqrt{14}}{2}$$

(c) 曲線 C をパラメター化し，ベクトル表示すると

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)\ (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

これより $x = \cos t, y = \sin t$ となり求める線積分は

$$\begin{aligned}
\int_C (-y^3 dx + x^2 dy) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^3 t(-\sin t) + \cos^2 t \cos t) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt \\
&= \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3 \cdot 1} = \frac{3\pi}{16} + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(d) 点 $(0, 0, 0)$ と点 $(1, 1, 1)$ を結ぶ直線 C をパラメター化し，ベクトル表示すると

$$\mathbf{r}(t) = t(1, 1, 1) = (t, t, t) \ (0 \leq t \leq 1)$$

これより $x = t, y = t, z = t$．また，$d\mathbf{r} = (1, 1, 1)dt$ となり求める線積分は

$$\begin{aligned}
\int_C (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^3) \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (3t^2 + 6t, -14t^2, 20t^4) \cdot (1, 1, 1) dt \\
&= \int_0^1 (3t^2 + 6t - 14t^2 + 20t^4) dt = \int_0^1 (20t^4 - 11t^2 + 6t) dt \\
&= \left[\frac{4t^5 - \frac{11}{3} t^3}{+} 3t^2 \right]_0^1 \\
&= 4 - \frac{11}{3} + 3 = \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

(e) $f(x, y, z) = 3x^2 - yz$ より点 $(0, 0, 0)$ と点 $(1, 1, 1)$ を結ぶ曲線 C をベクトル表示すると

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3) \ (0 \leq t \leq 1)$$

これより $d\mathbf{r} = (1, 2t, 3t^2)dt$ となり求める線積分は

$$\begin{aligned}
\int_C (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^3) \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (3t^2 + 6t^2, -14t^5, 20t^1 0) \cdot (1, t, t^2) dt \\
&= \int_0^1 (9t^2 - 14t^6 + 20t^1 2) dt \\
&= \left[3t^3 - 2t^7 + \frac{20}{13} t^{13} \right]_0^1 \\
&= 3 - 2 + \frac{20}{13} = \frac{33}{13}
\end{aligned}$$

8.5 解答

8.5

1. スカラー場 f の曲面 S 上での面積分は

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_\Omega f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| du dv$$

曲面 S 上のベクトル場 $\mathbf{F}$ の面積分は次のように 2 重積分で表わされます.

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS &= \iint_\Omega \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|}\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|dudv\\ &= \iint_\Omega \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)dudv\\ &= \iint_\Omega \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix} dudv\end{aligned}$$

(a) $\mathbf{r} = (x, y, 1-x-y)$ より

$$\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y = (1,0,-1)\times(0,1,1-1) = (1,1,1)$$

よって面積素 $dS = \sqrt{3}dxdy$. また, $S: x+y+z=1$ の xy 平面への射影 Ω は V-simple を用いて表わすと

$$\Omega = \{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$$

これより

$$\begin{aligned}\iint_S xy^2dS &= \sqrt{3}\iint_\Omega xy^2dxdy\\ &= \int_0^1\int_0^{1-x} xy^2dydx = \sqrt{3}\int_0^1\left[\frac{xy^3}{3}\right]_0^{1-x}dx\\ &= \sqrt{3}\int_0^1\frac{x(1-x)^3}{3}dx = \frac{sqrt3}{3}\int_0^1 x(1-3x+3x^2-x^3)dx\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^1(x-3x^2+3x^3-x^4)dx\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{x^2}{2}-x^3+\frac{3x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{10-20+15-4}{20}\right) = \frac{1}{20\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(b) $S: x^2+y^2=9, x\ge 0, y\ge 0, 0\le z\le 4$ より正射影は yz 平面または, xz 平面となる. そこで, yz 平面に正射影を行うとすると, Ω_{yz} は

$$\Omega_{yz} = \{(y,z): -3\le y\le 3, 0\le z\le 4\}$$

また, $x^2 = 9-y^2$ より, $x = \pm\sqrt{9-y^2}$. $x\ge 0$ より,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = \sqrt{9-y^2}\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_y\times\mathbf{r}_z}{|\mathbf{r}_y\times\mathbf{r}_z|}$$

したがって，

$$\iint_S (6z,\ 3\sqrt{9-y^2}+2y-z, -\sqrt{9-y^2})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iint_{S,x>0} (6z,\ 3\sqrt{9-y^2}+2y-z, -\sqrt{9-y^2})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$$

$$= \iint_{\Omega_{yz}} \begin{vmatrix} 6z & 3\sqrt{9-y^2}+2y-z & -\sqrt{9-y^2} \\ -\frac{y}{\sqrt{9-y^2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dxdy = \iint_\Omega (6z+3y+$$

$$= \int_{y=0}^3 \int_0^4 (6z+3y+\frac{y(2y-z)}{\sqrt{9-y^2}})dzdy = \int_0^3 \left[3z^2+3yz+\frac{2y^2z-yz^2/2}{\sqrt{9-y^2}}\right]_0^4 dy$$

$$= \int_0^3 (48+12y+\frac{8y^2-8y}{\sqrt{9-y^2}})dy$$

ここで，

$$int_0^3 \frac{8y^2}{\sqrt{9-y^2}}dy = \int_0^{\pi/2} \frac{72\sin^2 t}{3\cos t}(3\cos t)dt = 72\cdot\frac{\pi}{4} = 18\pi$$

に注意すると，

$$\iint_S (6z,\ 3\sqrt{9-y^2}+2y-z, -\sqrt{9-y^2})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = 156+18\pi$$

(c)　$S: 2x+3y+6z=12, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ より $\mathbf{r} = (x,y,z) = (x, y, \frac{12-2x-3y}{6})$

$$\Omega = \{(x,y) : 0\leq x\leq 6, 0\leq y\leq 4-\frac{2}{3}x\}$$

$$\iint_S (6z,\ -4x, y)\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iint_\Omega \begin{vmatrix} 6z & -4x & y \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} dxdy = \iint_\Omega (2z-2x+y)dxdy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^6 \int_0^{4-\frac{2}{3}x} (6z-6x+3y)dydx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^6 \int_0^{4-\frac{2}{3}x} (12-2x-3y-6x+3y)dydx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^6 \int_0^{4-\frac{2}{3}x} (12-8x)dydx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^6 \left[12y-4x^2\right]_0^{4-\frac{2}{3}x} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^6 \left(48-8x-4(\frac{(12-2x)^2}{9})\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^6 \left(48-8x-\frac{16}{9}(36-12x+x^2)\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{16x^3}{27}+\frac{40x^2}{6}-16x\right]_0^6$$

$$= \frac{1}{3}(-128+240-96) = \frac{16}{3}$$

(d) $S: x^2+y^2+z^2=a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ より $\mathbf{r}=(x,y,z(x,y))$

$$\Omega = \{(t,\theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq a\}$$

$$\begin{aligned}
\iint_S (6z, -4x, y)\cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \iint_\Omega \begin{vmatrix} 6z & -4x & y \\ 1 & 0 & -\frac{x}{z} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{z} \end{vmatrix} dxdy = \iint_\Omega (6x - \frac{4xy}{z} + y)dxdy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a (6r\cos\theta - \frac{4r^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2-r^2}} + r\sin\theta) r dr d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a (6r^2\cos\theta - \frac{4r^3\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2-r^2}} + r^2\sin\theta) dr d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2r^3\cos\theta + \frac{r^3}{3}\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta(\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{3/2} - 2a^2(a^2-r^2)^{1/2})\right]_0^a d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2a^3\cos\theta + \frac{a^3}{3}\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta(\frac{2}{3}a^3 - 2a^3)\right) d\theta \\
&= 2a^3 + \frac{a^3}{3} + \frac{2}{3}a^3 - 2a^3 = a^3
\end{aligned}$$

(e) $S: z = x^2+y^2, x^2+y^2 \leq 1$ より Ω は

$$\Omega = \{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 1\}$$

また，$\mathbf{r} = (x, y, x^2+y^2)$.

$$\begin{aligned}
\iint_S (xy, -2y, z-x)\cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \iint_\Omega \begin{vmatrix} xy & -2y & z-x \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} dxdy = \iint_\Omega (-2x^2y + 4y^2 + z - x)dxdy \\
&= \iint_\Omega (-2x^2y + 4y^2 + x^2 + y^2 - x)dxdy = \iint_\Omega (-2x^2y + 5y^2 + x^2 - x)dxdy \\
&= \int_0^\pi \int_0^1 (-2r^3\cos^2\theta\sin\theta + 5r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta - r\cos\theta) r dr d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^1 (-2r^4\cos^2\theta\sin\theta + 5r^3\sin^2\theta + r^3\cos^2\theta - r^2\cos\theta) dr d\theta \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{-2}{5}r^5\cos^2\theta\sin\theta + \frac{5}{4}r^4\sin^2\theta + \frac{r^4}{4}\cos^2\theta - \frac{r^3}{3}\cos\theta\right]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{-2}{5}\cos^2\theta\sin\theta + \frac{5}{4}\sin^2\theta + \frac{1}{4}\cos^2\theta - \frac{1}{3}\cos\theta\right]_0^1 d\theta
\end{aligned}$$

ここで,

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin\theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \pi$$

に注意すると

$$\iint_S (xy, -2y, z-x)\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

8.6 解答

8.6

1. (Green の定理) 区分的に滑らかな閉曲線 C を境界に持つ xy 平面上の有界閉領域を Ω とする．また，ベクトル場 $\mathbf{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ は C^1 級とする．このとき

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_\Omega (\nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{k}}dxdy$$

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

が成り立つ．

(Stokes の定理)

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$$

(a) Green の定理より

$$\begin{aligned}\oint_C (x^2-xy^3)dx + (y^2-2xy)dy &= \iint_\Omega (-2y-(-2xy))dxdy \\ &= \int_0^2\int_0^2 (-2y+2xy)dxdy = \int_0^2 \left[-2xy+x^2y\right]_0^2 dy \\ &= \int_0^2 (-4y+4y)dy = 0\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^3 - y^2\cos x & 1-2y\sin x + 3x^2y^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{k}}(-2y\cos x + 6xy^2 - (6xy^2 - 2y\cos x)) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

よって，$\mathbf{F}$ は保存場となり，$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$

(c) $\mathbf{F} = (-z^2, xy^2, z)$ より，Stokes の定理を用いる．

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -z^2 & xy^2 & z \end{vmatrix} = (0, 2z, y^2)$$

また，$\mathbf{r} = (x,y,z) = (x, y, \sqrt{1-(x^2+y^2)})$ より法線ベクトルを求めると

$$\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & -\frac{x}{z} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{z} \end{vmatrix} = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
\oint_{\partial S} -z^2dx + xy^2dy + zdz &= \iint_{\Omega} (0, 2z, y^2) \cdot \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y dxdy \\
&= \int_{\Omega} (0, 2z, y^2) \cdot (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1) dxdy \\
&= \int_{\Omega} (2y + y^2) dxdy \text{ ここで} \Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r \sin\theta + r^2 \sin^2\theta) r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r^2 \sin\theta + r^3 \sin^2\theta) dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} r^3 \sin\theta + \frac{r^4}{4} \sin^2\theta \right]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} \sin\theta + \frac{1}{4} \sin^2\theta \right) d\theta \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

2. [Gauss の発散定理] ベクトル場 $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$ において，区分的に滑らかな閉曲面 S で囲まれた空間の領域を V とし， S の内部から外部に向かう法線ベクトルを $\hat{\mathbf{n}}$ とすると，

$$
\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \mathrm{div} \mathbf{F} dV
$$

$$
\iint_S (F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy) = \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dxdydz
$$

が成り立つ．

(a) $\mathbf{r} = (x, y, z)$

$$
\begin{aligned}
dS &= \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| dxdy \\
&= \| \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} \| dxdy \\
&= \|(-z_x, -z_y, 1)\| dxdy = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dxdy \\
&= \sqrt{(\frac{3x}{z})^2 + (\frac{3y}{z})^2 + 1} dxdy \\
&= \sqrt{\frac{9x^2 + 9y^2 + z^2}{z^2}} dxdy = 2\sqrt{x^2 + y^2}
\end{aligned}
$$

よって

$$\iint_S (x^2+y^2)dS = 2\iint_S (x^2+y^2)^{3/2}dxdy$$
$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r^3 r dr d\theta$$
$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r^4 dr = 2(2\pi)(\frac{9\sqrt{3}}{5})$$
$$= \frac{36\sqrt{3}\pi}{5}$$

(b)

$$\mathrm{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - x & -xy & 3z \end{vmatrix} = (0,0,-y)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\|} = (1,0,z_x)\times(0,1,z_y)$$

$$dS = \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| dxdy$$

より

$$\iint_S \mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iint_S (0,0,-y)\cdot(1,0,z_x)\times(0,1,z_y)dxdy$$
$$= \iint_\Omega \begin{vmatrix} 0 & 0 & -y \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} dxdy$$
$$= \iint_\Omega -y dxdy$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 -r\sin\theta r dr d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta \int_0^2 -r^2 dr = 0$$

(c) $\mathrm{div}\mathbf{F} = (1+z) = (1+4-y^2)$ より

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iiint_V (5-y^2)dV$$
$$= \int_0^3\int_{-2}^2\int_{z=0}^{4-y^2}(5-y^2)dzdydx$$

$$\int_0^3 dx \int_{-2}^2 (5(4-y^2) - y^2(4-y^2))dy$$

$$= 6\left[20y - 3y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_0^2$$
$$= 6(40 - 24 + \frac{32}{5}) = \frac{672}{5}$$

(d) $\mathbf{F}=(x,y,z)$ より $\mathrm{div}\mathbf{F}=3$．よって

$$\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_V 3dV$$

ここで，S は円柱 $x^2+y^2=9$ と平面 $z=0, z=3$ で囲まれた領域なので，その体積は $\pi r^2 h=27\pi$．これより

$$\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_V 3dV=81\pi$$

3. A を閉曲線 C で囲まれた領域とすると，Green の定理で $P=-y, Q=x$ とおくと

$$\oint_C xdy-ydx=\iint_\Omega\left(\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)dxdy=\iint_\Omega 2dxdy=2A$$

よって，$A=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$

4.

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta)(b\cos\theta d\theta-(b\sin\theta)(-a\sin\theta)d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab(\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}abd\theta=\pi ab\end{aligned}$$

5. labelenshU:8-6-5 発散定理において $\mathbf{F}=f\mathrm{grad}g$ とおくと

$$\cdot\,\hat{\mathbf{n}}=f(\mathrm{grad}g\cdot\hat{\mathbf{n}}=f\frac{\partial g}{\partial n}$$

また，

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{F}&=\mathrm{div}(f\mathrm{grad}g)\\&=\nabla\cdot(f\nabla g)=(\nabla f)\cdot\nabla g+f\nabla\cdot\nabla g\\&=\mathrm{grad}f\cdot\mathrm{grad}g+f\nabla^2 g\end{aligned}$$

よって

$$\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}dS=\iiint_V(f\nabla^2 g+\mathrm{grad}f\cdot\mathrm{grad}g)dV$$

定理 10.1 (積分公式) ～

(1) $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \ (\alpha \neq -1)$

(2) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$

(3) $\int e^x dx = e^x + c$

(4) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

(5) $\int \cos x dx = \sin x + c$

(6) $\int \tan x dx = \log|\sec x| + c$

(7) $\int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + c$

(8) $\int \csc^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

(9) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log|\frac{x-a}{x+a}| + c$

(10) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$

(12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \log|x + \sqrt{x^2 + A}| + c$